OLASILIK (İHTİMAL)

TEORİSİ

DENEY (experiment), SONUÇ (outcome), OLAY (event)

- ***DENEY:***Bir aktivitenin gözlemlenmesi ve ölçüm yapma şekilleridir.
- ***SONUÇ:***Deneylerin tamamlanması ile elde edilen verilerdir.
- ***OLAY:***Deneyler ile elde edilen sonuçların toplamına olay denir.
- **ÖRNEĞİN;**bir zarın atılması **deneyinde** elde edilen **sonuç** 1,2,3,4,5,6 ve çift sayı gelmesi ya da 4'den büyük sayı gelmesi vb. ise **olay** olarak gösterilebilir.

OLASILIK KAVRAMI

- Bir olayın gerçekleşme ihtimali veya şansının ölçülmesine olasılık (probability) denir. Herhangi bir E olayı için bu olayın olması olasılığı (elverişli hal) P(E) ile, gerçekleşmeme olasılığı (elverişsiz hal) ise P(~E)=1-P(E) ile gösterilir.
- Olasılık daima 0 ile 1 arasında olmalıdır. Başka ifadeyle; **0≤P(a)≤1** herzaman sağlanır.

Olasılık Çeşitleri

Objektif olasılık
(tekrarlanabilen rasgele deneyler)
zar atılması, ruletin döndürümesi

Subjektif olasılık
(tekrarı mümkün olmayan deneyler)
#geçmiş verilere göre yarın kar yağma ihtimali

1-Klasik olasılık

2-Nisbi frekans

KLASİK OLASILIK

- Bir E olayında mümkün olan tüm halleri n ile ve E olayı için ortaya çıkabilecek halleri de a ile gösterirsek E olayının mevcut durumda olması ihtimali

$$P(E) = \frac{a}{n} = \frac{\text{elverisli hal sayisi}}{\text{toplam mumkun haller sayisi}}$$

Örnek

- Bir paranın üç kez atılması deneyinde bir kez tura gelmesi,en az iki yazı gelmesi ve hiç tura gelmemesi olasılıklarını bulalım:

Deneyimiz için tüm olabilecek haller, {YYY,YYT,YTY,TYY,YTT,TYT,TTY,TTT} olduğundan n=8 dir.

1) Bir kez tura gelebilecek haller {YYT,YTY,TYY} olduğundan a=3dür. O halde P(E)=3/8
2) Enaz iki yazı gelebilecek haller {YYT,YTY,TYY,YYY} olduğundan a=4dür. O halde P(E)=4/8=0.5
3) Hiç tura gelmiyecek haller {YYY} olduğundan a=1dir. O halde P(E)=1/8

....

- Bir olay için elverişli durumlar a elverişsiz durumlar b ile gösterilirse n=a+b yazılabilir.

- Elverişsiz halin ortaya çıkması olasılığı ise

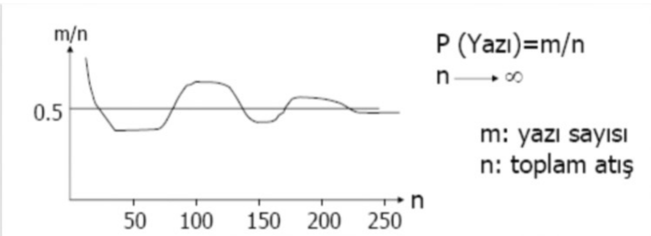
$$P(\overline{E})=\frac{b}{n}=\frac{n-a}{n}=1-\frac{a}{n}=1-P(E)$$

örneğin; yukarıdaki deneymiz için üç kez yazı gelmemesi olasılığı P(~E)=1-P(E)=1-1/8=7/8 dir.

BAĞIL (NİSBİ) FREKANS OLARAK OLASILIK

Bağıl (Nisbi) frekanslar için bir olayın meydana gelme olasılığı geçmişte benzer olayın tekrarlanma sayısının toplam gözlem sayısına oranlanması şeklinde bulunabilir.

örneğin; bir paranın ard arda 250 kez atılması deneyi için yazı gelme olaylarının nisbi frekansını bulalım:



OLASILIK HASAPLAMALARI İÇİN TEMEL KURALLAR

- ***<u>OLASILIKLARIN TOPLANMASI:</u>*** Eğer bileşik bir olayın ortaya çıkma olasılığını arıyorsak bu olayların ayrı ayrı gerçekleşme olasılığını bulup toplarız. Fakat buradaki olayların aynı anda gerçekleşmesi mümkün değildir. Yani olayın birinin olması diğerinin olmasını engellemektedir. P(AB)=0

⟶ Örneğin A veya B olayının meydana gelmesi olasılığı

P(A veya B)=P(A)+P(B)

Örnek

İki zarın aynı anda bir kez atılması deneyinde zarların üzerindeki rakamların toplamının 7 ya da 10 olması olasılığını bulunuz?

İki zar aynı anda atıldığında olabilecek tüm haller ise; {(1-1),(1-2),.....,(6-5),(6-6)} olduğundan n=36dır.

Gelen sayıların toplamının 7 olması durumu {(1-6),(6-1),(2-5),(5-2),(3-4),(4-3)} olduğundan a=6 ve toplamın 10 olması durumu {(4-6),(6-4),(5-5)} olduğundan a*=3 dür. O halde P(top. 7 veya 10)=6/36+3/36=0.25

……

- Eğer bir deney için A,B ve C olaylarının olması birbirlerini engellemiyorlar ise bu A ve B olaylarının olasılığı P(AB)=hem A hem de B olayının aynı anda olması olasılığı olmak üzere

P(A ve B)=P(A)+P(B)-P(AB)

- A veya B veya C olayının olması olasılığı

P(A veya B veya C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)

örneğin;

- 52 kartlık bir desteden rasgele bir kart çekildiğinde bu kartın
  - ** birli **ve** karo olması olasılığı
  - ** birli **veya** karo olması olasılığı

A=birli olması olasılığı

B= karo olması olasılığı

*** P(AB)=1/52

*** P(A veya B)=4/52+13/52-1/52=4/13

Örnek

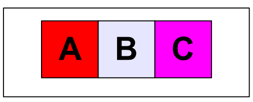
- 200 turist ile yapılan anket sonucunda 120 kişinin A şehrine, 100 kişinin E şehrine, 60 kişinin ise her iki yeri de ziyaret ettiği anlaşılmıştır. Buna göre seçilen bir turistin A veya E şehrini ziyaret etme olasılığ nedir?

P(A veya E)=P(A)+P(E)-P(AE)

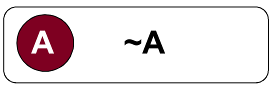
=120/200+100/200-60/200=0.8

KÜME TEORİSİ VE OLASILIK TOPLANMASI

- J. Venn yaptığı bir deneyin sonuçlarını daha rahat grafikleyebilmek amacıyla çeşitli geometrik şekiller kullanarak bu sonuçları diyagram haline getirdi. Bu diyagramlara venn diyagramları denmektedir. Buna göre A,B,C birbirini engelleyen olaylar ise;

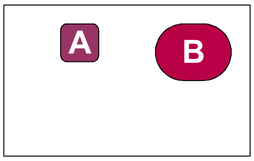


P(A)+P(B)+P(C)=1



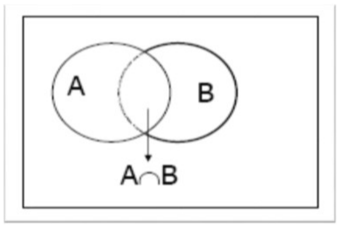
P(A)+P(~A)=1

………



~(A veya B) P(A veya B)=P(A)+P(B)

P(A veya B)=P(A)+P(B)-P(AB)



- ***OLASILIKLARIN ÇARPILMASI:*** Eğer bir A olayının olması B olayının olmasına bağlı ise, yani A olayı Bolayından sonra gerçekleşiyor ise buna koşullu olasılık (conditional probabilility) denir. Bir A olayının koşullu olasılığı P(A\B) ile gösterilir. Bu ifade bize B olayı gerçekleştiği taktirde A olayının olması olasılığını verir.

P(A\B)=P(AB) / P(B)

- Eğer A ve B olayları birbirine bağlı ise hem A hem de B olayının aynı anda olması olasılığı

P(AB)=P(A)P(B\A) ya da P(AB)=P(B)P(A\B)

Örnek

Bir kutuda 3 tanesi bozuk olmak üzere toplam 10 tane film vardır. Bu kutudan sırasıyla birer tane olmak üzere toplam 2 film çekersek bu iki filminde bozuk olması olasılığı nedir?

A: birinci filmin bozuk çıkması olayı

B: ikinci filmin bozuk çıkması olayı

P(A ve B)=P(A)P(B\A)

=(3/10)(2/9)=1/15=0.0667

- Eğer A ve B olaylarından birinin olması diğerini etkilemiyor yani bu olaylar bağımsız ise ikisinin de aynı anda ortaya çıkması olasılığı
  P(AB)=P(A)P(B)
- **ÖRNEĞİN**; bir paranın ard arda iki kez atılması deneyini inceliyelim. A=ilk atışta tura gelmesi olayı ve B=ikinci atışta tura gelmesi olasılığı olmak üzere A ve B olayları bağımsız olaylar mıdır? Yani P(AB)=P(A)P(B) sağlanır mı?

  Tüm durum {TT,TY,YT,YY} ve A={TT,TY} ve B={TT,YT} olduğundan P(AB)=1/4, P(A)=2/4, P(B)=2/4 olup buradan eşitlik sağlandığı için A ve B nin bağımsız olduklarını söyleyebiliriz.

BAYES KURALI

- Bir olayın oluşmasında birden fazla bağımsız neden etkili ise bu nedenlerden herhangi birinin o olayı oluşturmuş olması ihtimalini bulmaya yarayan bir tekniktir. En genel haliyle şu şekilde ifade edilebilir:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+\ldots+P(A_n)P(B|A_n)}$$

ÖDEV

- Birbirlerine bağlı olan A,B ve C olaylarının aynı anda olması olasılığını nasıl hesaplayacağımızı gösteriniz.