

# Risk ve Belirsizlik Altında Karar Verme

## Bölüm 2 Karar Ağaçları

### KONU 6

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

### Karar Ağacı

**Karar Ağacı:** Karar alternatiflerinin düğümler halinde ve kendilerine ait olasılık değerleri belirtilerek ifade edildiği bir şekildir.

Düğümlere ilişkin hesaplanan beklenen değerler şekile işlenir.

Karar ağacında olaylar sırasıyla ele alınmaktadır.

Karar ağacı kollarındaki en iyi seçeneğin düğüm bazında belirlenebilmesi için olasılık değerleri kullanılarak hesaplanan "*Beklenen Değerler*" arasında karşılaştırma yapılmalıdır.

$$EV (\text{Düğüm 2}) : 50.000.(0,6) + 30.000.(0,4) = 41.000 \$$$

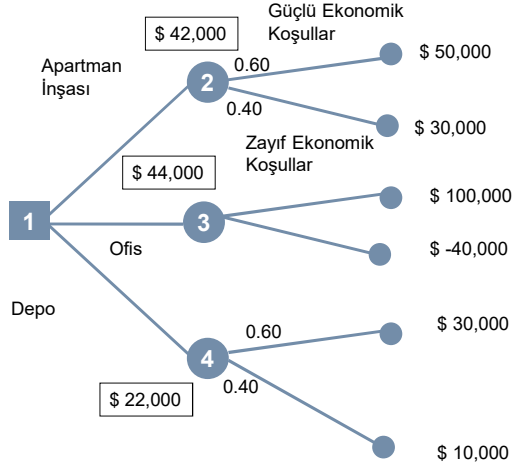
$$EV (\text{Düğüm 3}) : 100.000.(0,6) + (-40.000).(0,4) = \mathbf{44.000 \$}$$

$$EV (\text{Düğüm 4}) : 30.000.(0,6) + 10.000.(0,4) = 22.000 \$$$

2

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

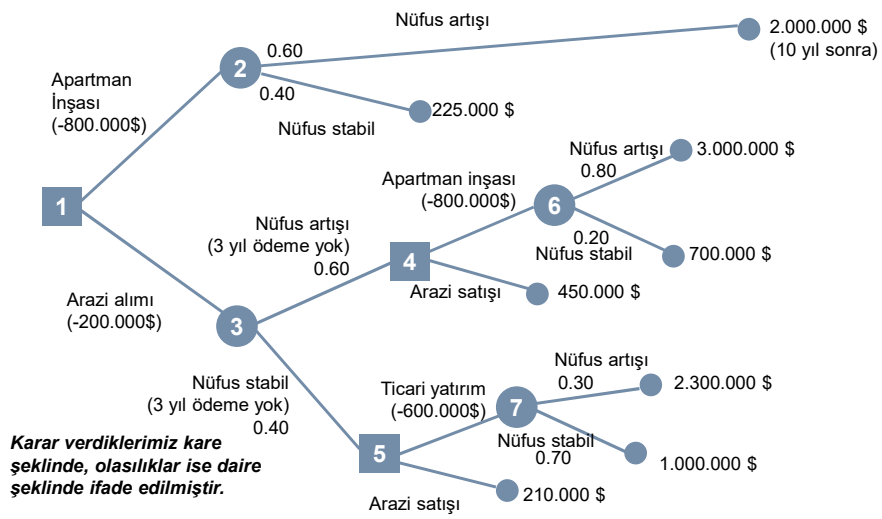
## Sıralı Yapıda Bir Karar Ağacı Örnek - 1



3

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Sıralı Yapıda Bir Karar Ağacı Örnek - 2



4

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## **Sıralı Yapıda Bir Karar Ağacı (*Beklenen Değerler*) Örnek - 2**

Sıralı karar ağacı analizi yapabilmek için ağacın en son unsurundan en başa doğru bir değerlendirme yapılmaktadır.

Bu kapsamda; beklenen değerler, incelenen karar aşamasındaki olasılık değerleri ile işlemin sonucunda ulaşılabilecek olan ödeme değerleri ile ağırlıklandırılarak toplanır.

Diğer bir ifadeyle, olasılık değerleri bizim ağırlık oranlarımız olacaktır.

$$EV (\text{düğüm 6}) = 0.8 \times (3.000.000\$) + 0.2 \times (700.000 \$) = 2.540.000 \$$$

$$EV (\text{düğüm 7}) = 0.3 \times (2.300.000\$) + 0.7 \times (1.000.000 \$) = 1.390.000 \$$$

*Beklenen değer rakamları düğümlerin üzerinde yazılmaktadır.*

5

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## **Sıralı Yapıda Bir Karar Ağacı (*Beklenen Değerler*) Örnek - 2**

Ancak, düğüm 4 ve 5'te durum biraz farklıdır. Bu aşamalarda olasılıksal bir durum mevcut değildir (*nüfusun artması veya stabil olması*), yani beklenen değer hesabımızı düğümde söz konusu olan alternatiflere göre yapmamız gerekmektedir.

Örneğin; 4 nolu düğümün beklenen değeri için; EV (6) değeri olan 2.540.000 \$'dan apartman inşasının masrafları düşülür ve geriye kalan 1.740.000 \$ artık EV (4) olmaktadır.

4 ncü düğüm için diğer bir beklenen değer olan arsanın satışından doğabilecek olan 450.000 \$'lık bedeldir.

6

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

### **Sıralı Yapıda Bir Karar Ağacı (Beklenen Değerler) Örnek - 2**

Ancak rasyonel karar alabilmemiz için mevcut alternatifler arasında beklenen değeri yüksek olan seçenek seçilmelidir. Buradan hareketle, 4 ncü düğümün EV (4) değeri 1.740.000 \$ olacaktır.

Diğer yandan, 5 nolu düğümün beklenen değeri için; EV (7) değeri olan 1.390.000 \$'dan ticari masrafları düşülür ve geriye kalan 790.000 \$ artık EV (5) olmaktadır.

Benzer şekilde, 5 nci düğüm için diğer bir beklenen değer olan arsanın satışından doğabilecek olan 210.000 \$'lık bedeldir. Ancak yine rasyonelite gereği 5 nci düğümün EV (5) değeri 1.390.000 \$ olarak seçilmelidir.

7

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

### **Sıralı Yapıda Bir Karar Ağacı (Beklenen Değerler) Örnek - 2**

Son olarak, 2 ve 3 nolu düğümlerin beklenen değerleri hesaplanır.

$$\begin{aligned} \text{EV (düğüm 2)} &= 0.6 \times (2.000.000 \$) + 0.4 \times (225.000 \$) = 1.290.000 \$ \\ \text{EV (düğüm 3)} &= 0.4 \times (1.740.000 \$) + 0.6 \times (790.000 \$) = 1.360.000 \$ \end{aligned}$$

Buradan hareketle ilk düğüm olan 1 nci aşama için beklenen değer hesabına geçilir.

Maliyetlerden arındırılmış olarak en yüksek beklenen değere sahip olan seçenek tercih edilmelidir.

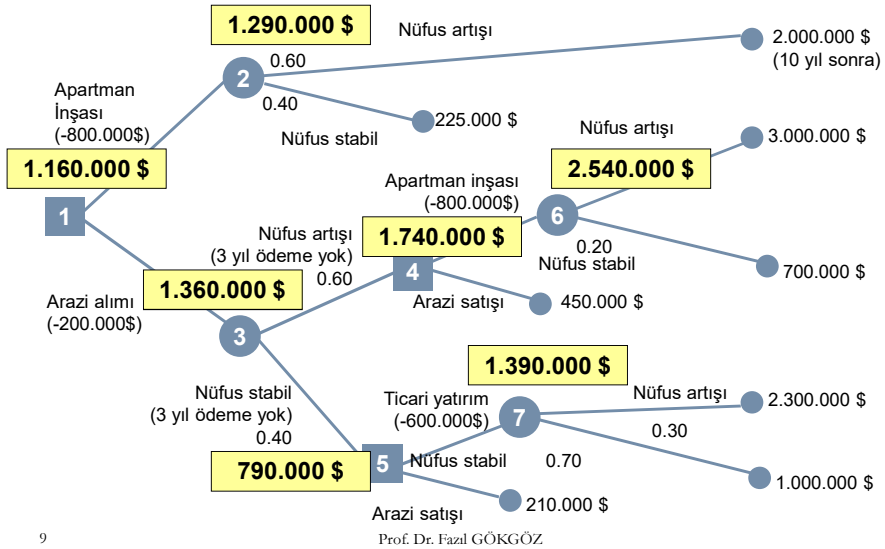
$$\begin{aligned} \text{Apartman inşası} &: 1.290.000 \$ - 800.000 \$ = 490.000 \$ \\ \text{Arsa alımı} &: 1.360.000 \$ - 200.000 \$ = \mathbf{1.160.000 \$} \end{aligned}$$

*En yüksek beklenen net ödeme değerine sahip seçenek arsadır.*

8

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Sıralı Yapıda Bir Karar Ağacı (Beklenen Değerler) Örnek - 2



## Karar Ağacı Analizinde “Bayesian” Yaklaşımı

Konuya teorik olarak bakabilmek için **Bayesian kuramının** temelini anlamak gerekir. Bayesian olasılık kuramı matematiksel istatistik kuramının bir dalı olarak ifade edilir.

Bu kuram belirsizlik taşıyan herhangi bir durumun modelini oluşturmak, bu durumla ilgili gerçekçi gözlemleri kullanarak sonuçlar üretmek amacıyla kullanılmaktadır.

Olasılık kuramında en önemli kavramlardan biri “koşullu olasılık” tır.

Bu tahminleri **koşullu olasılık** değerlerine bağlı olarak gerçekleştirmektedir (*Koşullu olasılık: belirli bir olayın, başka bir olaya bağlı olarak gerçekleşmesine ilişki olasılık değeridir*).

## Karar Ağacı Analizinde “Bayesian” Yaklaşımı

$P(X=x|Y=y)=r$  koşullu olasılığının ifadesi şöyledir: “Y=y” nin doğru olması durumunda “X=x” olma olasılığı “r”dir.

X ve Y'nin alabileceği değerlerin kombinasyonları için koşullu olasılıkları belirleyen tabloya koşullu olasılık dağılımı denilir.

Bu durum,  $p(X|Y)$  şeklinde ifade edilmekle birlikte, koşullu olasılık “çarpım kuralını” belirlemede önem arzeder.

Çarpım kuralı iki olayın birden oluşma olasılığını tanımlar ve  $p(A \cap B)$  ile ifade edilir.

Bu durumda  $p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B) = p(B|A) \cdot p(A)$  olur.

11

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Karar Ağacı Analizinde “Bayesian” Yaklaşımı

Eşitliğin yeniden düzenlenmesi ile “*Bayes Kuramı*” elde edilir.

$$P(A|B) = P(B|A) P(A) / P(B)$$

Burada:

A : Belirsizlik Taşıyan Önerme

B : Kanıt

$P(A|B)$  : A'nın B kanıtından sonraki olasılığı (*Posteriror*)

$P(A)$  : A'nın B kanıtından önceki olasılığı (*Prior*)

$P(B|A)$  : B kanıtının A olayının gerçekleşmesi için oluşma olasılığı (*Likelihood*)

Ayrıca  $1/ P(B)$ , normalizasyon etmeni olup hesaba katılmayabilmektedir.

12

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Karar Ağacı Analizinde “Bayesian” Yaklaşımı

Bayesian istatistikte sık kullanılan terimleri özetlersek;

**a) Önsel olasılık veya dağılım (prior):** Herhangi bir gözlem yapmadan önce modelin gerçek olma olasılığıdır. Bu amaçla objektif veriler de subjektif görüşler de kullanılabilir.

**b) Sonsal olasılık veya dağılım (posterior):** Gözlemler dikkate alındığında modelin gerçek olma olasılığı olabilirlik (likelihood) belli bir modeldeki verilerin koşullu olasılık durumudur. Buna bayes faktörü adı da verilmektedir.

Sonuç olarak, Bayesian ve klasik istatistik kuramları arasındaki en önemli fark olasılıkların değerlendirilmesinde yatmaktadır.

13

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Karar Ağacı Analizinde “Bayesian” Yaklaşımı

Daha önceki yansılarımızda, **mükemmel bilgilendirmenin beklenen değeri** kavramı üzerinde durulmuştur.

Mükemmel bilginin varlığı söz konusu olduğunda; **karar vericinin daha iyi kararlar verebileceği** ifade edilebilir.

Ancak, geleceğe yönelik olarak mükemmel bilginin varlığı **nadiren gözlemlenen bir unsur** olduğundan, kararlarımızı almada rasyoneliteyi arttıracak olan ilave bilgilere ihtiyaç duyulmaktadır:

Bu bölümde, söz konusu ilave bilginin karar analizlerimizde önemli bir istatistiksel yaklaşım olan “Bayesian” yaklaşımı bağlamında inceleyeceğiz.

Gayrimenkul örneğimiz üzerinden bu yaklaşım irdelenecektir.

14

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Karar Ağacı Analizinde “Bayesian” Yaklaşımı

Gayrimenkul örneğimizdeki bilgilere ilaveten, karar vericinin profesyonel bir **ekonomik analist** çalıştıracağını düşünelim.

Buradaki temel amaç, **gelecekteki olası ekonomik koşullara dair ilave bilginin teminidir**.

Buradaki analist, düzenli olarak **piyasayı ve ekonomik konjonktürü** incelemekte, karar verici durumundaki yatırımcının satın almayı düşündüğü yatırım araçlarının sonuçlarını tartışmaktadır.

Ekonomik analist burada potansiyel olarak **“iyi ekonomik koşullar”** ve **“kötü ekonomik koşullar”** bağlamında değerlendirme raporu hazırlamaktadır.

15

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Karar Ağacı Analizinde “Bayesian” Yaklaşımı

Ekonomik analist geçmiş verilerden yola çıkarak gelecekte karşılaşılabilecek olası ekonomik durumlar hakkında tahminlerde bulunmaktadır.

Temel kuramlardan hareketle problemimize geri dönecek olursak; koşullu olasılıklara ilişkin olarak aşağıdaki notasyonu yapmak mümkündür.

*g : iyi ekonomi*

*P : kötü ekonomi*

*P : olumlu ekonomik rapor*

*N : olumsuz ekonomik rapor*

16

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ



## Karar Ağacı Analizinde “Bayesian” Yaklaşımı

Olası durumlara yönelik koşullu olasılık değerlerimiz;

$$P(P/g) : 0.80$$

$$P(N/g) : 0.20$$

$$P(P/p) : 0.10$$

$$P(N/p) : 0.90$$

Örneğin, gelecekteki olayın iyi olması (g) ve bunun raporda olumlu (P) olarak yazılmış olması halindeki olasılık değeri  $P(P/g) : 0.80$ 'dir.

Koşullu olasılık değerlerinin bilinmesi halinde, önsel olasılık (*prior*) değerleri, sonsal olasılık (*posterior*) değerlerine dönüştürülebilir.

Şöyle ki;  $P(P/g)$  ekonomik raporun olumlu olması ve buna bağlı olarak ekonomik koşulların da iyi olma olasılığıyken,  $P(g/P)$  ise; ilave bilgi niteliğindeki raporun olumlu olmasının ekonomik koşulların iyi olması için oluşma olasılığıdır.

17

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Karar Ağacı Analizinde “Bayesian” Yaklaşımı

Önsel (prior) olasılıklarımız;

$$P(g) : 0.60 \text{ (rapor mevcut değilken ekonominin iyi olma olasılığı)}$$

$$P(p) : 0.40 \text{ (rapor mevcut değilken ekonominin kötü olma olasılığı)}$$

Koşullu olasılık değerlerimiz de belirli olduğundan dolayı, buradan hareketle sonsal (posterior) olasılık değerleri hesaplanabilir.

$$P(g/P) = \frac{P(P/g).P(g)}{P(P/g).P(g) + P(P/p).P(p)}$$

18

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Karar Ağacı Analizinde "Bayesian" Yaklaşımı

$$P(g/P) = \frac{(0.8).(0.6)}{[(0.8).(0.6) + (0.1).(0.4)]}$$

$$P(g/P) = 0.923$$

Buradan, ekonomik koşulların iyi olmasına yönelik önceki olasılığının %60 olduğu, analistin hazırladığı olumlu rapordan edinilen ilave bilgi çerçevesinde önceki olasılık değerinin %96.23 olarak revize edilebileceği ifade edilebilir.

Geriye kalan revize edilek önceki olasılıklar (sonsal olasılıklar) ise;

$$P(g/N) = 0.250$$

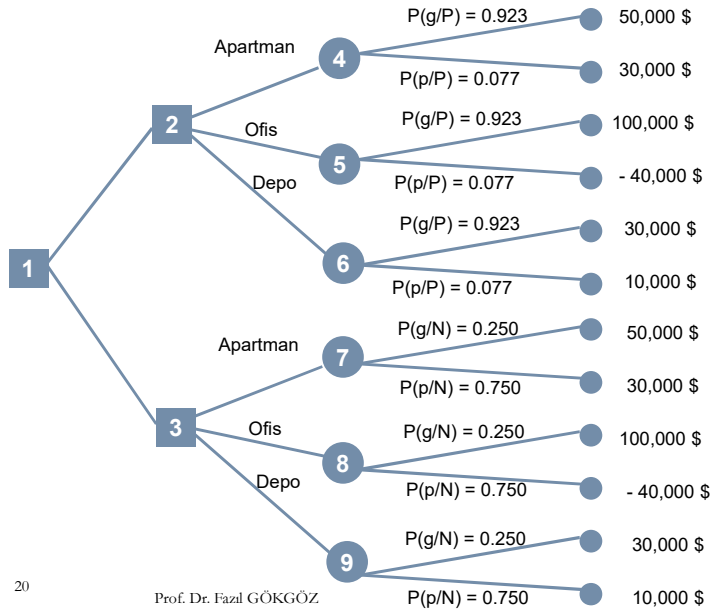
$$P(p/P) = 0.077$$

$$P(p/N) = 0.750$$

19

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Gayrimenkul Probleminin "Bayesian" Çözümü



20

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Karar Ağacı Analizinde “Bayesian” Yaklaşımı

P(P) ve P(N) **marjinal olasılıklar** olarak ifade edilmektedir.

Bu olasılıkları karar ağacı analizine yönlendirdiğimizde

Sondan başa doğru (sağdan sola) analiz yaptığımız takdirde, 4 nolu düğüm için beklenen değerler

$$EV (\text{Apartman}) = 50.000 \$ \times (0.923) + 30.000 \$ \times (0.077)$$

$$EV (\text{Apartman}) = 48,460 \$$$

Benzer şekilde düğüm 5,6,7,8,9 için de aynı hesaplamalar yapılarak düğüm aşamalarına ilişki beklenen değerler tespit edilir.

Beklenen değeri en yüksek olan seçeneğin değeri tercih edilir.

21

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Karar Ağacı Analizinde “Bayesian” Yaklaşımı

Son olarak, raporun olumlu P(P) veya olumsuz olma P(N) olasılıkları aşağıdaki mantık çerçevesinde hesaplanabilir.

İki bağımlı olay A ve B'nin ikisindeinde olma olasılığı;

$$P(AB) = P(A/B).P(B)$$

ise, buradan hareketle olumlu ve olumsuz rapor olasılıkları aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$P(P) = P(P/g) + P(P/p)$$

$$P(P) = P(P/g).P(g) + P(P/p).P(p)$$

$$P(P) = (0.8).(0.6) + (0.1).(0.4) = 0.52$$

$$P(N) = P(N/g).P(g) + P(N/p).P(p)$$

$$P(N) = (0.2).(0.6) + (0.9).(0.4) = 0.48$$

22

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Karar Ağacı Analizinde “Bayesian” Yaklaşımı

Buradan hareketle, 2 ve 3 nolu düğümlerdeki beklenen değerler sırasıyla 89,220 \$ ve 35,000 \$ olarak bulunur.

Marjinal olasılıklar dikkate alındığında temel yatırım stratejisinin beklenen değeri ;

$$EV(\text{strateji}) = 89,220 \$ \times (0,52) + 35,000 \$ (0,48)$$

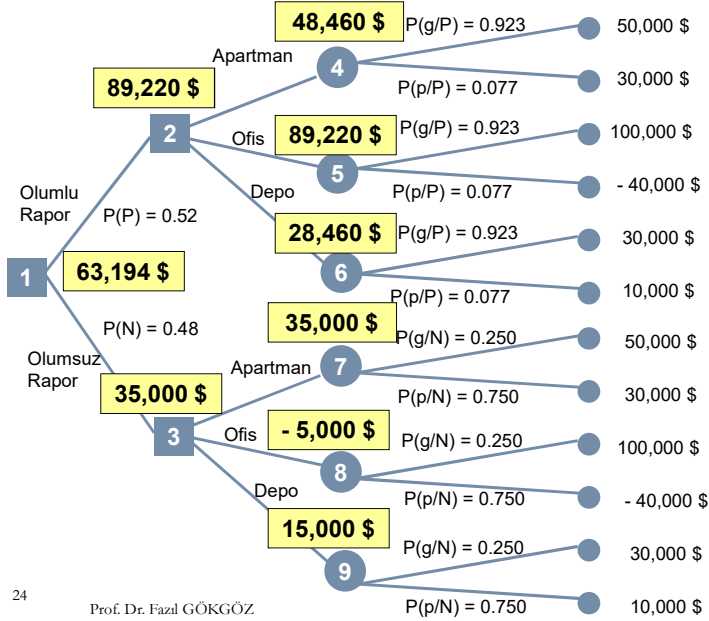
$$EV(\text{strateji}) = 63,194 \$$$

Söz konusu beklenen değerler ekonomist tarafından sağlanan ilave bilgilere göre revize edilmiş olur. Böylece, tüm ilave bilgiler değerlendirilmiş ve strateji kararına yardımcı olmuştur.

23

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Gayrimenkul Probleminin “Bayesian” Çözümü



## Ödev – 6 Birinci Bölüm

Bir çiftçi, üç farklı ziraat ürününden hangisini ekeceğine karar vermek istemektedir. Ödeme tablosu aşağıda sunulmakta olup, tüm karar kriterlerine [Maximax, Maximin, Minimax-pişmanlık, Hurwics ( $\alpha = 0.3$ ), Eşit Olasılık] göre her karar tercihi için rasyonel olan seçenekleri ayrı ayrı belirleyiniz. Gerekli işlem ve açıklamaları da yapınız.

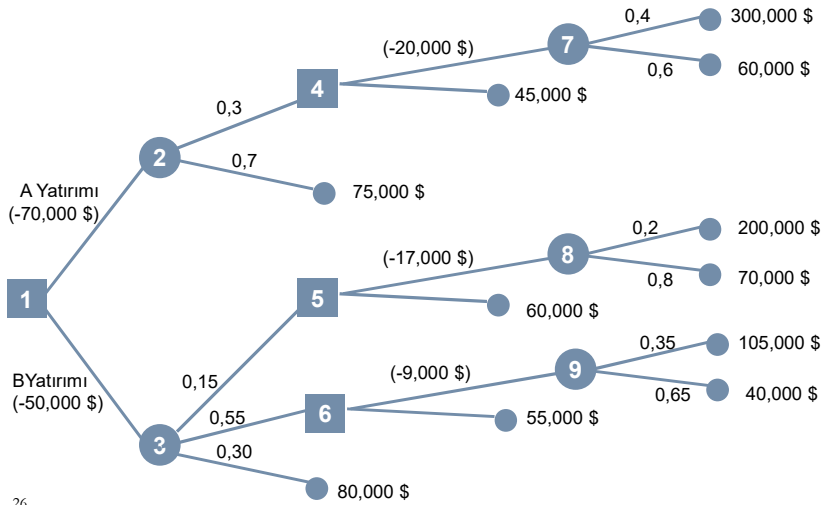
Karar (Ekilecek Ürün)	Olası Durumlar (Ödeme \$)	
	Güçlü Ekonomik Koşullar	Zayıf Ekonomik Koşullar
Mısır	35,000	8,000
Fındık	18,000	12,000
Soya	22,000	20,000

25

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ

## Ödev – 6 İkinci Bölüm

Aşağıdaki aşamalı karar ağacını dikkate alarak optimal yatırımı (A veya B) gerekli hesaplamalar ile değerlendirmeleri yaparak ve şekilleri çizerek belirleyiniz.



26

Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ