DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA *(NLP)*

1. *Non-lineer kar analizi,*
2. *Kısıtlı optimizasyon,*
3. *Yerine koyma (substitution) yöntemi,*
4. *Lagranj Çarpanları Yöntemi*
5. *Başabaş Analizleri ve Duyarlılık Testleri*

KONU 7

DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA *(NLP)*

Lineer programlama; tam sayılı programlama ve hedef programlama gibi alanlarda kullanım alanı bulur.

LP özellikle, ulaştırma ve atama problemlerinde başarılıdır.

Ancak, gerçek işletme problemlerinde koşullar doğrusal olmayan bir yapı arz ettiğinde; non-lineer fonksiyonların kullanıldığı bir problem çözüm mantığı uygulanmalıdır. Bu düşünce yapısı; *NLP* çözümüdür.

Non-Lineer Kar Analizi

Başabaş Analizine dayanan bir kar fonksiyonu olsun ve bu fonksiyon Z ile ifade edilsin.

$$Z = v.p - C_f - v.C_v$$

Burada,

v = satış hacmi veya talep miktarı,

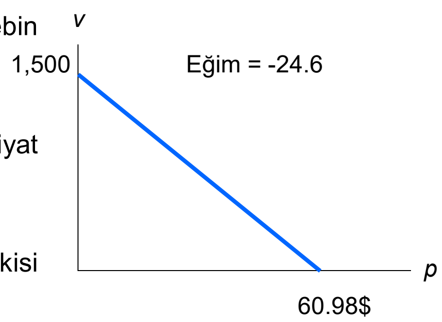
p = fiyat,

C_f *= sabit maliyet,*

C_v *= değişken maliyet*

Non-Lineer Kar Analizi

Başabaş analizindeki en önemli varsayım satış miktarı veya talebin fiyattan bağımsız olduğudur.



Ancak, gerçek koşullarda talep ile fiyat arasında yakın bir ilişki bulunur.

Western Giyim Şti.'nin talep-fiyat ilişkisi lineerdir.

$v = 1{,}500 - 24.6p$

Non-Lineer Kar Analizi

Soruda verilen satış hacmi ve fiyat ilişkisini, asıl kar fonksiyonunda yerine koyarsak;

$Z = v.p - C_f - v.C_v$

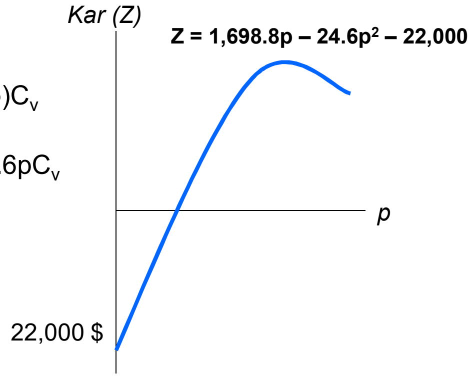
$=(1{,}500-24.6p)p - C_f - (1{,}500-24.6p)C_v$

$=1{,}500p-24.6p^2 - C_f - 1{,}500C_v + 24.6pC_v$

$C_f = 10{,}000$ \$ ve $C_v = 8$\$ ise;

$Z = 1{,}698.8p - 24.6p^2 - 22{,}000$

olur.



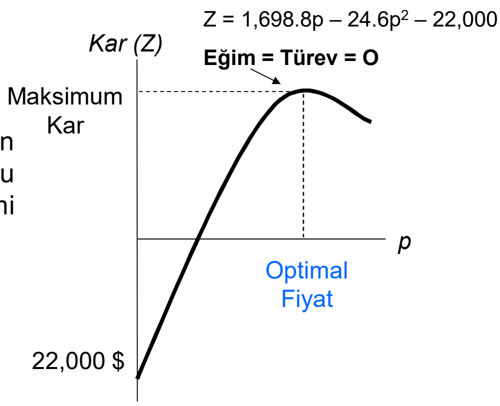
Non-Lineer Kar Analizi

$Z = 1{,}698.8p - 24.6p^2 - 22{,}000$

Matematiksel işlemlerde; bir eğrinin herhangi bir noktasındaki eğimi, bu fonksiyonun o noktadaki kısmi **türevinin alınmasıyla** bulunur.

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial p}} = 1{,}696.8 - 49.2p$$

Teorik olarak; bir eğrinin tepe noktasındaki türevi sıfıra eşittir.



Non-Lineer Kar Analizi

Toplam karı maksimize eden;

1) Optimal fiyat;

$0 = 1{,}696.8 - 49.2p$

$49.2p = 1{,}696.8$

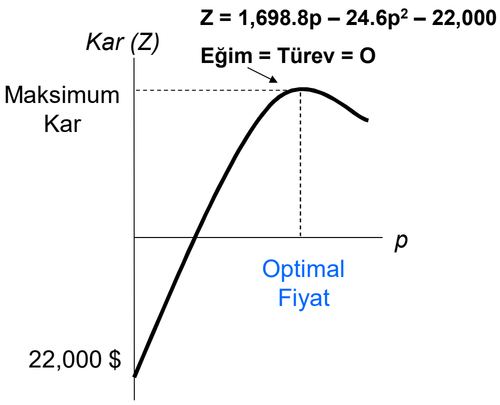
<u>**p = 34.49 \$**</u>

2) Optimal satış hacmi;

$v = 1{,}500 - 24.6p$

$v = 1{,}500 - 24.6(34.49)$

<u>**v = 651.6 adet takım elbise**</u>



Non-Lineer Kar Analizi

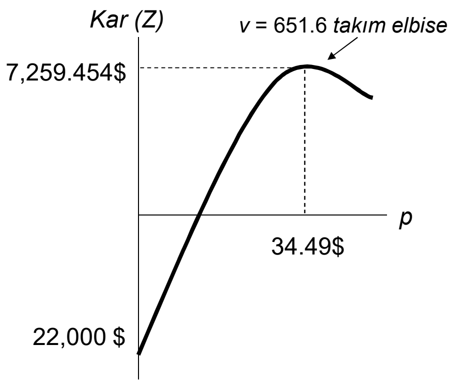
Maksimum Kar-Optimal Fiyat ve Optimal Satış Hacmi Grafiği

$Z = 1{,}698.8p - 24.6p^2 - 22{,}000$

$Z = 1{,}696.8(34.49)-24.6(34.49)^2-22{,}000$

<u>**Maksimum Kar Düzeyi**</u>

<u>**Z= 7,259.45\$**</u>



Kısıtlandırılmış Optimizasyon Yöntemi

$$Z = v.p - C_f - v.C_v$$

Aynı amaç fonskiyonundan yola çıkarak, fiyata dayalı bir model oluşturduk.

$$Z = 1{,}698.8p - 24.6p^2 - 22{,}000$$

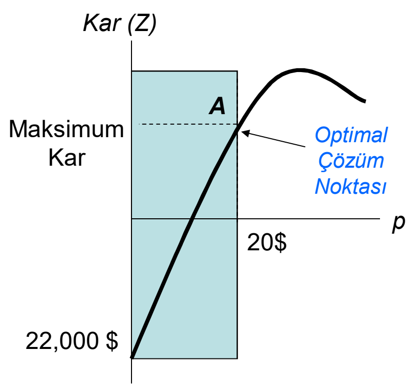
Bir önceki bölümde fonksiyonu herhangi bir şekilde sınırlandırmaya tabi tutmadan optimal çözüme ve maksimum kar seviyesine ulaşmıştık. Şöyle ki; fonksiyonu belli bir fiyat düzeyinde sınırlandırmadan analizi gerçekleştirdik.

Kısıtlandırılmış Optimizasyon Yöntemi

Grafikte non-lineer fonksiyonu belirli fiyat düzeylerinde sınırlandırılır.

Belirlenen 20$'lık fiyat düzeyinde **maksimum kar düzeyi A noktasında** gerçekleşir. Bu nokta **optimal çözüm noktasıdır.**

A noktası için gerekli cebirsel işlemler yapıldığı takdirde; maksimum kara karşılık gelen satış miktarı da belirlenir.

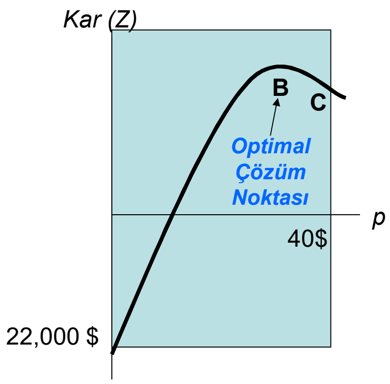


Kısıtlandırılmış Optimizasyon Yöntemi

Bu grafikte ise; **40$'lık bir piyasa fiyatıyla sınırlandırılmış** olan bir kar fonksiyonu görülmektedir.

Sınırlandıran fiyatın bulunduğu nokta ***(C)*** optimal çözüm değildir, çünkü kendisinden önce fonksiyonun bir tepe noktası ***(B)*** bulunmaktadır.

Kısaca, **çözüm B noktasında** gerçekleşir.



Yerine Koyma *(Substitution)* Yöntemi

Bu yöntemde; kısıtlandırılmış eşitlik tek bir değişken için çözülmektedir.

LP derslerinde gösterilen; Beaver Creek Şti. örneğini ele alalım. Şirket, kase (X_1) ve bardak (X_2) üretimi gerçekleştirmektedir.

Amaç fonksiyonu; $\mathbf{Z = a.X_1 + b.X_2}$

Burada, "a" ve "b" ürünlerin kara olan katkı paylarını temsil eder.

Yerine Koyma *(Substitution)* Yöntemi

Bu defa, amaç fonksiyonunda non-lineer bir ilişki söz konusudur.

$a = 4 – 0.1X_1$ ve **$b = 5 – 0.2X_2$** olsun.

Amaç fonksiyonunda yerlerinde konulduğunda;

$$Z = 4X_1 - 0.1X_1^2 + 5X_2 - 0.2X_2^2$$

doğrusal olmayan bir amaç fonksiyonu bulunur.

Yerine Koyma *(Substitution)* Yöntemi

Sorunun orijinal halinde,

$x_1 + 2X_2 = 40$ saat gibi bir kısıt bulunur.

Kısıtları diğeri cinsinden ifade edilir ve takiben de bulunan kısıt amaç fonsksiyonunda yerine konulursa;

$x_1 = 40 - 2X_2$

$$Z = 4.(40\text{-}2X_2) – 0.1(40\text{-}2X_2)^2 + 5X_2 – 0.2X_2^2$$

$$Z = 160 - 8X_2 – 0.1(1,600 – 160X_2 + 4X_2^2) + 5X_2 – 0.2X_2^2$$

$$Z = 160 - 8X_2 – 160 + 16X_2 – 0.4X_2^2 + 5X_2 – 0.2X_2^2$$

$$Z = 13x_2 – 0.6x_2^2$$

Yerine Koyma *(Substitution)* Yöntemi

Bulunan bu değer, **sınırlandırılmamış bir optimizasyon fonksiyonu olduğundan kısmi türevini alarak sıfıra eşitlemek suretiyle maksimum kar düzeyi tespit edilir.**

$$\frac{\partial Z}{\partial X_2} = 13 - 1.2x_2$$

$$0 = 13 - 1.2x_2$$

$$\underline{x_2 = 10.8 \textit{ bardak}}$$

Yerine Koyma *(Substitution)* Yöntemi

X_1 ise X_2 kısıt fonksiyonunda yerine konularak bulunur.

$x_1 + 2X_2 = 40$

$x_1 + 2(10.8) = 40$

$\underline{x_1 = 18.4 \textit{ kase}}$

X1 ve X2 optimal değerleri amaç fonksiyonunda yerine konulursa;

$Z = 4X_1 - 0.1X_1^2 + 5X_2 - 0.2X_2^2$

$Z = 4(18.4) - 0.1(18.4)^2 + 5(10.8) - 0.2(10.8)^2$

Z = 70.42 $

Lagranj Çarpanları (λ) Yöntemi

Bu yöntemde ise; **Lagranj Çarpanı (λ)**, amaç fonksiyonundan çıkarılır ve yeni eşitlik bünyesindeki her değişken bazında kısmi türevi alınarak çözülür.

Lagranj Çarpanları Yöntemi; genel kabül görmüş bir matematiksel yöntem olup, non-lineer karakteristikli sınırlandırılmış optimizasyon problemlerinin çözümünü sağlar.

Bu amaçla, bir önceki örneğimizin üzerinden gideceğiz.

Lagranj Çarpanları (λ) Yöntemi

$$Z = 4X_1 - 0.1X_1^2 + 5X_2 - 0.2X_2^2$$

s.t.

$$X_1 + 2X_2 = 40$$

İlk aşamada, non-lineer durumdaki fonksiyonun Lagranjiyan Fonksiyonuna **(L)** dönüştürülür.

$$X_1 + 2X_2 - 40 = 0$$

Bu amaçla, kısıtın bulunduğu ifade Lagranj Çarpanı (λ) ile çarpılarak amaç fonsiyonundan çıkarılır.

$$L = 4X_1 - 0.1X_1^2 + 5X_2 - 0.2X_2^2 - \lambda(X_1 + 2X_2 - 40)$$

Lagranj Çarpanları (λ) Yöntemi

$L = 4X_1 - 0.1X_1^2 + 5X_2 - 0.2X_2^2 - \lambda(X_1 + 2X_2 - 40)$

Elde edilen yeni L fonksiyonu, sırasıyla; X_1, X_2 ve λ'ya göre kısmi türevi alınarak sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial Z}{\partial X_1} = 4 - 0.2X_1 - \lambda$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_2} = 5 - 0.4X_2 - 2\lambda$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = -X_1 - 2X_2 + 40$$

Lagranj Çarpanları (λ) Yöntemi

Ortak çözüm için elde edilen her denklem sıfıra eşitlenir.

$4 - 0.2X_1 - \lambda = 0$

$5 - 0.4X_2 - 2\lambda = 0$

$-X_1 - 2X_2 + 40 = 0$

Üstteki iki eşitlik incelenirse; en üstte yer alan -2 faktörü ile çarpılarak;

$-8 + 0.4X_1 + 2\lambda = 0$

$\underline{\ 5 - 0.4X_2 - 2\lambda = 0\ }$

$-3 + 0.4X_1 + 0.4X_2 = 0$

Lagranj Çarpanları (λ) Yöntemi

Türev ile bulunan ve en altta yer alan eşitlik 0.4 faktörü ile çarpılır;

$-0.4X_1 + 0.8X_2 + 16 = 0$

Bir önceki slaytta ulaşılan en son denklem ile toplanır;

$-0.4X_1 + 0.8X_2 + 16 = 0$

$\underline{-3 + 0.4X_1 + 0.4X_2 = 0}$

$\mathbf{-1.2X_2 + 13 = 13}$

$\underline{\mathbf{X_2 = 10.8}}$ ***bardak***

Lagranj Çarpanları (λ) Yöntemi

$-X_1 – 2X_2 + 40 = 0$ denkleminde X_2 yerine konulur;

$-X_1 – 2(10.8) + 40 = 0$

$\underline{\mathbf{X_1 = 18.3}}$ ***kase***

$5 – 0.4X_2 - 2\lambda = 0$ denkleminde X_2 yerine konulur;

$5 – 0.4(10.8) - 2\lambda = 0$

$\underline{\mathbf{\lambda = 0.33}}$

Lagranj Çarpanları (λ) Yöntemi

Tüm kısıtların optimal değerlerine ulaşıldığından dolayı bulunan değerler amaç fonksiyonunda yerine konulur;

$$Z = 4X_1 - 0.1X_1^2 + 5X_2 - 0.2X_2^2$$

$Z = 4(18.3) - 0.1(18.3)^2 + 5(10.8) - 0.2(10.8)^2$

$Z = 70.42$ \$

Lagranjiyan Fonksiyonu (L) değeri ise;

$$L = 4X_1 - 0.1X_1^2 + 5X_2 - 0.2X_2^2 - \lambda(X_1 + 2X_2 - 40)$$

$L = 4(18.3) - 0.1(18.3)^2 + 5(10.8) - 0.2(10.8)^2 - 0.33(0)$

$L = 70.42$ \$

Gerek Yerine Koyma *(Substution)* ve gerekse Lagranj Çarpanları Yöntemlerinde aynı çözüme ulaşılmıştır.

Başa Baş Analizi *(Break Even Analysis)*

İşletmeler belirli maliyetler altında mamül veya hizmet üretirler. Genel olarak maliyetler iki alt grupta toplanır.

1) Sabit Maliyetler (C_f)

Bina ve arazi maliyeti, aydınlatma, beyaz yakalı personel ücreti, yönetim giderleri, amortismanlar vb.

2) Değişken Maliyetler (C_v)

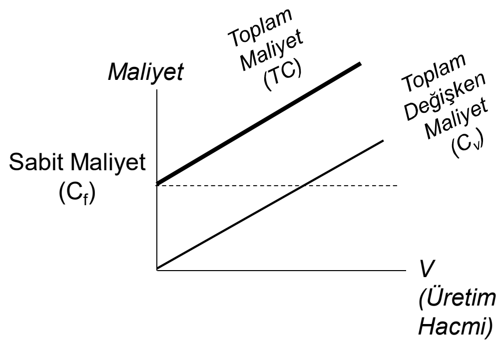
Hammadde gideri, enerji, direk işçilik, paketleme, stoklama, dağıtım, pazarlama vb.

Başa Baş Analizi *(Break Even Analysis)*

v = Üretim hacmi

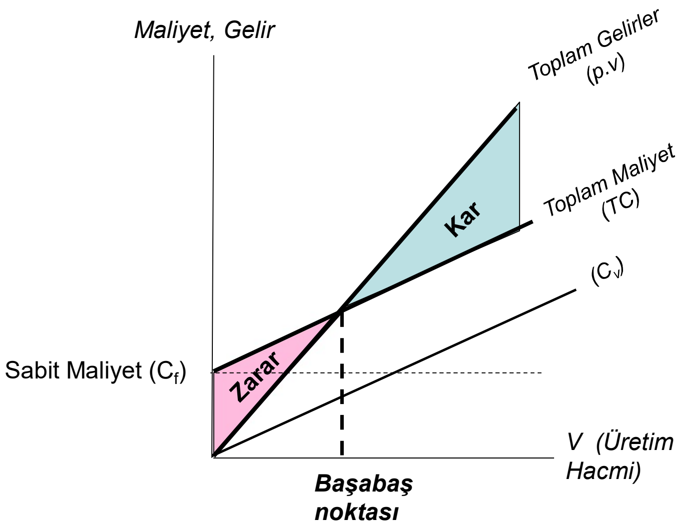
TC = Toplam Maliyet

$TC = C_f + v.C_v$



Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ 25

Başa Baş Analizi *(Break Even Analysis)*



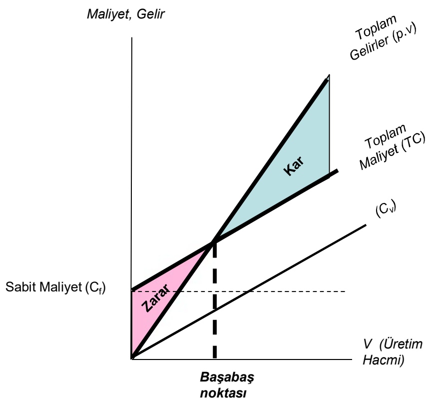
Prof. Dr. Fazıl GÖKGÖZ 26

Başa Baş Analizi *(Break Even Analysis)*

İşletmenin kara geçtiği nokta başabaş üretim düzeyidir.

Kar = Gelirler – Maliyetler

Kar = p.v – C_f – v.C_v



Başa Baş Analizi *(Break Even Analysis) - Örnek*

Pha-medical ilaç fabrikasının üretmekte olduğu bir ağrı kesici ilacın maliyet değerleri ve gelir bilgileri:

C_v = 8 €

C_f = 10,000 €

p = 23 €

<u>Toplam maliyet fonskiyonunu ve başbaş noktasını belirleyiniz:</u>

TC = 10,000 + 8v

TR = Toplam Gelir

TR = 23v

TR = TC *(Başabaş düzeyi) ; Kar = TR - TC*

Kar = 23v – (10,000 + 8v) = 15v -10,000 = 0

<u>$v_{başabaş}$ = 666 adet</u>

(Firma zarar etmemek için en az bu miktarda üretim gerçekleştirmelidir)

Başa Baş Analizi *(Break Even Analysis) - Örnek*

Pha-medical ilaç fabrikası kapasitesi gereğince 800,000 adet ilaç üretebilmektedir.

Firmanın kapasitesini **1,000 €** maliyet karşılığında **1,200 adede** çıkarılması yönündeki öneriye katılıyor musunuz ?

Firma mevcut kapasitesinin tamamını kullanırsa;

$Kar_1 = 15v - 10{,}000$

$Kar_1 = 15(800)\text{-}10{,}000 = 2{,}000$ € ; $V_{Başabaş\text{-}1} = 10{,}000/15 = 666$ adet

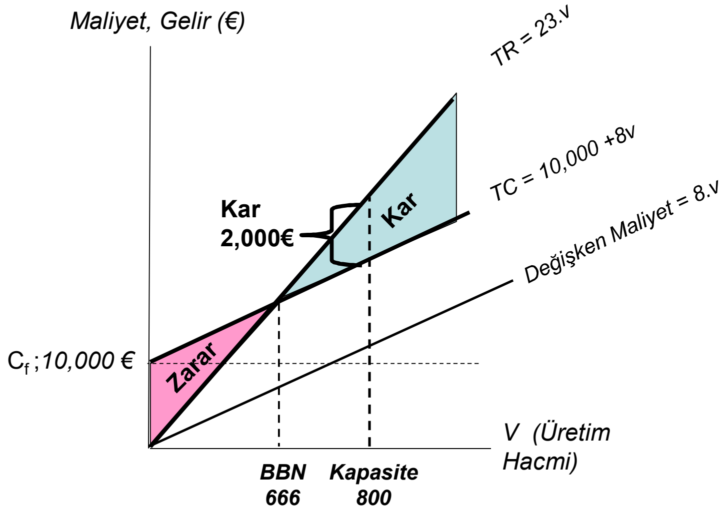
Firma kapasite artışını uygularsa;

$Kar_2 = 15v - 11{,}000$

$Kar_2 = 15(1{,}200)\text{-}11{,}000 = 7{,}000$ € ; $V_{Başabaş\text{-}2} = 11{,}000/15 = 733$ adet

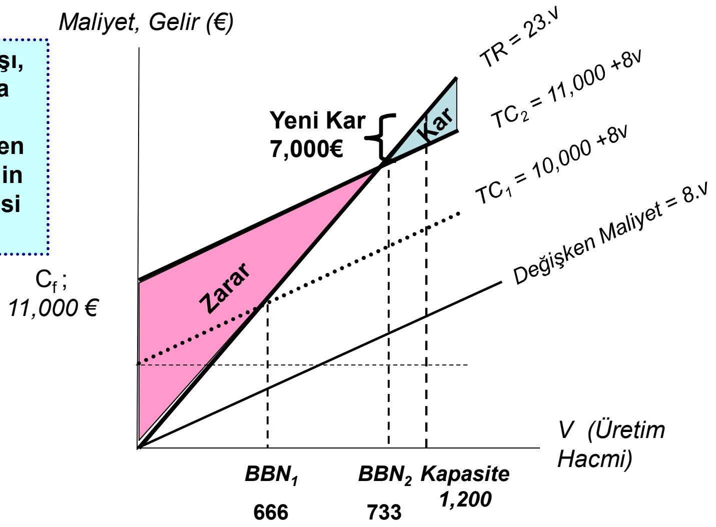
Kar Artışı için; **$Kar_2 > Kar_1$** olduğundan **kapasitenin artırılması rasyonel bir karar** olur.

Başa Baş Analizi *(Break Even Analysis) - Örnek*



Başa Baş Analizi *(Break Even Analysis)*

Kapasite artışı, kar artışını da beraberinde getireceğinden yeni stratejinin benimsenmesi önerilir.



Duyarlılık Analizi *(Fiyat Artışı)*

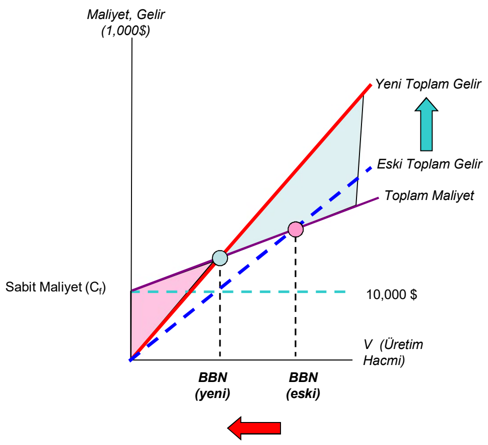
Genel bir ifadeyle, **satış fiyatındaki artış**, diğer tüm unsurlar sabit kabul edildiğinde **başabaş noktası'nı (BBN) azaltmaktadır.**

Yine aynı örneğimizde; satış fiyatı 23$'dan 30$ seviyesine yükselmiş olsun.

BBN *(Hacim)* = C_f / (p-C_v)

BBN *(Hacim)* = 10,000/(30-8)

BBN *(Hacim)* = 454.5



Duyarlılık Analizi *(Değişken Maliyet Değişimi)*

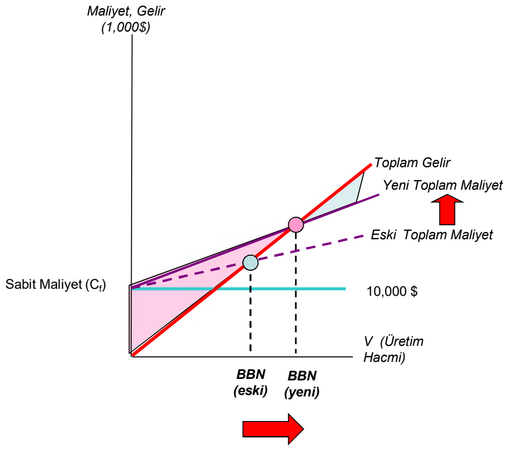
Genel bir ifadeyle, **değişken maliyet düzeyindeki bir artış**, diğer tüm unsurlar sabit kabul edildiğinde **başabaş noktası'nı (BBN) arttırmaktadır.**

Aynı örneğimizde; satış fiyatı 30$ olduğunda ve değişken maliyet 12$'a yükseldiğinde;

BBN *(Hacim)* = C_f / (p-C_v)

BBN *(Hacim)* = 10,000/(30-12)

BBN *(Hacim)* = 555.5



Duyarlılık Analizi *(Sabit Maliyet Değişimi)*

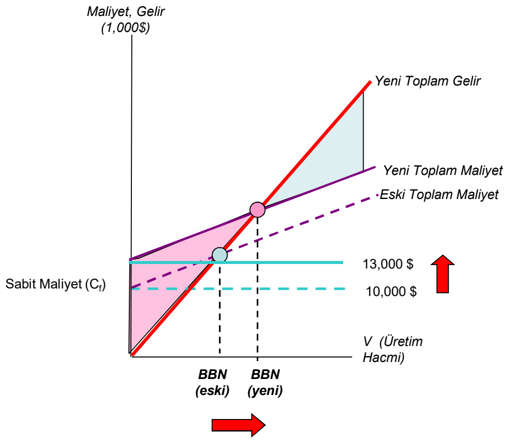
Genel bir ifadeyle, **sabit maliyet düzeyindeki bir artış**, diğer tüm unsurlar sabit kabul edildiğinde **başabaş noktası'nı (BBN) arttırmaktadır.**

Aynı örneğimizde; satış fiyatı 30$, değişken maliyet 12$ olduğunda ve sabit maliyet %30 arttığında;.

BBN *(Hacim)* = C_f / (p-C_v)

BBN *(Hacim)* = 13,000/(30-12)

BBN *(Hacim)* = 722.2



ÖDEV – 7 (NLP)

Bölüm 1

Bir tekstil firmasının aylık sabit maliyeti 21,000 $ ve değişken maliyeti ise birim başına 0.45 $'dır. Satış fiyatı 1.3 $ ise;

a) *Aylık 18,000 birim üretim için toplam maliyet, toplam gelir ve kar düzeyini belirleyiniz.*

b) Yıllık bazda başabaş noktasını hesaplayınız ve grafik üzerinde gösteriniz.

c) Kendi belirleyeceğiniz maliyetler ve satış fiyatı üzerinden duyarlılık analizleri yaparak grafik üzerinde her durumu gösteriniz.

Bölüm 2

Bir içecek firmasının aylık sabit maliyeti 12,000 $ ve birim başına değişken maliyeti 17 $'dır. Şirket kar fonksiyonunu ve talep kısıtını aşağıdaki gibi belirlemiştir.

$Z = vp - 12{,}000 - 17v$

s.t.

$v = 800 - 15p$

Bu bağlamda, "Yerine Koyma" ve "Lagranj" yöntemleriyle ayrı ayrı optimal fiyatı hesaplayınız.