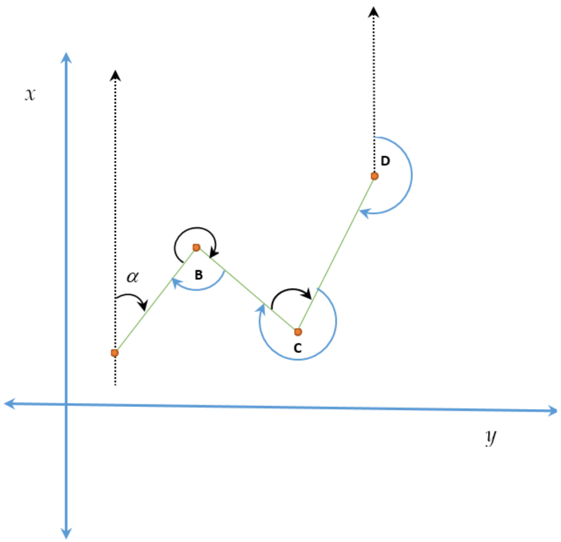
Düzlem, Küre ve Elipsoit Üzerinde Temel Ödevler

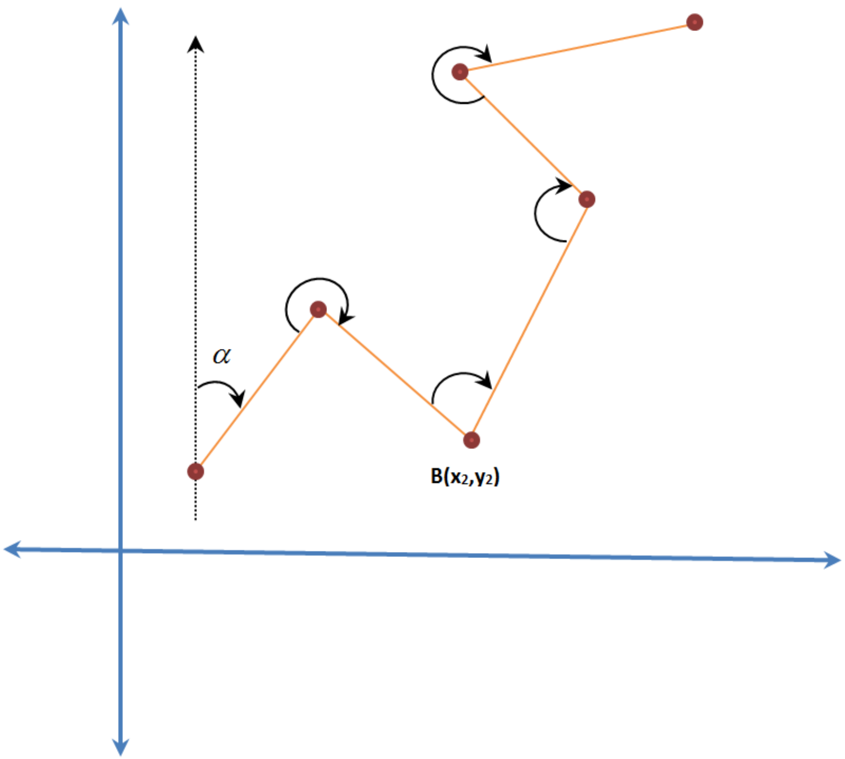
Prof. Dr. Bahadır AKTUĞ

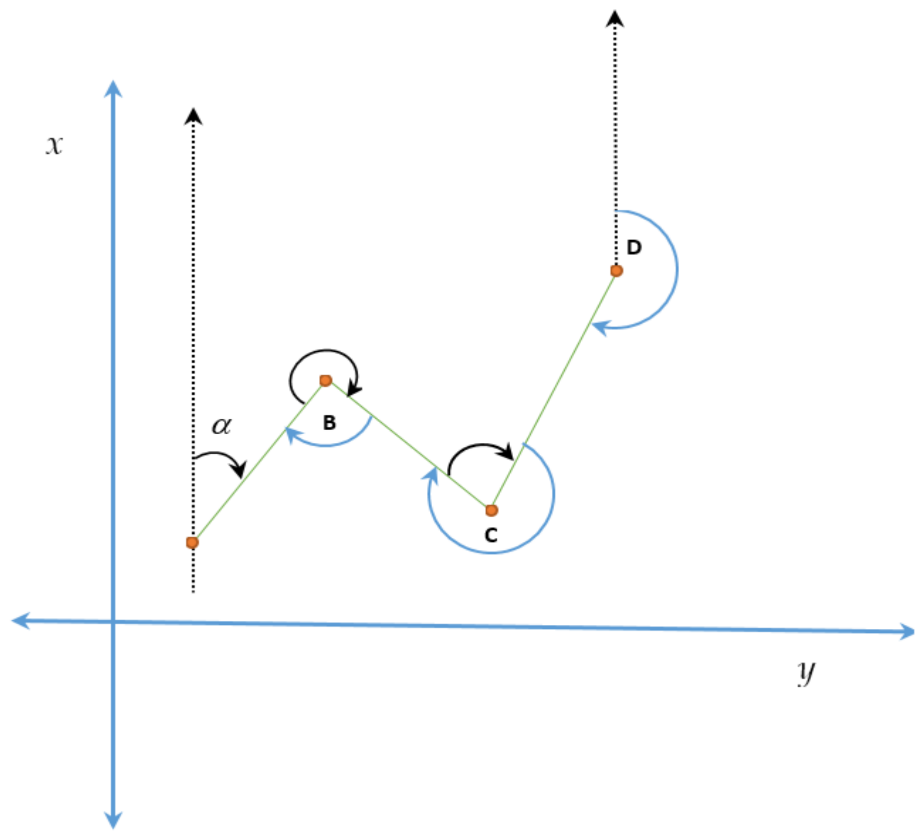
Kırıklık ve Açıklık Açıları

- Açıklık açısı = Semt = Düzlem azimut
- Açıklık açıları kuzeyden saat istikametinde ölçülür. Kırıklık açıları aynı şekilde kuzeyden ölçülür. Kırıklık açılarının belirlenmesinde gidiş yönü önemlidir. Örneğin, üç noktalı (ABC) bir poligonda A'dan C'ye giderken ölçülen kırıklık açısı ile, C'den A'ya giderken ölçülen kırıklık açısı aynı değildir.



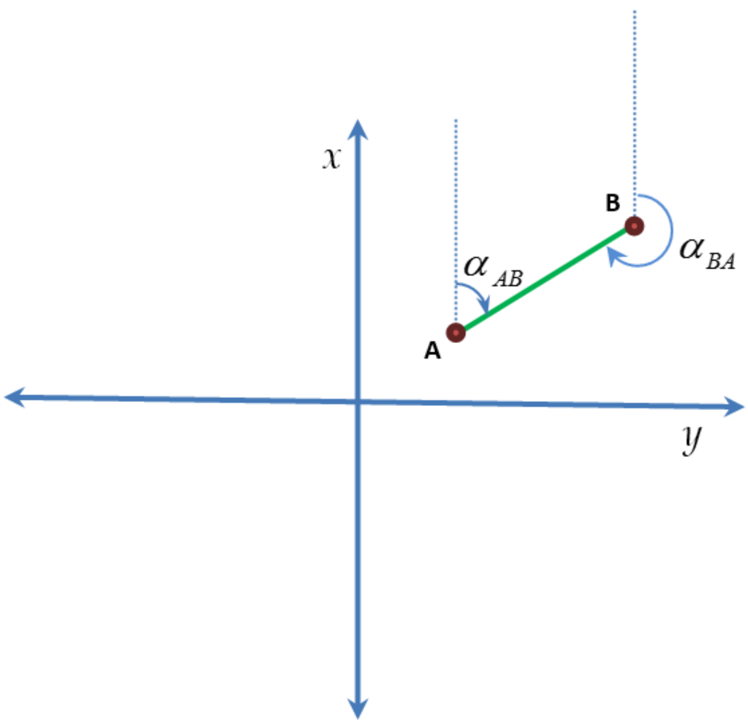
Açıklık Açıları

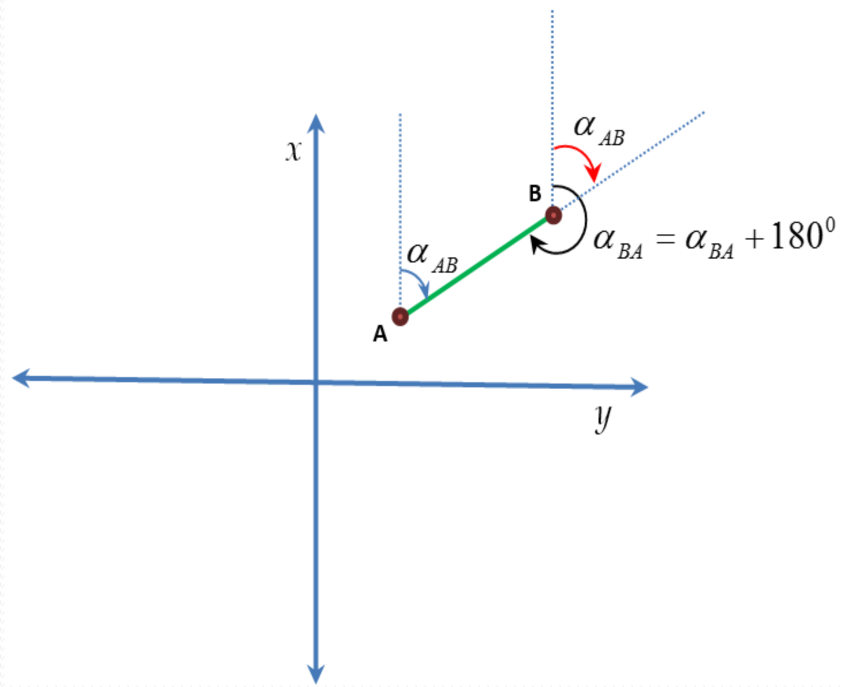




İleri ve Geri Semt

- Herhangi bir A noktasından B noktasına olan semt değeri (ileri semt) ile B noktasından A noktasına olan semt değeri (geri semt) elde edilebilir.





İleri ve Geri Semt

Şekilden görüleceği üzere geri semt ile semt arasında 180° lik fark bulunmaktadır ve aralarındaki ilişki

$$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} + 180^{\circ}$$

şeklinde yazılabilir. Ancak, eğer tersi durum söz konusu olsaydı (B'den A'ya olan semt verilmiş olsaydı);

$$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} - 180^{\circ}$$

şeklinde elde edilmesi gerekirdi. Bu durum genelleştirilecek olursa, Herhangi bir semtin ters semti, eğer ileri semt

$$\alpha_{BA} = \begin{cases} \alpha_{AB} + 180^{\circ} \quad , & \alpha_{AB} < 180^{\circ} \\ \alpha_{AB} - 180^{\circ} \quad , & \alpha_{AB} > 180^{\circ} \end{cases}$$

İleri ve Geri Semt

ÖRNEK:

A noktasından B noktasına olan semt 210^g olarak verildiğine göre, B noktasından A noktasına olan semt nedir?

ÇÖZÜM:

$210^g = 189° > 180°$ olduğundan,

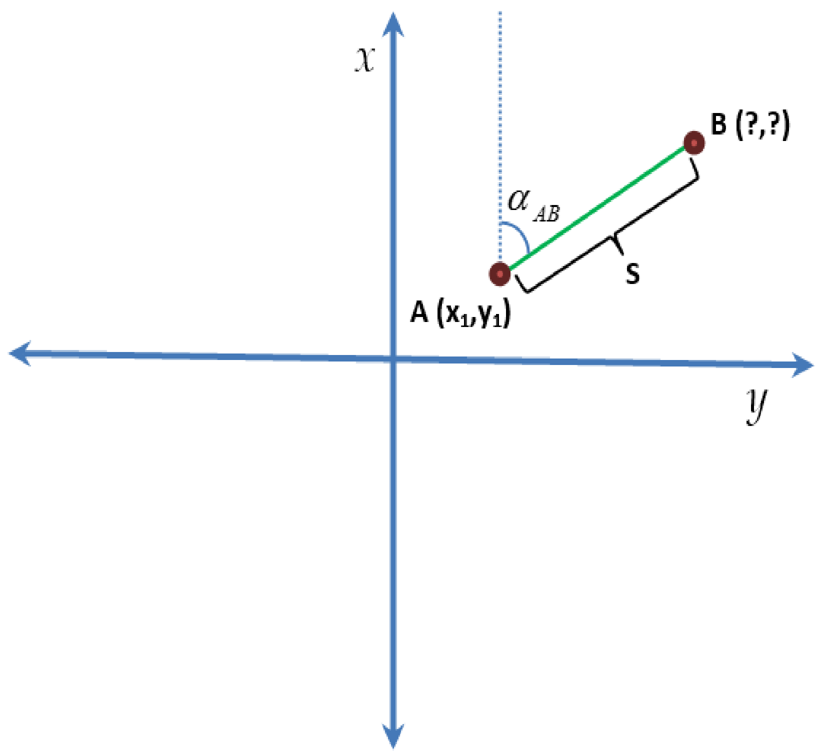
$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} - 180° = 9° = 10^g$ olarak elde edilir.

Temel Ödevler

- Jeodezik hesaplamalarda iki temel hesaplama/ödev bulunur.
- Bunlar, jeodezik problem olarak adlandırılır, düzlem, küre ve elipsoit üzerinde çözülür. Düzlem üzerindeki hesaplamalarda ayrıca 3. ve 4. temel ödevler de tanımlanmıştır.

1. Temel Ödev

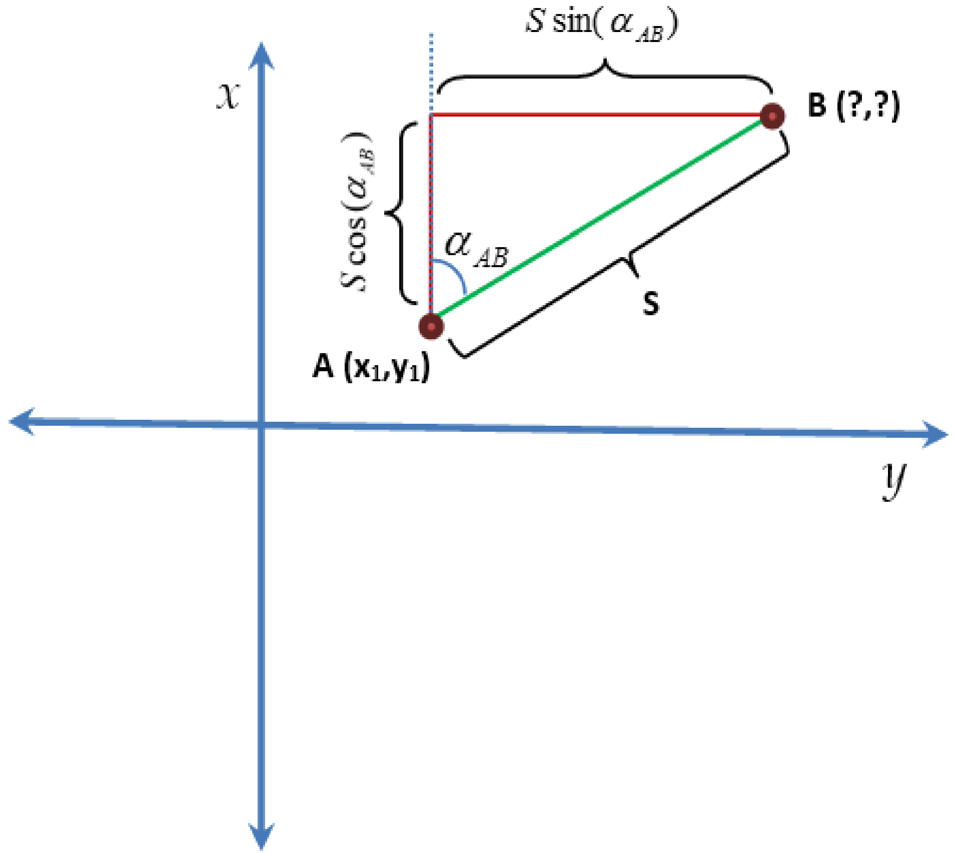
- Birinci temel ödevde, koordinatları bilinen bir A noktası ile A noktasından B noktasına olan azimut/semt ile yine A noktasından B noktasına olan mesafe verilir. Verilenlere göre B noktasının koordinatlarının hesaplanması istenir.



1. Temel Ödev Çözümü

$$x_2 = x_1 + S\cos\alpha$$

$$y_2 = y_1 + S\sin\alpha$$



1. Temel Ödev Örnek

Örnek:

Koordinatları; Sağa = 456741.47, Yukarı = 4475588.95 şeklinde verilen bir A noktasına göre 140° semt ve 8.457 km uzaklıkta bulunan bir B noktasının koordinatlarını bulunuz.

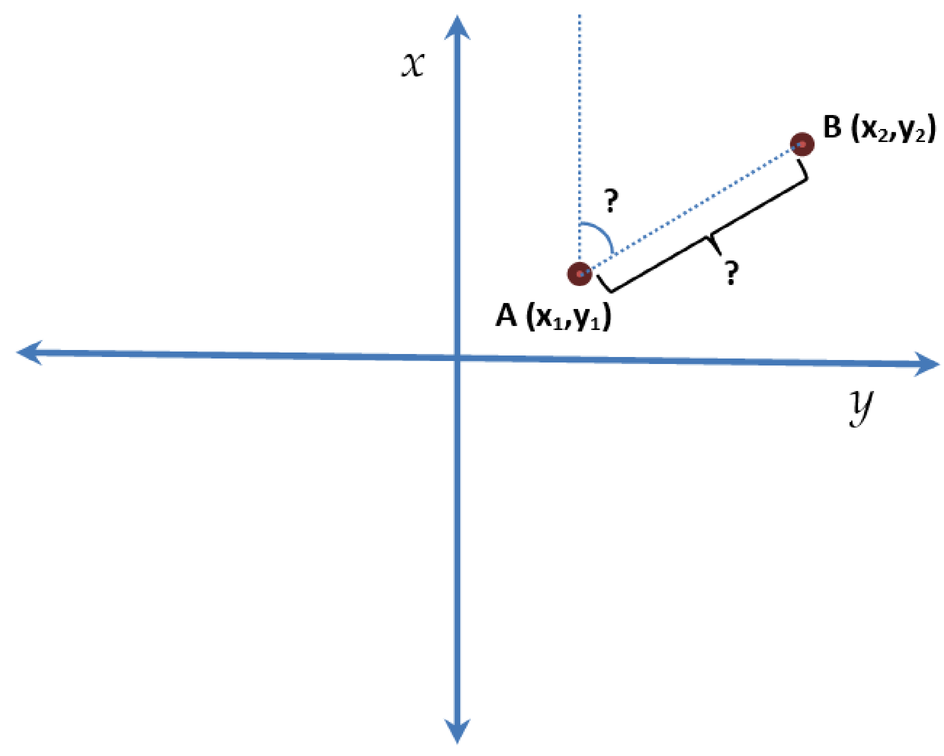
ÇÖZÜM:

$$Yukarı_B = x_1 + S\cos\alpha = 4475588.95 + 8457\cos(140°) = 4469110.51\ \text{m}$$

$$Sağa_B = y_1 + S\sin\alpha = 456741.47 + 8457\sin(140°) = 462177.53\ \text{m}$$

2. Temel Ödev

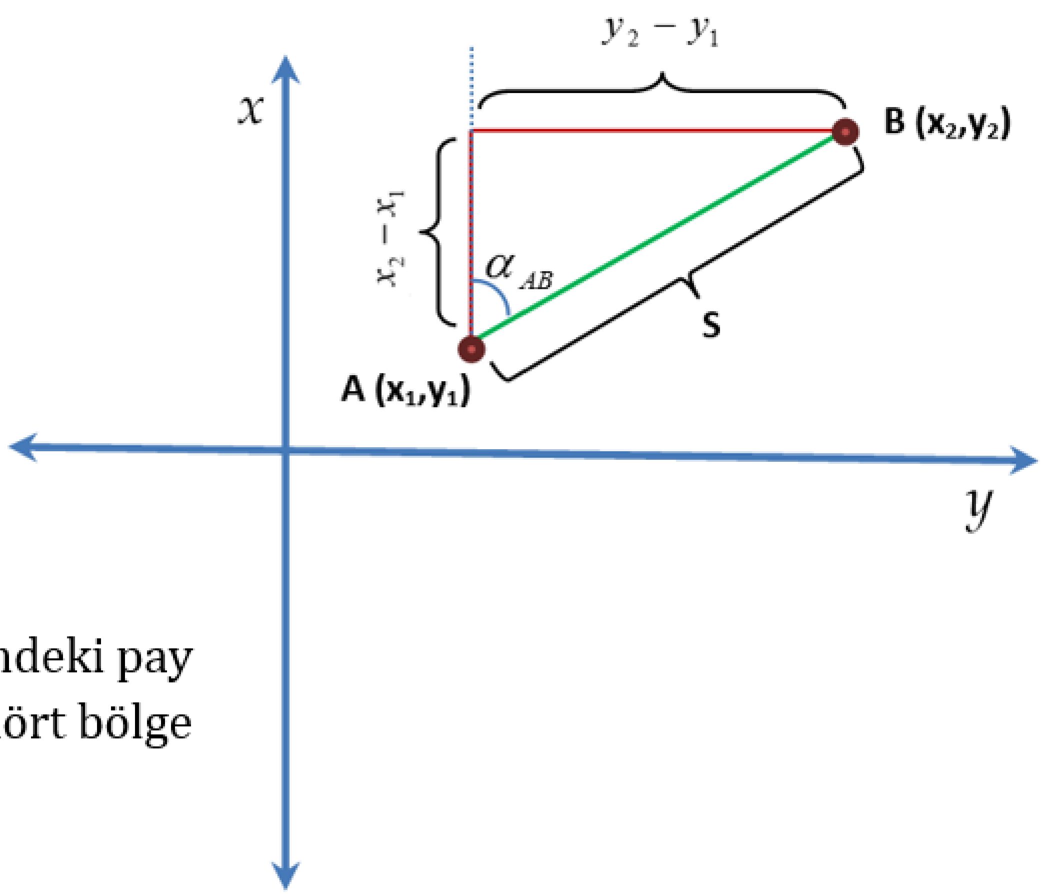
- İkinci temel ödevde, koordinatları bilinen A ve B noktaları arasındaki mesafe ile A noktasından B noktasına olan azimut/semt değerinin hesaplanması istenir.



2. Temel Ödev Çözümü

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Çözümde, arctanjant parantezindeki pay ve paydaya dikkat edilmeli ve dört bölge dikkate alınarak semt açısı hesaplanmalıdır.

2. Temel Ödev Örnek

Örnek:

Koordinatları; Sağa = 456741.47, Yukarı = 4475588.95 şeklinde verilen bir A noktası ile Sa~~ğa=462177.53 ve Yukarı=4469110.51~~ şeklinde verilen bir B noktası arasındaki uzaklığı ve A'dan B'ye olan semt değerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

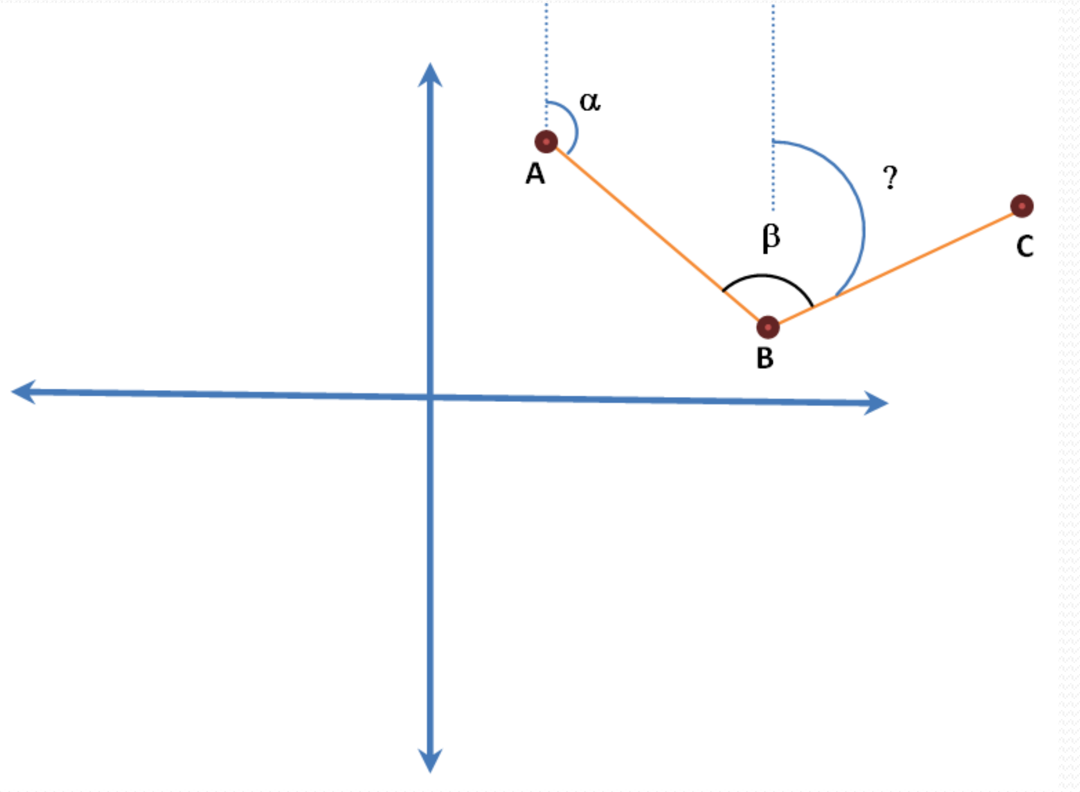
$$S=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4410661.32-4475588.95)^2+(511222.22-456741.47)^2}$$

$$S=8457.00\,m$$

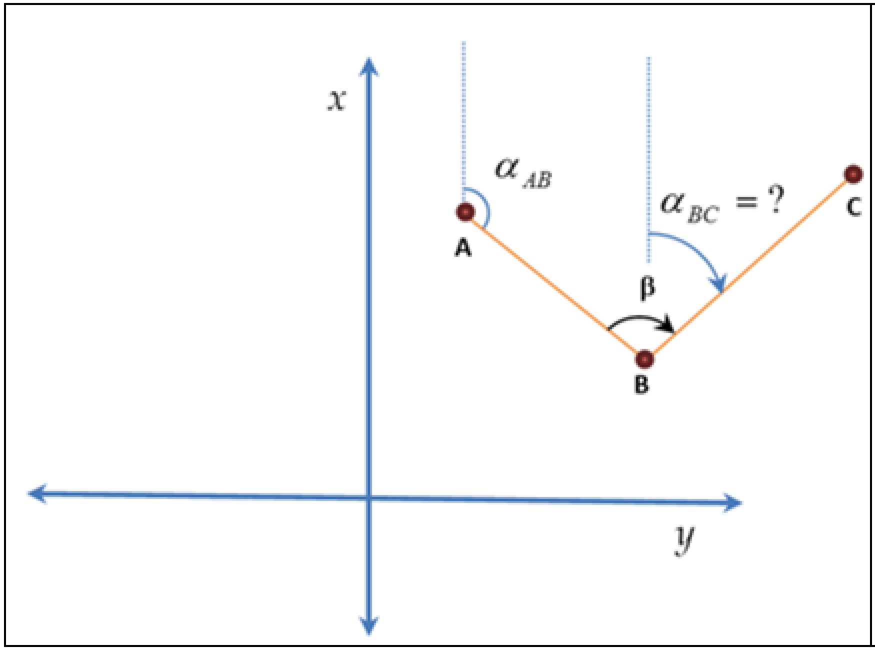
$$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{511222.22-456741.47}{4410661.32-4475588.95}\right)=140^0$$

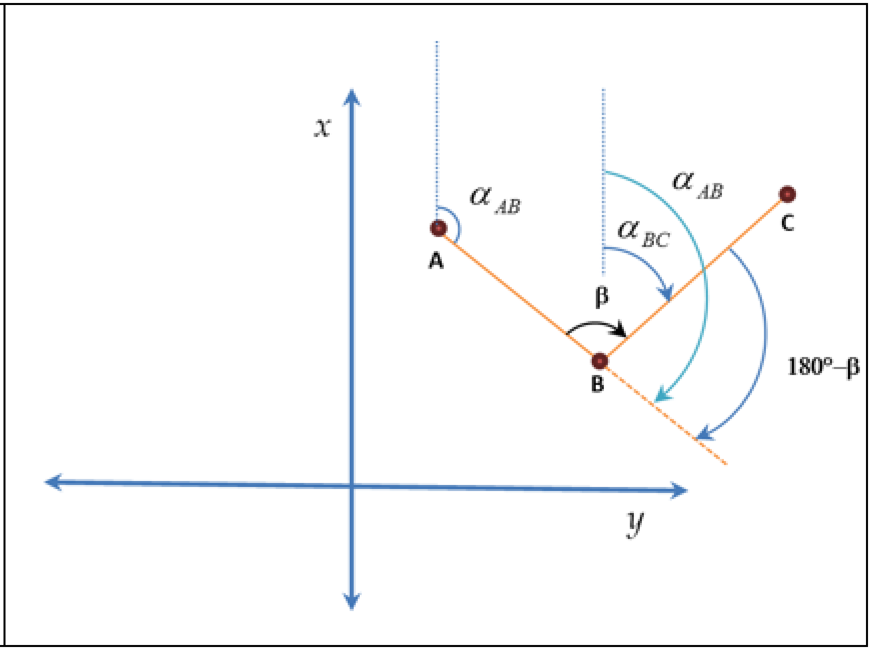
3. Temel Ödev

- Üçüncü temel ödevde, verilen bir azimut v kırıklık açısı yardımıyla, diğer bir noktaya olan azimutun hesaplanması istenir.



3. Temel Ödev Çözümü

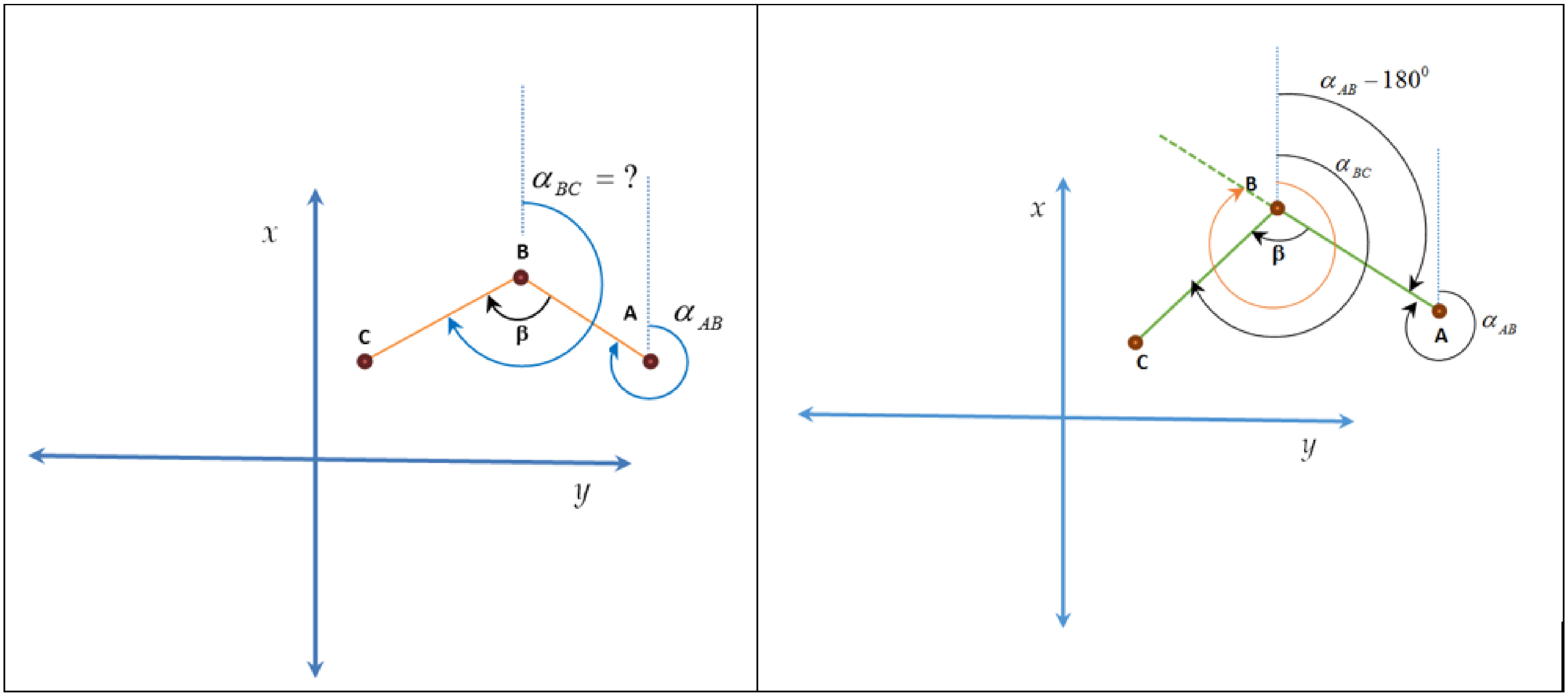




$$\alpha_{BC} = \alpha_{AB} - (180° - \beta) = \alpha_{AB} + \beta - 180°$$

3. Temel Ödev Çözümü

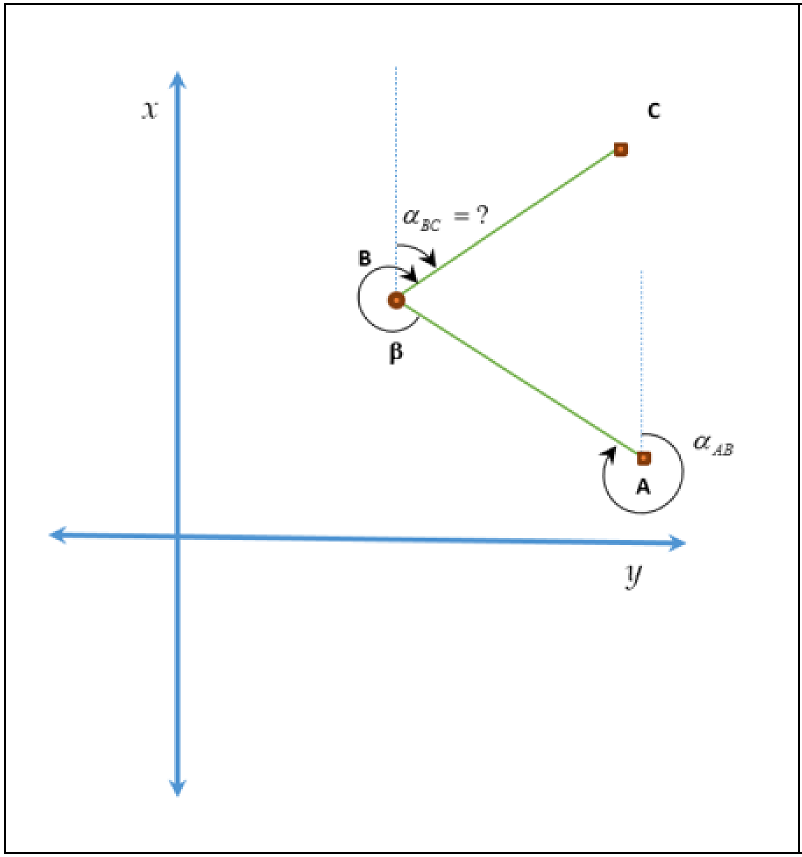
İkinci bir durum olarak aşağıdaki örnek verildiğinde, çözüm:

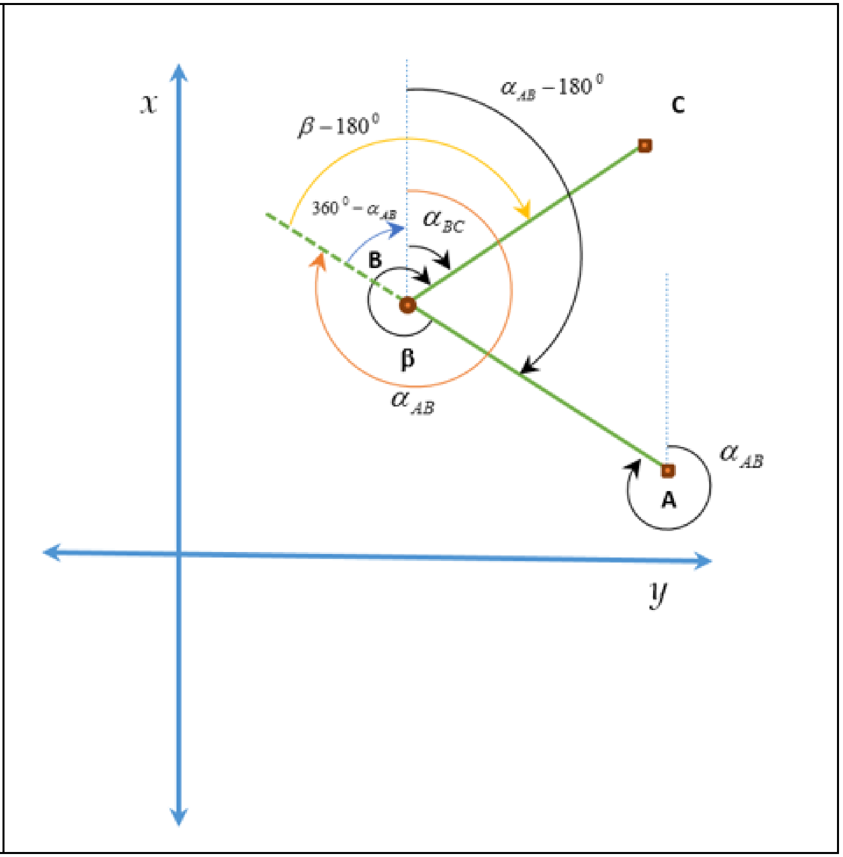


$\alpha_{BC} = (\alpha_{AB} - 180°) + \beta = \alpha_{AB} + \beta - 180°$ şeklinde bulunur.

3. Temel Ödev Çözümü

Üçüncü bir durum olarak aşağıdaki örnek verildiğinde, çözüm:

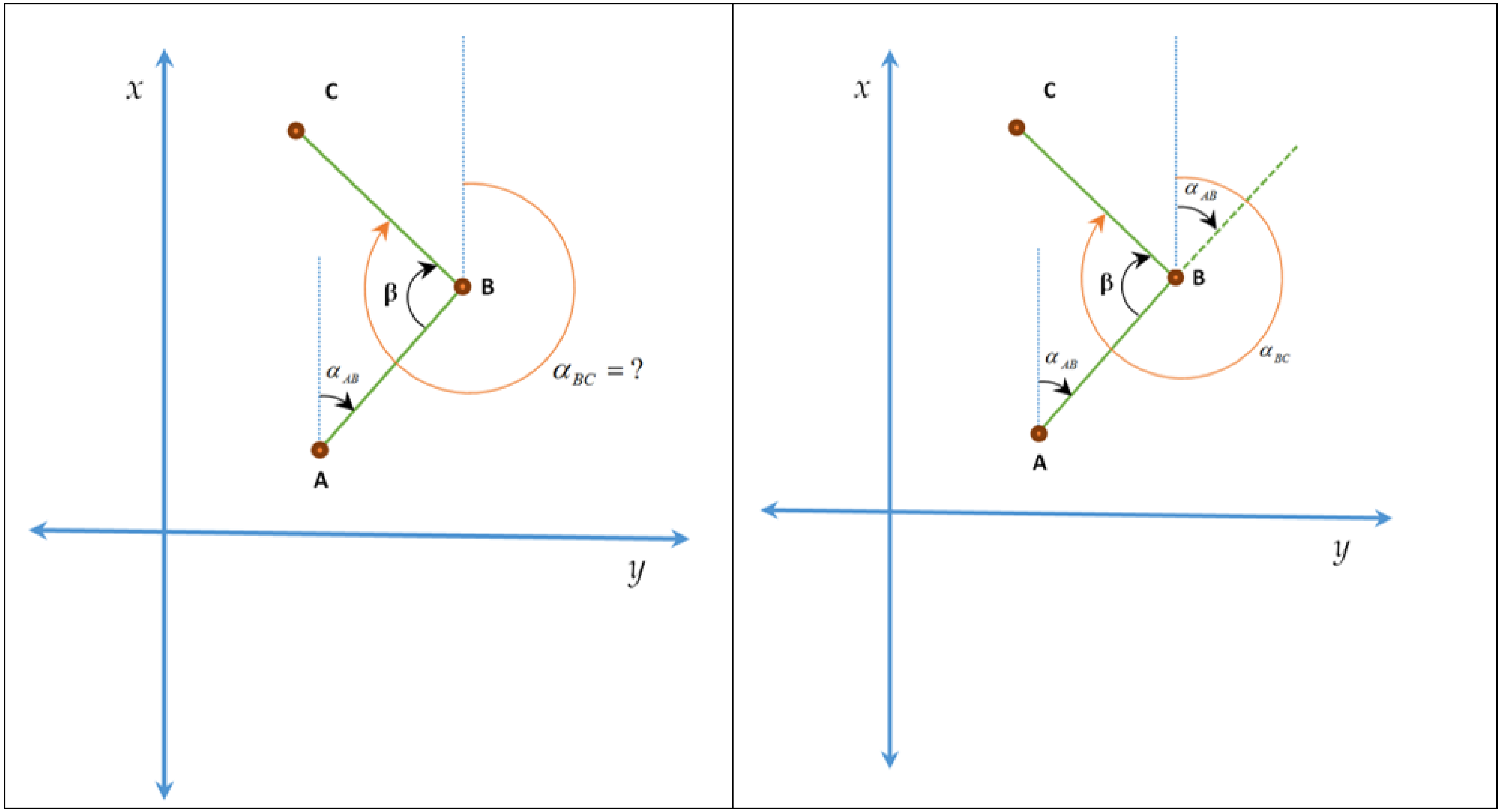




$$\alpha_{BC} = (\beta - 180°) - (360° - \alpha_{AB}) = \alpha_{AB} + \beta - 540°$$

3. Temel Ödev Çözümü

Dördüncü bir durum olarak;



$$\alpha_{BC} = (\alpha_{AB} + 180) + \beta = \alpha_{AB} + \beta + 180^\circ$$

3. Temel Ödev Çözümü

Buna göre genelleştirilirse,

$$\alpha_{BA} = \begin{cases} \alpha_{AB} + \beta + 180^0, & 0^0 \leq (\alpha_{AB} + \beta) \leq 180^0 \\ \alpha_{AB} + \beta - 180^0, & 180^0 \leq (\alpha_{AB} + \beta) \leq 360^0 \\ \alpha_{AB} + \beta - 180^0, & 360^0 \leq (\alpha_{AB} + \beta) \leq 540^0 \\ \alpha_{AB} + \beta - 540^0, & 540^0 \leq (\alpha_{AB} + \beta) \leq 720^0 \end{cases}$$

bulunur.

3. Temel Ödev Örnek

Örnek:

Bir ABC poligonu üzerinde A noktasından B noktasına olan semt 150°, B noktasındaki kırıklık açısı ise 70° olarak verilmiştir. Bu göre, C noktasından B noktasına olan semt nedir?

ÇÖZÜM:

$\alpha_{AB} = 150^0,\ \beta = 70^0$ olarak verilmiştir.

$180^0 \leq (\alpha_{AB} + \beta = 220^0) \leq 360^0$ olduğundan, $\alpha_{BC} = \alpha_{AB} + \beta - 180^0 = 150^0 + 70^0 - 180^0 = 40^0$ şeklinde bulunur.

$\alpha_{CB} = \alpha_{BC} + 180^0 = 220^0$ şeklinde elde edilir.

3. Temel Ödev Örnek

Örnek:

Bir ABC poligonu üzerinde A noktasından B noktasına olan semt 300°, B noktasındaki kırıklık açısı ise 280° olarak verilmiştir. Bu göre, C noktasından B noktasına olan semt nedir?

ÇÖZÜM:

$\alpha_{AB} = 300^0,\ \beta = 280^0$ olarak verilmiştir.

$540^0 \leq (\alpha_{AB} + \beta = 580^0) \leq 720^0$ olduğundan,

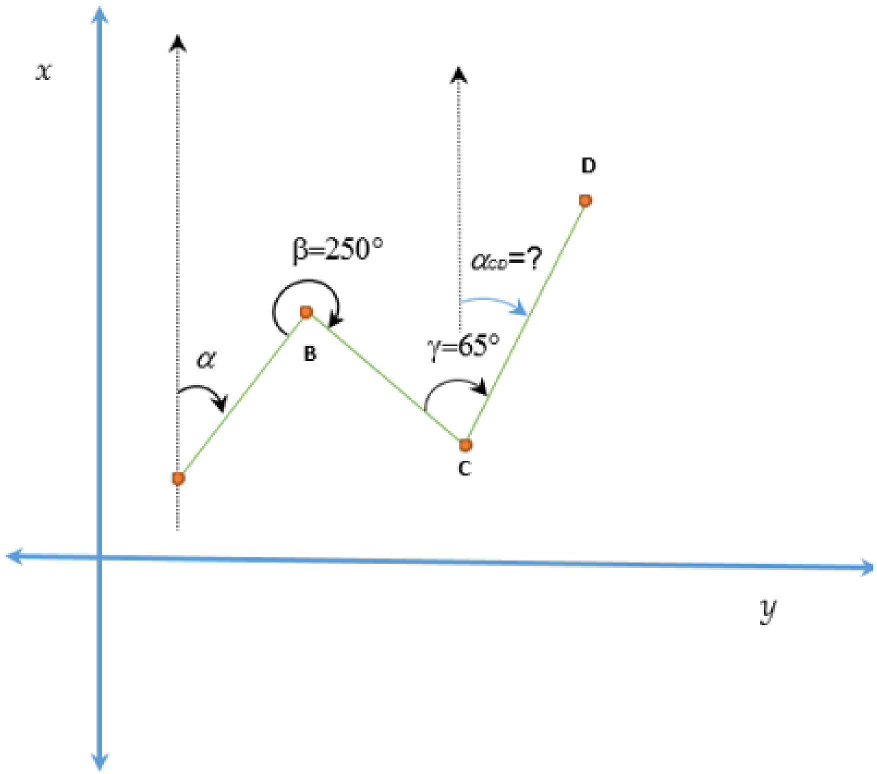
$\alpha_{BC} = \alpha_{AB} + \beta - 540^0 = 300^0 + 280^0 - 540^0 = 40^0$ şeklinde bulunur.

$\alpha_{CB} = \alpha_{BC} + 180^0 = 220^0$ şeklinde elde edilir.

3. Temel Ödev Örnek

Örnek:

Yandaki poligonda, $\alpha_{AB} = 75^0$ olarak verildiğine göre, CD semtini bulunuz.



3. Temel Ödev Örnek

ÇÖZÜM:

$180^0 \leq (\alpha_{AB} + \beta = 325^0) \leq 360^0$ olduğundan,

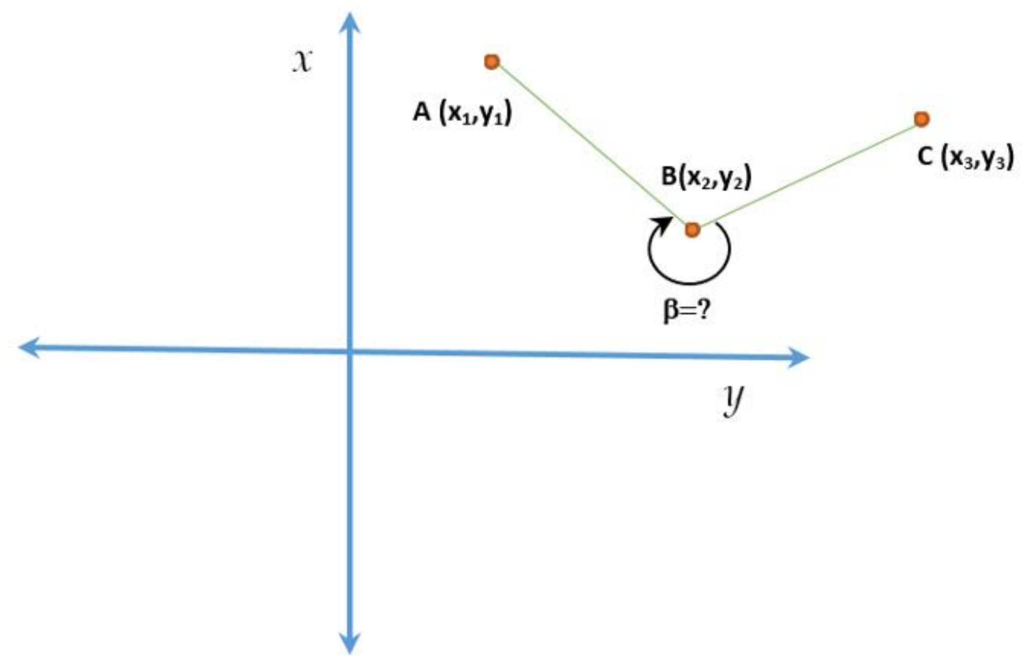
$\alpha_{BC} = \alpha_{AB} + \beta - 180^0 = 75^0 + 250^0 - 180^0 = 145^0$ şeklinde bulunur.

$180^0 \leq (\alpha_{BC} + \gamma = 210^0) \leq 360^0$ olduğundan,

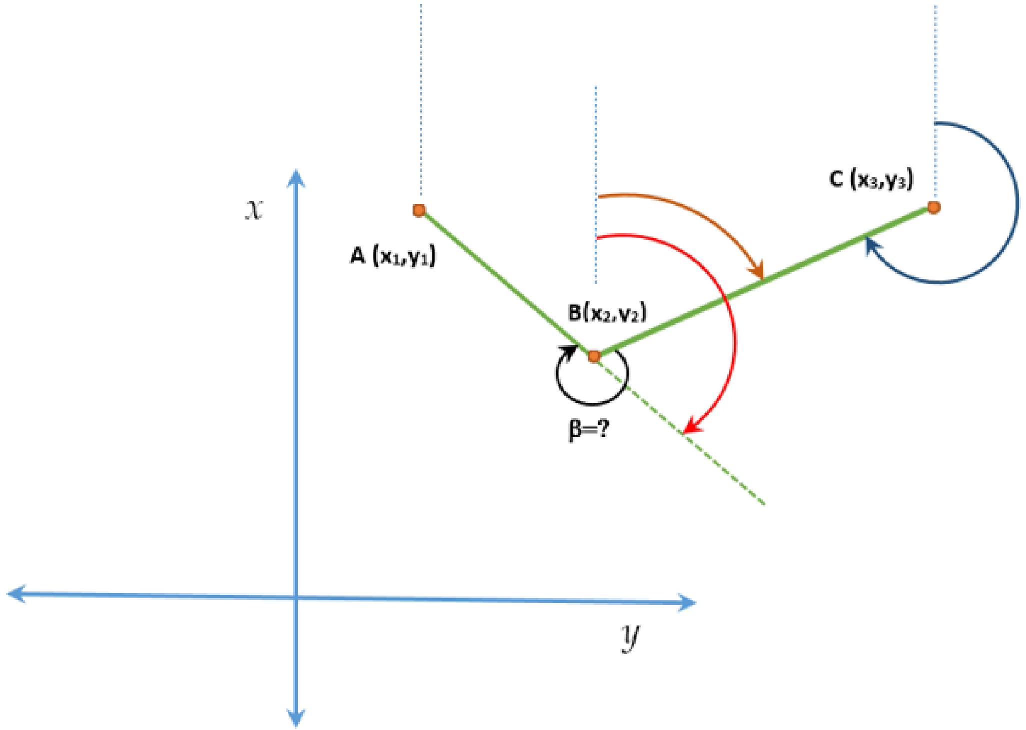
$\alpha_{CD} = \alpha_{BC} + \gamma - 180^0 = 145^0 + 65^0 - 180^0 = 30^0$ şeklinde bulunur.

4. Temel Ödev

- Dördüncü temel ödevde, koordinatları bilinen A, B ve C noktaları yardımıyla aradaki kırıklık açısının hesaplanması istenir.



4. Temel Ödev Çözümü



Burada, β iki semt farkı yardımıyla;

$$\beta = \alpha_{BA} - \alpha_{BC} = \tan^{-1}\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right)$$

şeklinde bulunur.

4. Temel Ödev Örnek

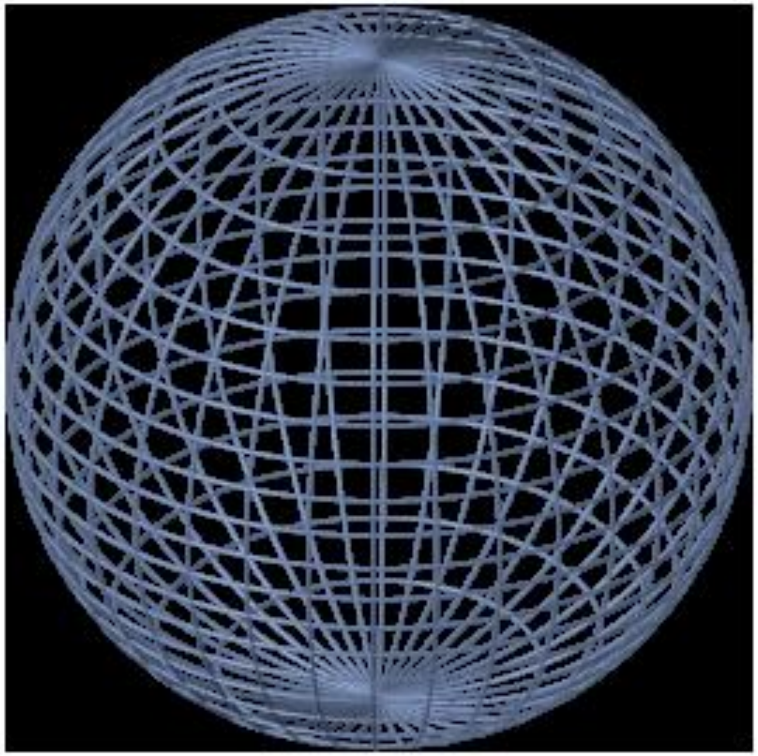
Örnek:

Koordinatları (y,x) şeklinde verilen A(2,2), B(5,7) ve C(7,4) noktaları ile, A'dan C'ye gidiş yönündeki kırıklık açısını hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$$\beta = 360^0 - (\alpha_{BA} - \alpha_{BC}) = 360^0 - \left(\tan^{-1}\left(\frac{2-5}{2-7}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{7-5}{4-7}\right)\right) = 295.35^\circ$$

Küre ve Kullanım Alanları



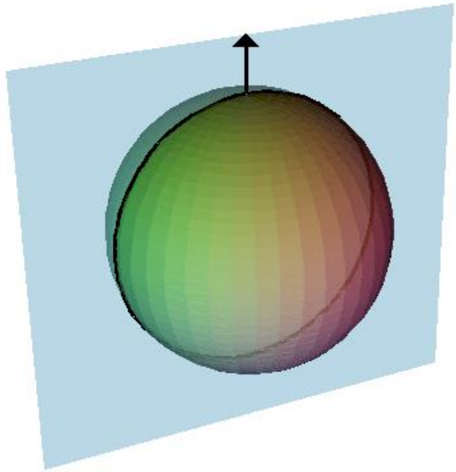
- Küre, üç boyutlu uzayda, merkez adı verilen noktaya olan uzaklıkları eşit noktalardan oluşan yüzeydir.
- Küre yüzeyine dik olan bütün doğrular kürenin merkezinden geçer.
- Birçok uygulama için dünyanın küre şeklinde kabul edilerek hesaplamalarda kolaylık sağlanmaktadır.
- Dünya bir küre kabul edildiğinde, yarıçap olarak genellikle 6371000 m alınır.

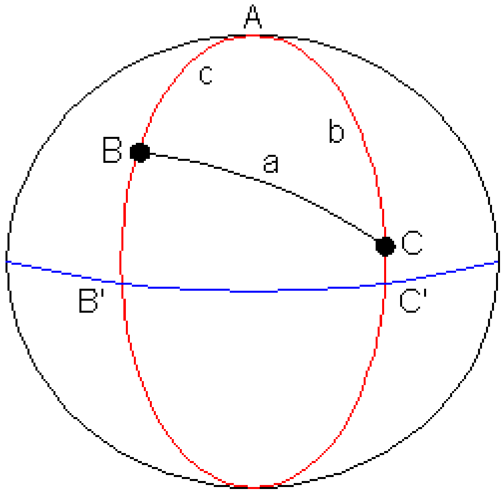
Küre ve Kullanım Alanları

Küreyi kullanan uygulamalarına örnek olarak:

- **Jeodezi** (Gravite ve konumlama uygulamaları)
- **Astronomi** (yıldız konumları, gök küresi vb.)
- **Paleotektonik** (Levhaların oluşumu)
- **Neotektonik** (güncel plaka hareketleri)
- **Hotspot Uygulamaları** (manyetik izokronlar hesaplamaları vb.)
- **Sismolojik Uygulamalar**

Küre Üzerinde Uzunluk



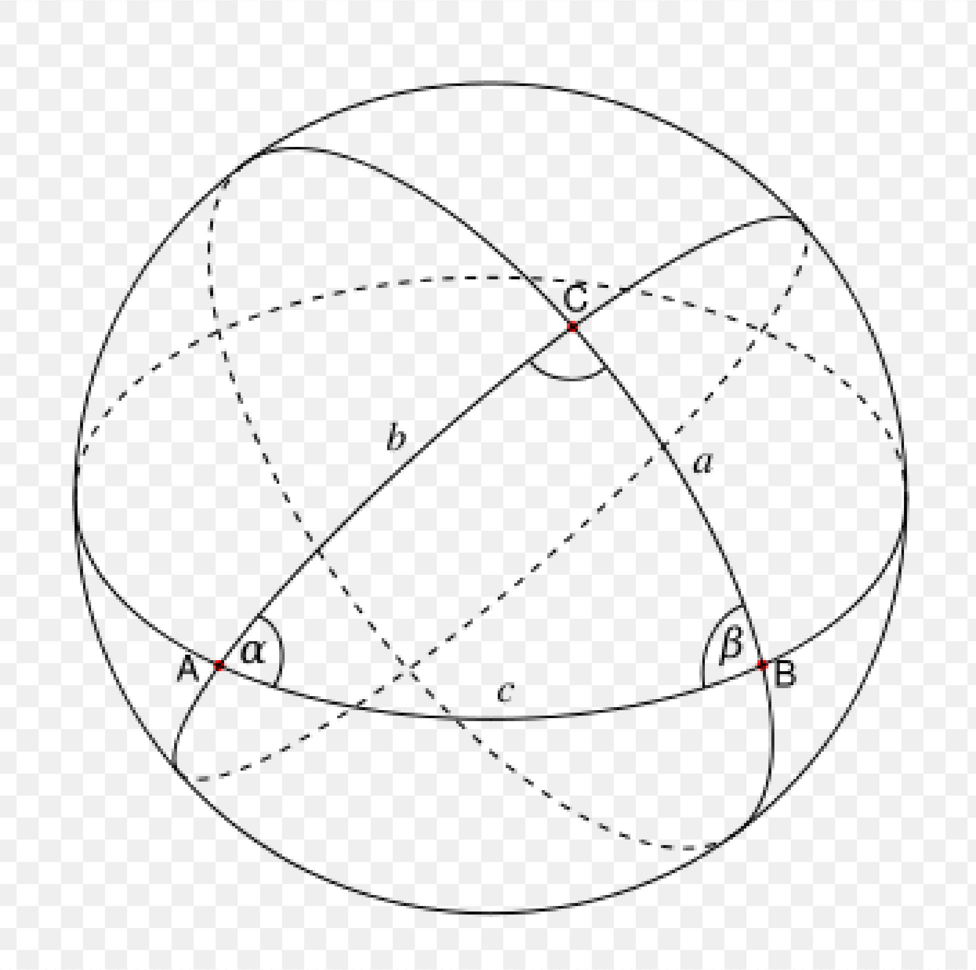


➢ Düzlemde iki noktayı birleştirilen en kısa yol doğrudur.

➢ Küre bir yüzey olduğuna göre iki noktayı birleştiren sonsuz sayıda yol (yay) bulunabilir.

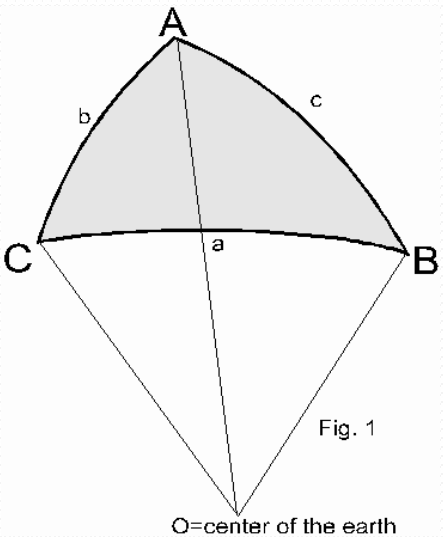
➢ **Küre üzerinde iki noktayı birleştiren en kısa yol ne olabilir? (Şekilde AB,BC,AC)**

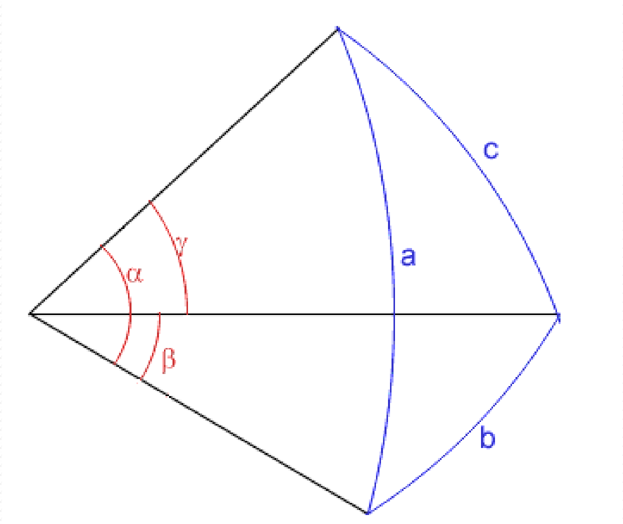
Büyük Daire Yayı



- Büyük Daire Yayları kürenin **merkezinden geçer**.
- İki nokta arasında sadece bir büyük daire yayı geçer. Bu yay iki noktayı birleştiren **en kısa mesafedir**.
- Bütün büyük daire yayları merkezden geçtiğinden tam tur devam eden büyük daire yayı bir **çember** oluşturur.

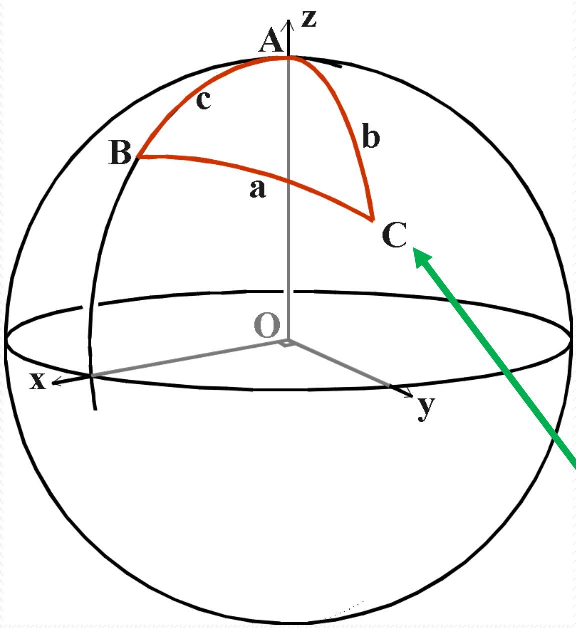
Küresel Üçgen

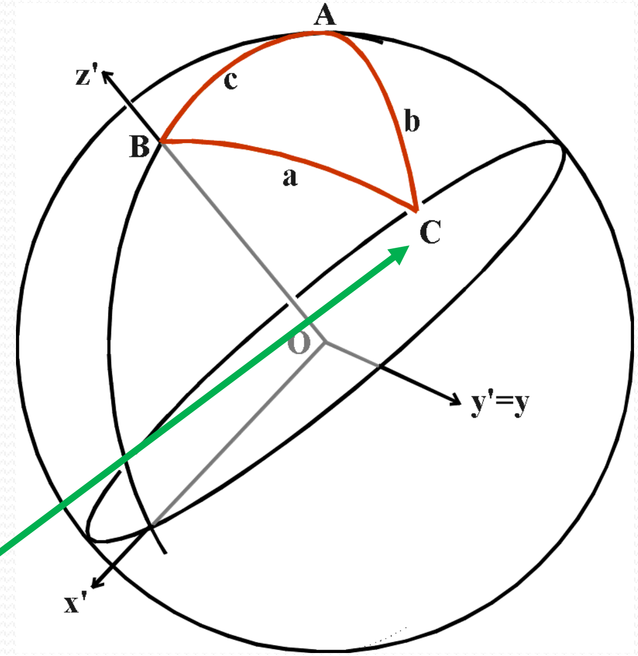




- Küresel üçgen, küre üzerindeki hesaplardaki temel geometrik büyüklüktür.
- Küresel üçgenin kenarları "**Büyük Daire Yayı**" olmak zorundadır.
- Küresel üçgen düzlem üçgen gibi üç iç açıya üç de kenara sahiptir.
- İç açıları toplamı $180^0 < T < 540^0$ şeklindedir.
- Kenarlar düzlem üçgenden farklı olarak uzunluk yerine açı biriminden ifade edilir.
- Kenarlar genellikle küçük harflerle, açılar ise büyük harflerle gösterilir.

Küresel Üçgen ile Küresel Koordinat Sistemi





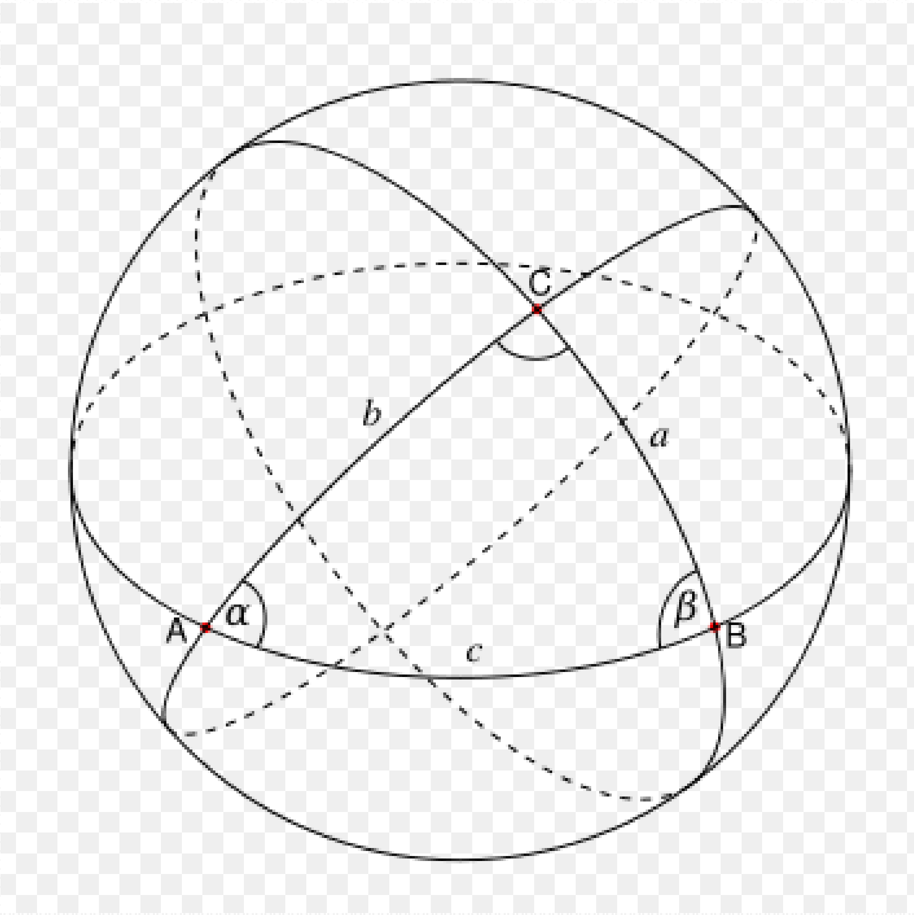
C noktasının küresel koordinatları

$x = \sin(b)\cos(A)$
$y = \sin(b)\sin(A)$
$z = \cos(b)$

$x' = \sin(a)\cos(180-B) = -\sin(a)\cos(B)$
$y' = \sin(a)\sin(180-B) = \sin(a)\sin(B)$
$z' = \cos(a)$

Sinüs Teoremi

Küresel üçgen için tanımlı Sinüs Teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

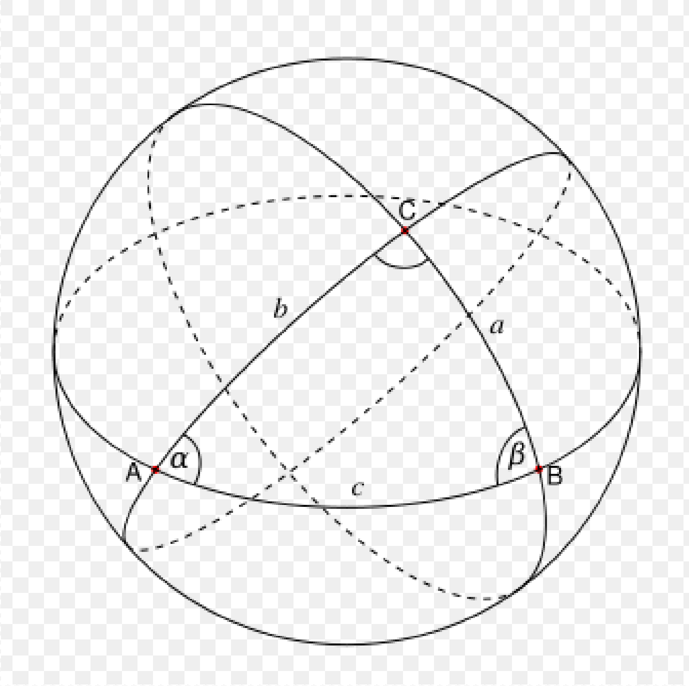


$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Cosinüs Teoremi

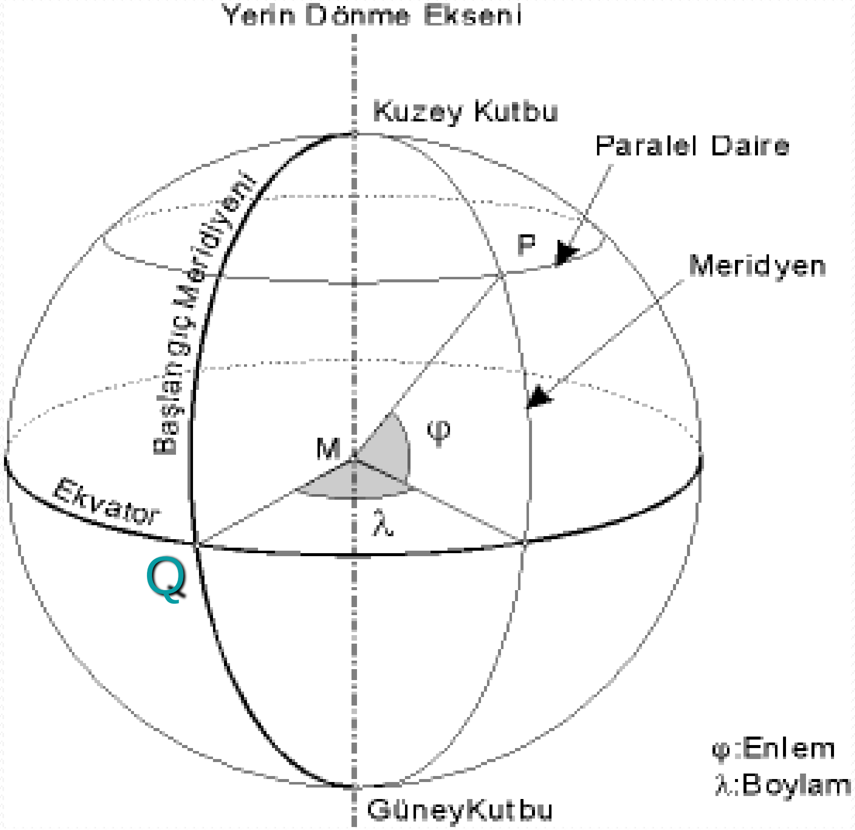
Küresel üçgen için tanımlı Cosinüs Teoremi aşağıdaki şekilde ifade edilir.



$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(A)$$
$$\cos(b) = \cos(c)\cos(a) + \sin(c)\sin(a)\cos(B)$$
$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(C)$$

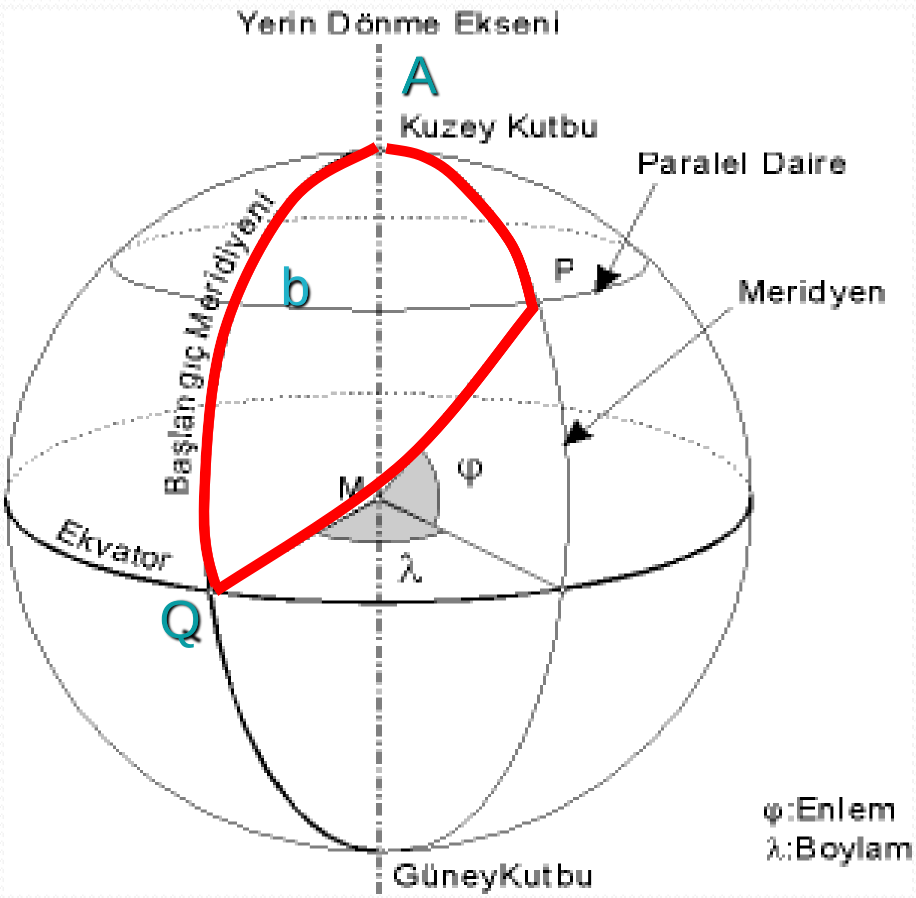
Küresel Üçgende Jeodezik (Coğrafi) Koordinatlar

Jeodezik koordinatlarla dünya üzerinde konum, uzunluk ve açı hesaplamaları yapmak için, küresel üçgenler oluşturulur.



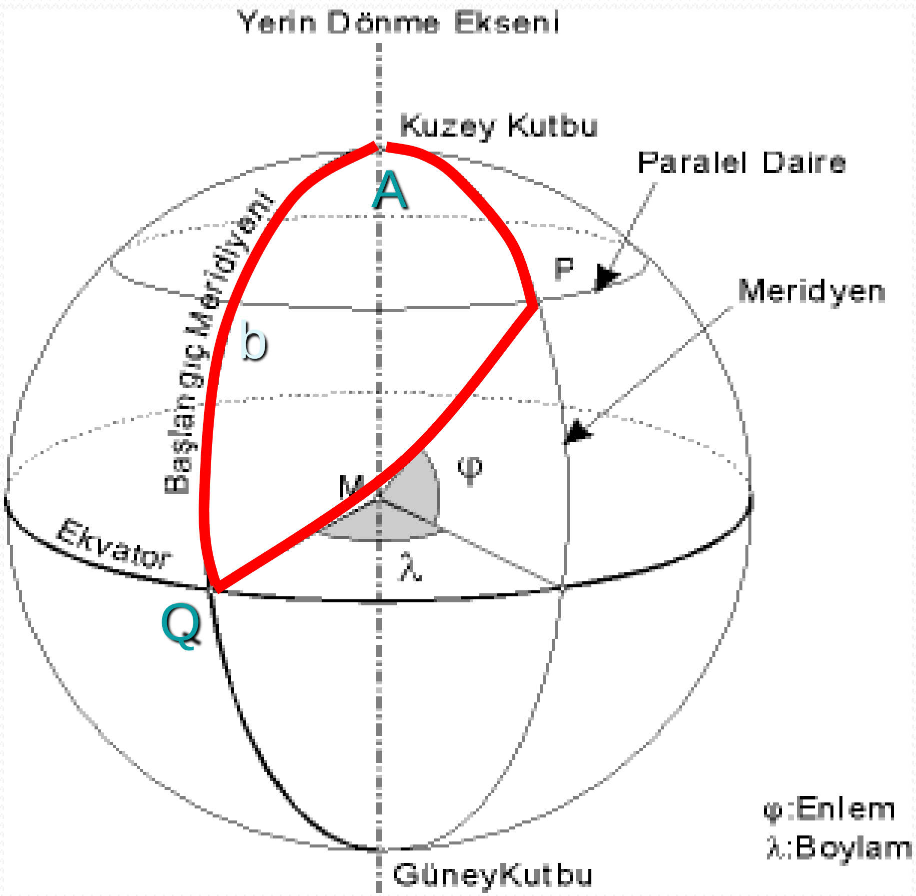
- Q ve P noktalarıyla hangi küresel üçgen oluşturulabilir?
- Oluşturulan küresel üçgende kenarlar ve açılar jeodezik koordinatlar cinsinden nasıl ifade edilebilir?

Küresel Üçgende Jeodezik (Coğrafi) Koordinatlar



- **b** kenarı nasıl ifade edilebilir?
- **A** açısı nasıl ifade edilebiir?

Küresel Üçgende Jeodezik (Coğrafi) Koordinatlar



- **b** kenarı nasıl ifade edilebilir?
  - **Q noktasının enlemi**
- **A** açısı nasıl ifade edilebiir?
  - **P ve Q noktalarının boylam farkı**

Örnekler

- **Londra'nın**
- Yaklaşık Enlem ve boylamı:
- Sırasıyla **51° 30'25" ve 00° 07'39"** şeklinde verilmektedir.

- **Ankara'nın**
  - Yaklaşık enlem ve boylamı:
  - Sırasıyla **39° 53' 13" ve 32° 45' 28"** şeklinde verildiğine göre,

- Londra'dan Ankara'ya gidecek olan bir uçak kaç derece **azimutta** uçmalıdır ?
- Ortalama 700 km/h hızda gidildiğinde **ne kadar zamanda** Ankara'ya varır? (Dünya küre kabul edilecektir)

Örnekler

Londra

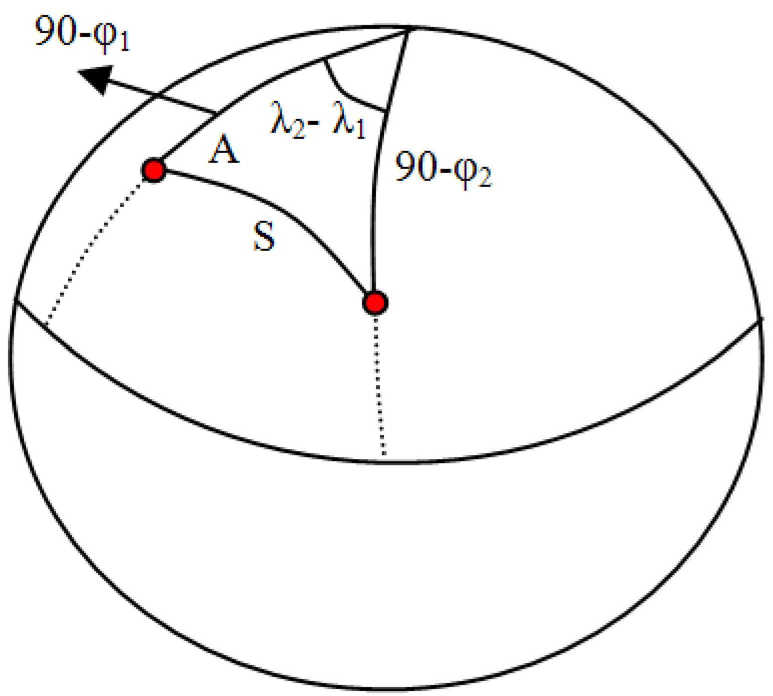
- Yaklaşık Enlem ve boylamı:
- Sırasıyla

  51° 30’25” ve 00° 07’39”

Ankara

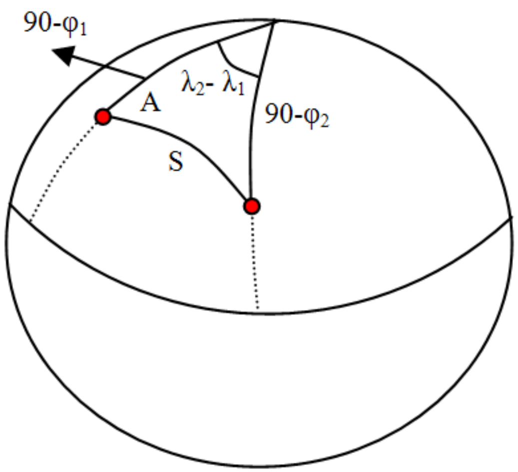
- Yaklaşık enlem ve boylamı:
- Sırasıyla

  39° 53’ 13” ve 32° 45’ 28”



Örnekler

Çözüm:



cos a = cos b . cos c + sin b . sin c . cos A

$\cos S = \cos(90-\varphi_1) \, . \, \cos(90-\varphi_2) + \sin(90-\varphi_1) \, . \, \sin(90-\varphi_2) \, . \, \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$

S = 0.441466962908742 radyan *6371 km = 2812.5860 km

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin S}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{(90-\varphi_2)}{\sin A} \Rightarrow A = 75^0.5480904$$

t = 2812.5860 / 700 = 4.0179 saat

Örnekler

Büyük daire yayı üzerinde sırasıyla,

- 10^0 ’lik ve 20^g’lık yol kateden bir bir gemi
- Kaçar km yolculuk yapmıştır?
- Dünya küre kabul edilecek olup yarıçapı 6371000 m alınacaktır.

Örnekler

Çözüm:

Büyük daire yayı üzerinde sırasıyla,

- 10^0 = 10 / 180 x pi radyan
- 10^0 = 10 / 180 x pi x 6371 km yay uzunluğu
  - **Yanıt : 1112 km**

- 20^g = 20 / 200 x pi radyan
- 20^g = 20 / 200 x pi x 6371 km yay uzunluğu
  - **Yanıt : 2001.5 km**

Örnekler

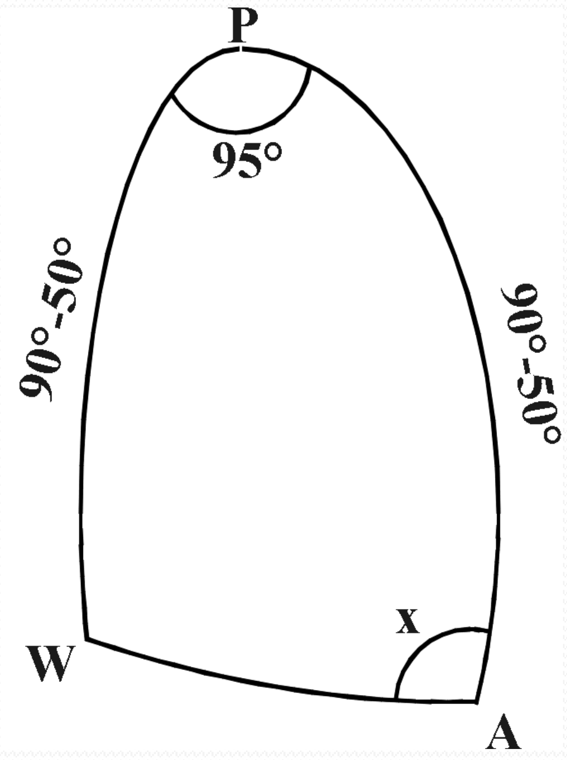
- A noktasının enlem ve boylamı 2°W, 50°N şeklinde,
- B noktasının enlem ve boylamı 97°W, 50°N şeklindedir.
- İki nokta arasındaki en kısa mesafe nedir?
- Eğer A noktasında B noktasına gidilmek istenirse, hangi azimutta yol alınmalıdır?

Örnekler

- A noktası 2°W, 50°N şeklinde,
- B noktası 97°W, 50°N şeklindedir.
- İki nokta arasındaki mesafe?
- İki nokta arasındaki azimut?

- cos AW = cos WP cos AP + sin WP sin AP cos P
  = cos240° + sin240° cos 95°
  = 0.5508 , A = 56.58°
  = **6291.4 km**

- sin A / sin WP = sin P / sin WA
  sin x = sin 40° sin 95° / sin 56.58° = 0.77
  x = 50.1° ya da 129.9°



Elipsoit Üzerinde Temel Ödevler

- Elipsoit üzerinde hesap yapmanın göreli olarak güçlüğü ve bilgisayar/hesaplama araçlarının göreli olarak yetersiz/sınırlı olması nedeniyle, tarihsel süreç içinde mümkün olduğunca sade ve doğrudan ihtiyaca dönük (kısa yaylar, göreli olarak düşük duyarlık) olarak hesaplama yöntemleri geliştirilmiştir.
- Bilgisayar ve hesaplama araçlarının zaman içinde gelişimi, gelişen teknolojilere bağlı olarak daha uzun yaylar üzerinde daha duyarlı hesaplama yapma ihtiyacı duyulmuştur.
- Gauss Ortalama Enlem, Legendre, Eggert gibi kısa ve orta uzunluklar (< 300 km) için kullanılabilecek yöntemler olmakla birlikte, bu derste Vincenty tarafından geliştirilen ve 20.000 km'ye kadar cm duyarlığında çözüm veren iç içe eşitlikleri kullanan iteratif yöntem verilecektir.

Elipsoit Üzerinde 1. Temel Ödev

$$\tan U = (1-f)\tan\phi.$$

İndirgenmiş enlem

$$\tan\sigma_1 = \tan U_1/\cos\alpha_1. \quad (1)$$

$$\sin\alpha = \cos U_1 \sin\alpha_1. \quad (2)$$

$$u^2 = \cos^2\alpha(a^2-b^2)/b^2.$$

$$A = 1 + \frac{u^2}{16384}\{4096 + u^2[-768 + u^2(320-175u^2)]\}. \quad (3)$$

$$B = \frac{u^2}{1024}\{256 + u^2[-128 + u^2(74-47u^2)]\}. \quad (4)$$

$$2\sigma_m = 2\sigma_1 + \sigma. \quad (5)$$

$$\Delta\sigma = B\sin\sigma\{\cos 2\sigma_m + \tfrac{1}{4}B[\cos\sigma(-1+2\cos^2 2\sigma_m) - \tfrac{1}{6}B\cos 2\sigma_m(-3+4\sin^2\sigma)(-3+4\cos^2 2\sigma_m)]\}. \quad (6)$$

iterasyon

$$\sigma = \frac{s}{bA} + \Delta\sigma. \quad (7)$$

Elipsoit Üzerinde 1. Temel Ödev

$$\tan\phi_2 = \frac{\sin U_1 \cos\sigma + \cos U_1 \sin\sigma \cos\alpha_1}{(1-f)[\sin^2\alpha + (\sin U_1 \sin\sigma - \cos U_1 \cos\sigma \cos\alpha_1)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\tan\lambda = \frac{\sin\sigma \sin\alpha_1}{\cos U_1 \cos\sigma - \sin U_1 \sin\sigma \cos\alpha_1}.$$

$$C = \frac{f}{16}\cos^2\alpha[4 + f(4 - 3\cos^2\alpha)].$$

$$L = \lambda - (1-C)f \sin\alpha\{\sigma + C\sin\sigma[\cos 2\sigma_m + C\cos\sigma(-1 + 2\cos^2 2\sigma_m)]\}.$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{\sin\alpha}{-\sin U_1 \sin\sigma + \cos U_1 \cos\sigma \cos\alpha_1}.$$

Elipsoit Üzerinde 2. Temel Ödev

$$\lambda = L \text{ (first approximation).}$$

$$\sin^2 \sigma = (\cos U_2 \sin \lambda)^2 + (\cos U_1 \sin U_2 - \sin U_1 \cos U_2 \cos \lambda)^2.$$

$$\cos \sigma = \sin U_1 \sin U_2 + \cos U_1 \cos U_2 \cos \lambda.$$

$$\tan \sigma = \sin \sigma / \cos \sigma.$$

$$\sin \alpha = \cos U_1 \cos U_2 \sin \lambda / \sin \sigma.$$

$$\cos 2\sigma_m = \cos \sigma - 2 \sin U_1 \sin U_2 / \cos^2 \alpha.$$

$$s = bA(\sigma - \Delta\sigma),$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\cos U_2 \sin \lambda}{\cos U_1 \sin U_2 - \sin U_1 \cos U_2 \cos \lambda}.$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\cos U_1 \sin \lambda}{-\sin U_1 \cos U_2 + \cos U_1 \sin U_2 \cos \lambda}.$$