

Hata Teorisi ve Ölçme Hataları

Prof. Dr. Bahadır AKTUĞ

Ölçü Hataları ve Sınıflandırma

Ölçü hatası, ölçülen değer ile gerçek değer arasındaki fark şeklinde tanımlanır. Hangi türden olursa olsun, ölçüler (gözlemler) **hata** içerir. Bunun nedenleri olarak;

- İnsan duyularının sınırlı olması,
- İnsan tarafından yapılan hatalar (dikkatsizlik, dalgınlık vb.)
- Kullanılan aletlerin kalibrasyonlu olmaması
- Kullanılan aletlerin kusursuz olmaması

gösterilebilir.

Hatalar, hatanın kaynağı ve ölçü üzerindeki etkilerine göre sınıflandırılır. Sınıflandırma, hataların giderilmesi açısından büyük önem taşımaktadır. Zira hatanın türüne göre giderilme yöntemleri mevcuttur.

Ölçü Hataları ve Sınıflandırma

Hataların sınıflandırılması genel olarak;

Rasgele Hatalar

(Rastlantısal Hatalar, random errors)

Sistemik Hatalar

(Yönlü hatalar, yanlışlık hataları, bias, Systematic Errors)

Kaba Hatalar

(mistakes, blunders, outliers)

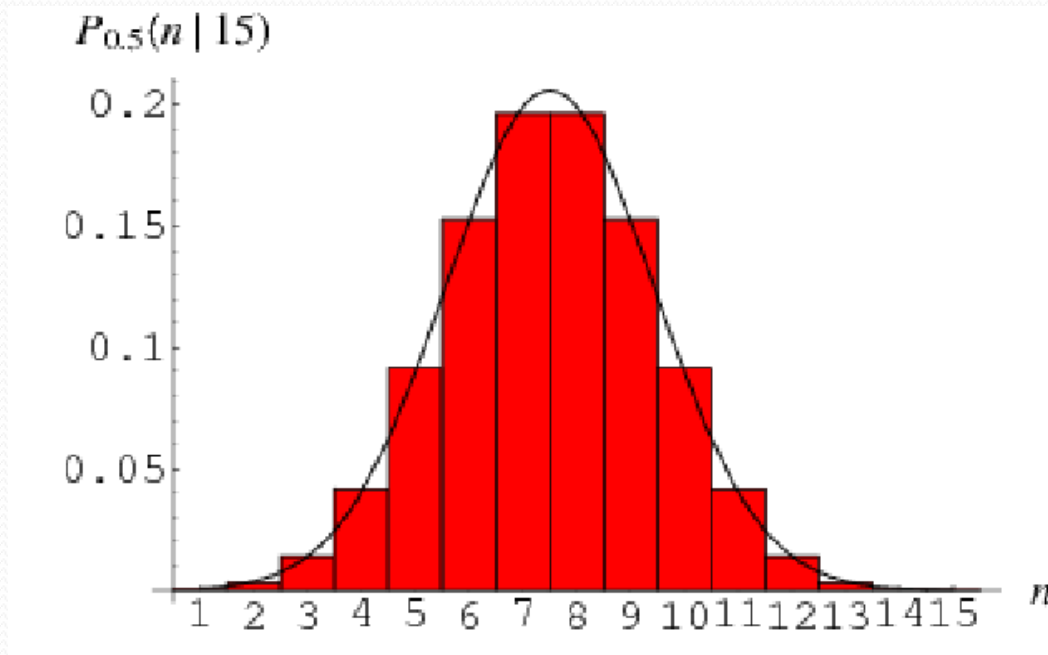
şeklindedir.

Rasgele Hatalar

- **Rastlantısal Hatalar tamamen insan duyularının sınırlı olması ve kullanılan ölçüm aletlerinin kusursuz olmamasından kaynaklanan kaçınılmaz hatalardır.**
- **Rasgele hatalar aynı zamanda hatanın değişkenliğinin ve diğer hatalar giderildiği takdirde elde edilebilecek hassasiyet için bir ölçüttür.**
- **Diğer hatalardan farklı olarak her tür ölçü mutlaka bulunur.**
- **Giderilmeleri olanaklı değildir. Ancak, daha yüksek hassasiyetli aletler kullanılarak azaltılabilirler.**

Rasgele Hatalar

Rasgele hatalar giderilemese de, belirli bir istatistiksel dağılıma uyarlar. Ölçü sayısı yeterli ise ölçü hatalarının normal dağılımlı bir rasgele değişken olduğu kabul edilebilir.



Şekil, hataların büyüklüğü ve sıklığı ilişkisi hakkında bize neyi gösteriyor?

Sistemik Hatalar

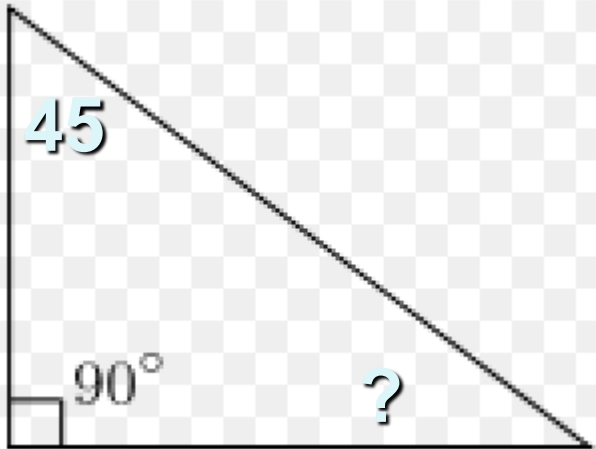
Sistemik hatalar, ayarsız aletler ile yapılan ölçüler ve/veya hataları yöntemden kaynaklanan ve ölçülere belirli bir yönde etki eden hatalardır. Sistemik hataların giderilmesi için ölçü aletlerinin kalibre edilmesi gerekir. Ölçü aletine bağlı sistemik hatalar için aşağıdaki örnekler verilebilir:

- Evden her zaman aynı saatte çıkıyorsanız ve saatiniz ileri ise her zaman olması gerekenden daha erken çıkarsınız.
- 30 cm lik bir cetvelin baş tarafının aşındığını düşünelim. Bu cetvel ile yapılacak uzunluk ölçümleri olması gerekene göre nasıl olur?

Sistemik Hatalar

Kullanılan yöntemle bağılı sistemik hatalar için bir düzlem üçgenin iç açılarını hesaplamak istediğimizi düşünelim.

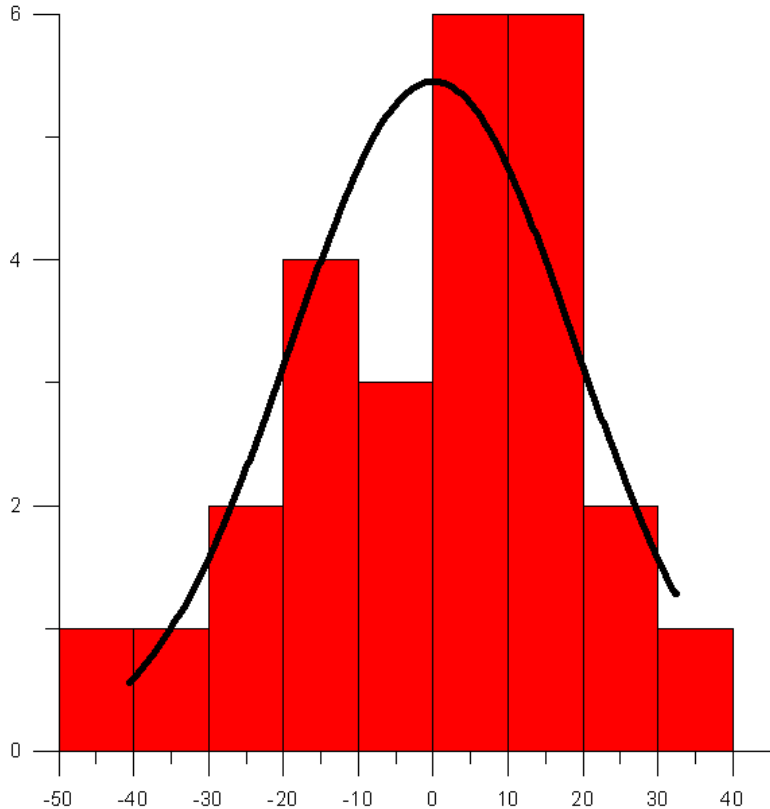
Eğer, yöntem hatalıysa (örneğin üçgenin iç açıları toplamını 180 yerine 170 derece olarak hesap yapılırsa, bulduğumuz açı değeri her zaman gerçek değere göre nasıl olur?



Kaba Hatalar

- Kaba Hatalar, temelinde insan kaynaklı hatalardır. Genelde yanlış kayıt alma, dikkatsizlik, dalgınlık gibi nedenlerle meydana gelir. Ancak, ölçü aletlerindeki ani arızalar ya da ölçülen büyüklükteki ani değişimlerde kaba hata yaratır.
- Kaba hatalar, genel olarak diğer hatalardan daha büyük değerdedir.
- Bu nedenle tespit edilebilmesi için en geçerli yöntem ölçüleri ve hataları incelemektir.

Ölçü Hatalarının Tespiti



- Yandaki şekil geçen yılın final sınavı sonuçlarının ortalamaya göre dağılımını göstermektedir.
- **Sınavdaki her sonuç bir ölçü olsaydı, hatalar hakkında neler söylenebilirdi?**

Örnekler

Toptan kuru gıda satın alan bir esnaf bir süre sonra kullandığı tartının, üzerinde ağırlık yokken bile 4.520 kg gösterdiği farkeder.

Bu durumda önceden tartılan malzemelerin ağırlıklarının ölçümünde ne tür bir hata oluşmuştur? Neden?

Örnekler

Bunun üzerine aldığı 20 kg. lık malzemeyi A, B ve C firmalarına da tarttırmaya karar veren esnafa,

A firması ürünün 19.970 kg,

B firması 20.090,

C firması ise 17.460 kg olduğunu bildirir.

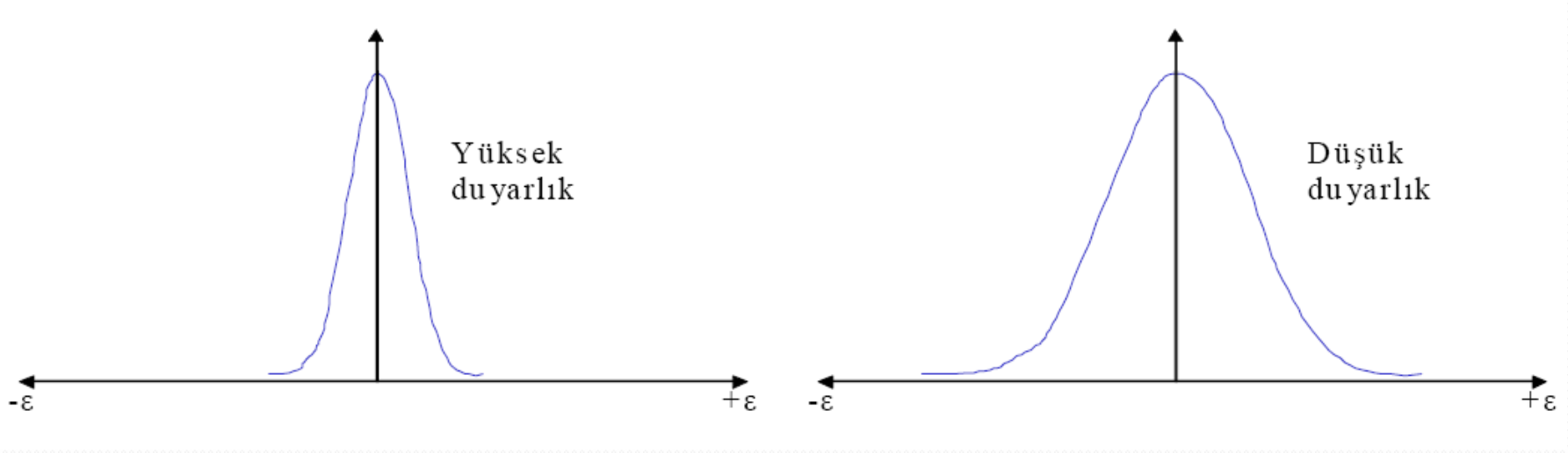
**A, B ve C firmaları ne tür ölçme hataları yapmıştır?
Neden? Malzemenin gerçek ağırlığını bulmak için ne önerirsiniz?**

Doğruluk ve Hassasiyet Kavramları

Doğruluk (Accuracy), bir ölçünün gerçek değere yakınlığıdır. Gerçek değer çoğu zaman bilinmediğinden başka bir ölçü sistemi ile karşılaştırılarak belirlenir.

Duyarlık (Prezisyon, Hassasiyet, İncelik, Precision), bir ölçü sisteminin tutarlılığı ile ilgilidir. Ölçülerde sistematik hatalar bulunsa bile ölçü değerlerinin birbirlerine yakın olması gerekir. Sistematik Hata olmadığında, yüksek duyarlıklı bir ölçme sistemi aynı zamanda yüksek doğruluklu bir ölçme sistemidir.

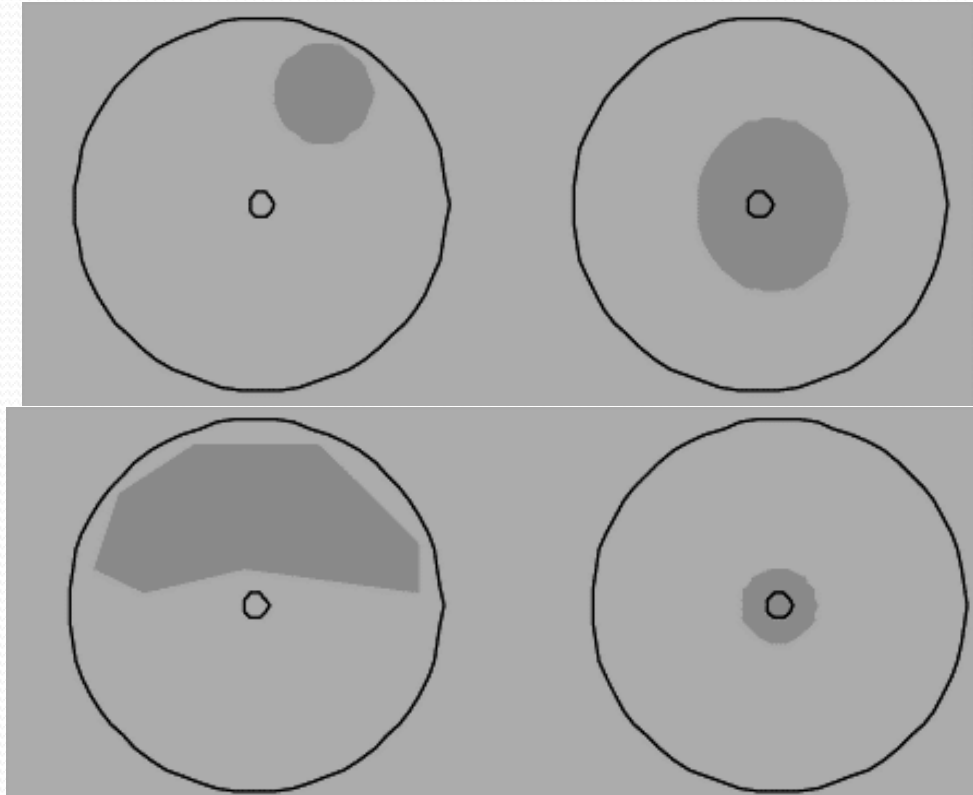
Doğruluk ve Hassasiyet Kavramları



Hataların ortalaması gerçek değerden farklı olsa bile yüksek duyarlıklı bir sistem kolayca ayırt edilebilir.

Doğruluk ve Hassasiyet Kavramları

Dairenin merkezi gerçek değer ise herbir şekil için doğruluk ve duyarlık hakkında neler söylenebilir?



Hata Yayılma Yasası

Arzu edilen geometrik veya fiziksel büyüklükler (bilinmeyenler) genel olarak ölçülerle dolaylı olarak bulunur.

Bulunan değerlerin duyarlılığı iki faktöre bağlı olarak değişir:

- Kullanılan **ölçülerin duyarlılığı**,
- Ölçüler ile bilinmeyeni ilişkilendiren **fiziksel veya matematiksel model**

Hata Yayılma Yasası ölçüler ile, ölçüler yardımıyla bulunan büyüklüklerin hataları arasındaki ilişkiyi kurar.

Hata Yayılma Yasası

Bir $f(a,b)$ fonksiyonu için Hata Yayılma Yasası,

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \right)^2 \sigma_b^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial b} COV_{ab}$$

şeklinde verilir. Burada, COV a ve b arasındaki kovaryanstır. Eğer a ve b korelasyonsuz ise bu durumda yukarıda formül;

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \right)^2 \sigma_b^2$$

haline gelir.

Hata Yayılma Yasası

$z = f(a,b)$ fonksiyonu yerine a ve b ölçüleri ile belirlenen z büyüklüğü düşünülürse; ölçülerin bağımsız dolayısıyla korelasyonsuz olduğu kabulü yapılabilir (tersi doğru değildir. Korelasyonsuz olmak bağımsız olmak anlamına gelmez). Bu durumda, bilinmeyen ölçülere göre kısmi türevleri ile ölçü hataları kullanılarak bulunan büyüklüğün hata değeri aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \right)^2 \sigma_b^2$$

Örnek

100 m lik bir yolun uzunluęu 20 m lik elik şerit ile ölçölüyor.

20 m uzunluk ölçümündeki hata ± 3 cm ise, yolun uzunluęunun hatası nedir?

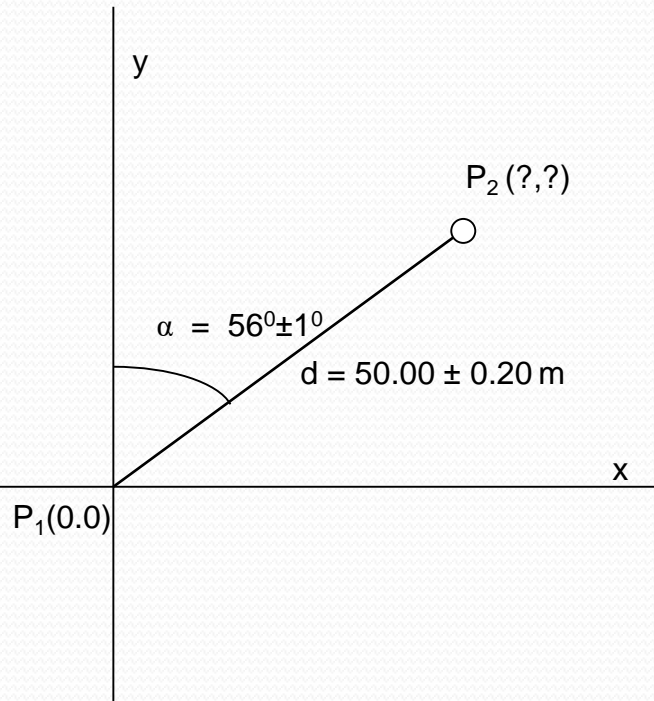
Örnek

100 m lik bir yol = 5 x 20 m lik çelik şerit

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)^2 \sigma_\alpha^2 = 5 \cdot 1^2 \cdot 3^2 = 45 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_y = \pm 6.7 \text{ cm}$$

Örnek



Şekilde verilen ölçülere göre, P_2 noktasının (x,y) koordinatları ile Bu koordinatlara ait hatalarını bulunuz.

Örnek

$$X_{P2} = X_{P1} + \sin(\alpha) \cdot d$$

$$Y_{P2} = Y_{P1} + \cos(\alpha) \cdot d$$

$$X_{P2} = 0 + \sin(56) \cdot 50$$

$$Y_{P2} = 0 + \cos(56) \cdot 50$$

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{\partial X_{P2}}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial X_{P2}}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 = d^2 \cos^2 \alpha \cdot \sigma_\alpha^2 + \sin^2 \alpha \cdot \sigma_d^2 = 0.2656 \text{ m}^2$$

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial Y_{P2}}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial Y_{P2}}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 = d^2 \sin^2 \alpha \cdot \sigma_\alpha^2 + \cos^2 \alpha \cdot \sigma_d^2 = 0.5359 \text{ m}^2$$

$$\sigma_x = \pm 0.5154$$

$$\sigma_y = \pm 0.7321$$

