

BASİT FAİZ UYGULAMALARI

- Bileşik faizde K_0 ile ilk sermaye, K_n ile n yılının sonunda, ilk sermaye ile 0 yılın sonuna kadar biriktirilmiş bileşik faizlerin toplamı gösterilir.

$$K_1 = K_0 + K_0 f = K_0 (1+f) = K_0 (1+f)^1$$

$$K_2 = K_1 + K_1 f = K_1 (1+f) = K_0 (1+f)^2$$

$$K_3 = K_1 + K_2 f = K_2 (1+f) = K_0 (1+f)^3$$

.....

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} f = K_{n-1} (1+f) = K_0 \underbrace{(1+f)^n}_q$$

$$K_n = K_0 q^n$$

Bir sermayeyi belli bir zamandan ilerideki bir zamana götürmeye yarar.

$$K_0 = K_n 1/q^n$$

Bir sermayeyi ileriki bir zamandan önceki bir zamana getirmeye yarar.

Bileşik Faiz Uygulaması

Örnek: Bir bankaya %25 faiz oranı ile 3 yıl için yatırılan 50.000 TL sermayenin, üçüncü yıl sonunda ulaşacağı değeri hesaplayınız?

Üç yıl sonra paranın faizi ile birlikte ulaşacağı toplam tutar (gelecek değer):

$$K_n = K_0 \cdot q^n = 50.000 \times (1+0,25)^3 = 50.000 \times 1,9531 = 97.711 \text{ TL}$$

Örnek: 4 yıl sonra 85.000 TL elde edebilmek için, %20 yıllık faiz oranı ile bileşik faize bugün yatırılması gereken para tutarı ne olur? (Bugünkü değer)

$$K_0 = K_n \cdot 1/q^n = 85.000 \times (1/1+0,20)^4 = 85.000/0,4823 = 176.238 \text{ TL olur.}$$

Gerek gelecek değer, gerekse bugünkü değer hesaplarında, $(1+f)^n = q^n$ veya $1/(1+f)^n = 1/q^n$ olarak yazılan ve bileşik faiz emsali olarak tanımlanan terimler için hazır çizelgelerden ya da üs alabilen hesap makinelerden çok kolay biçimde yararlanılabilir.

ÖRNEK 1:

10.000 TL'lik bir borç, faiz oranı %10 olduğuna göre, 5 yıl sonra faiziyle birlikte kaç liraya ulaşır?

$$K_n = K_0 q^n = 10.000 \times (1+0,10)^5 = 10.000 \times 1,6105 = 16.105 \text{ TL}$$

ÖRNEK 2:

Bir kavaklığın 10 yıl sonraki satışından 15.000 TL elde edilecektir. $f=5\%$ ise bu miktar şimdiki kaç TL'nin karşılığıdır?

$$K_0 = K_n 1/q^n = 15.000 \times 1/(1+0,05)^{10} = 15.000 \times 0,6139 = 9.208,5 \text{ TL}$$

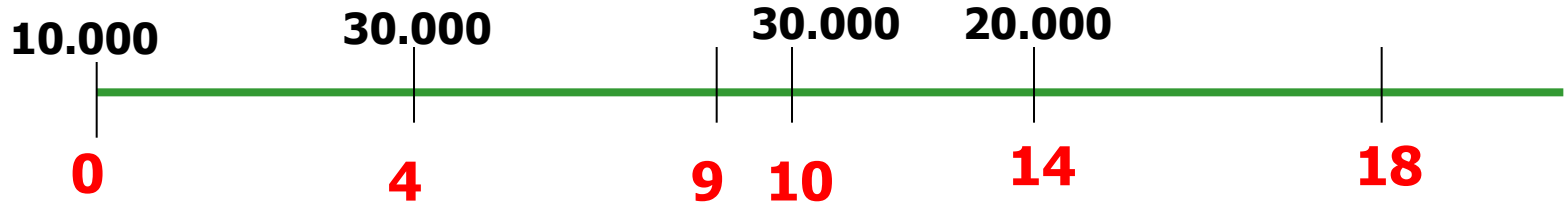
ÖRNEK 3:

Bir kavaklıktan 12 yıl sonra yapılacak kesimde sağlanılacak ağaçlara pazar değeri olarak 40.000 TL değer biçiliyor. $f=6\%$ ise bu kavaklığın bugünkü değeri nedir?

$$K_0 = K_n 1/q^n = 40.000 \times 1/(1+0,06)^{12} = 40.000 \times 0,4969 = 19.876 \text{ TL}$$

ÖRNEK 4:

f:%6 olduğunda 0, 9, 14 ve 18 yıllar için toplam değerleri belirleyelim.



a. Sıfır yılında toplam

$$K_0 = 10.000 \frac{1}{q^0} + 30.000 \frac{1}{q^4} + 30.000 \frac{1}{q^{10}} + 20.000 \frac{1}{q^{14}}$$

$$K_0 = 10.000 + 30.000 \times 0,7921 + 30.000 \times 0,5584 + 20.000 \times 0,4423$$

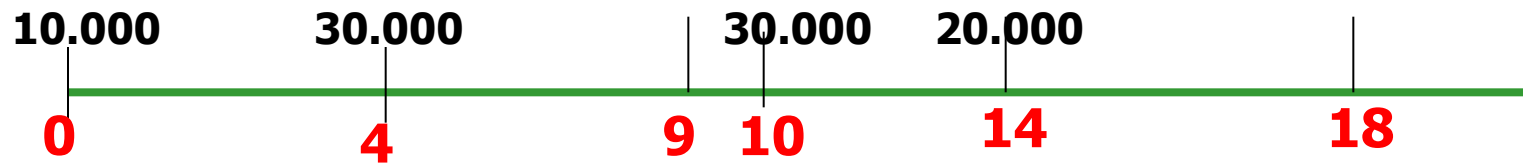
$$K_0 = 10.000 + 23.763 + 16.752 + 8.846 = 59.361 \text{ TL}$$

b. 9. yılda toplam

$$K_9 = 10.000 q^9 + 30.000 q^5 + 30.000 \frac{1}{q} + 20.000 \frac{1}{q^5}$$

$$K_9 = 10.000 \times 1,6895 + 30.000 \times 1,3382 + 30.000 \times 0,9434 + 20.000 \times 0,7472$$

$$K_9 = 16.895 + 40.146 + 28.302 + 14.944 = 100.287 \text{ TL}$$



c. 14. yilda toplam

$$K_{14} = 10.000 q^{14} + 30.000 q^{10} + 30.000 q^4 + 20.000 q^0$$

$$K_{14} = 10.000 \times 2,2609 + 30.000 \times 1,7908 + 30.000 \times 1,2625 + 20.000$$

$$K_{14} = 134.208 \text{ YTL}$$

d. 18. yilda toplam

$$K_{18} = 10.000 q^{18} + 30.000 q^{14} + 30.000 q^8 + 20.000 q^4$$

$$K_{18} = 10.000 \times 2,8543 + 30.000 \times 2,2609 + 30.000 \times 1,5938 + 20.000 \times 1,2625$$

$$K_{18} = 169.434 \text{ YTL}$$

Senelik Gelirlerin Kapitalizasyonu

Birçok yıl için, her yıl sonunda elde edilen gelire "senelik" denir. Burada her yıl sonunda daima eşit miktarda elde edilen gelirler dikkate alınmaktadır. Daha fazla işlem yapmamak için her yıl aynı miktarda elde edilen gelirler kapitalize edilir. Böylece hem işlem kısıtlılığı ve doğruluğu, hem de zaman kazanımı sağlanacaktır.

Her yıl elde edilen gelirler eşit ve sona biriktirilmek isteniyorsa;

$S_n = S \frac{q^n - 1}{f}$ formülü kullanılır (Senelikleri sona biriktirme).

Her yıl elde edilen gelirler eşit ve ilke biriktirilmek isteniyorsa;

$S_0 = S \frac{q^n - 1}{fq^n}$ formülü kullanılır (Senelikleri ilke biriktirme).

Bu formülde yıl sayısını gösteren (n) sonsuz olacak olursa, yani S senelik geliri, sabit olarak sonsuz yıl için elde ediliyorsa;

$$S_0 = S \frac{q^\infty - 1}{fq^\infty} \quad \frac{q^\infty - 1}{q^\infty} = 1$$

$$S_0 = \frac{S}{f}$$

olacaktır. Elde edilen bu formül, ileriki yıllarda elde edilecek "senelik sabit gelirlerin kapitalizasyonu formülü" dür.

Bu formül, her yıl s geliri veren bir kapitalin, f faiz oranına göre değerini biçmeye yarar.

ÖRNEK 1:

10 yıllığına kiralanan bir arazi için her yıl sonunda 1.000 TL kira ödeniyor. Ancak her yıl sonunda kira ödemek yerine, 10. yıl sonunda bütün kiralara toptan ödenmesi isteniyorsa, ne kadar ödenmesi gerekir? ($f = \% 5$)

$$S_n = S \frac{q^n - 1}{f}$$

$$S_n = 1.000 \frac{(1 + 0,05)^{10} - 1}{0,05} = 1.000 \cdot (12,5779) = 12.577,90 \text{ TL}$$

ÖRNEK 2:

Bir çiftçi binalarının yangın sigortası için sigorta şirketine her yıl prim olarak 5.000 TL vermektedir. Sigorta başlama tarihinden 15 yıl sonra bir yangınla bina yanıyor ve sigorta şirketi çiftçiye 150.000 TL ödüyor.

Çiftçi için; 15 yılda sigorta şirketine ödediği primleri %5 ile bankaya yatırması mı, yoksa sigorta yaptırması mı daha kazançlı olmuştur?

$$s_n = 5.000 \frac{(1 + 0,05)^{15} - 1}{0,05} = 5.000 \times 21,5786 = 107.893 \text{ TL}$$

Sigorta yaptırması daha kazançlı olmuştur.

$S_n = 150.000 - 107.893 = 42.107$ TL daha fazla para oluşmuştur.

ÖRNEK 3:

10 yıllığına kiralanan bir araziye kira olarak her yıl sonunda 1.000 TL ödeniyor. Eğer tüm kiraları ilk yılın başında ödemek yerine, bütün kiralar toptan olarak ilk yılın başında peşin ödenseydi ne kadar ödenirdi? (f= %6)

$$S_0 = S \frac{q^n - 1}{fq^n}$$

$$S_0 = 1.000 \times 1,06^{10} - 1 / 0,06 \times 1,06^{10} = 7.360 \text{ TL}$$

ÖRNEK 4:

Bir dekar elma bahçesinin tesisi için yapılan giderler 1. yılda 2.000 TL, 2. yılda 1.200 TL ve 3. yılda 800 TL dir. Bahçenin ekonomik ömrü 40 yıl ve faiz oranı %5 ise bir dekar elmaliğin her yılına tesisten dolayı yüklenecek masraf nedir?



$$K_n = K_0 q^n$$

Bu formülle tesis masrafları 40. yılın sonuna götürülerek toplanır ve daha sonra tesis giderlerinin her yıl üzerine yüklenen miktarı bulunur.

$$S_n = S \frac{q^n - 1}{f}$$

$$S = S_n f / q^n - 1$$

$$K_{40} = 2000 (1+0,05)^{39} + 1200 (1+0,05)^{38} + 800 (1+0,05)^{37}$$

$$K_{40} = 2000 \times 6,7048 + 1200 \times 6,3855 + 800 \times 6,0814 = 25.937 = 25.937 \text{ TL}$$

$$S = 25.937 \times 0,05 / (1,05)^{40} - 1 = 215 \text{ TL}$$

Bu soruyu 2. bir yolla da çözebiliriz.

$$K_0 = K_n \frac{1}{q^n}$$

formülüyle sıfır anına getiririz ve burada topladıktan sonra;

$$S_0 = S \frac{q^n - 1}{fq^n}$$

formülünden elde edilen

$$S = S_0 \frac{f \cdot q^n}{q^n - 1}$$

formülüyle tesis giderlerinin her yıl üzerine yüklenecek miktarı bulabiliriz.



Periyodik Gelirlerin Kapitalizasyonu

Her (n) yıl sonunda sağlanan gelire “**periyodik gelir**” denir. Burada her n yıl sonunda, daima eşit miktarda sağlanan sabit periyodik gelir anlaşılmalıdır.

Periyodik gelirleri sona biriktirme formülü;

$$P_{nt} = P \frac{q^{nt} - 1}{q^n - 1} \quad \text{formülü kullanılır}$$

Periyodik gelirleri ilke biriktirilmek isteniyorsa;

$$P_0 = P \frac{q^{nt} - 1}{(q^n - 1)(q^{nt})} \quad \text{formülü kullanılır. Bu formülde } t = \infty \text{ olacak olursa,}$$

$$P_0 = P \frac{1}{(q^n - 1)} \quad \text{formülü yazılır. Bu ise, “**periyodik sabit gelirlerin kapitalizasyonu**” formülüdür. Yani, her n yıl sonundaki periyodik geliri P olan bir kapitalin (Örneğin bir meyvelerin) kapitalizasyon oranı f olduğuna göre, analitik yöntemle göre değerini biçmeye yarar.$$

ÖRNEK 1:

1.000 TL'lik bir gelir 7 yıl ara ile 8 kez tekrarlanmaktadır. Kapitalizasyon oranı %5 olduğuna göre, bu periyodik gelirin 8. periyodun sonunda değeri kaç TL olur?

$$P_{56} = 1.000 \frac{(1 + 0,05)^{56} - 1}{(1 + 0,05)^7 - 1}$$

$$P_{56} = 35.292,06 \text{ TL}$$

$$P_{nt} = P \frac{q^{nt} - 1}{q^n - 1}$$