Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Jeofizik Mühendisliği Bölümü

SİSMOLOJİ DERS NOTLARI

Doç Dr. Bülent Kaypak

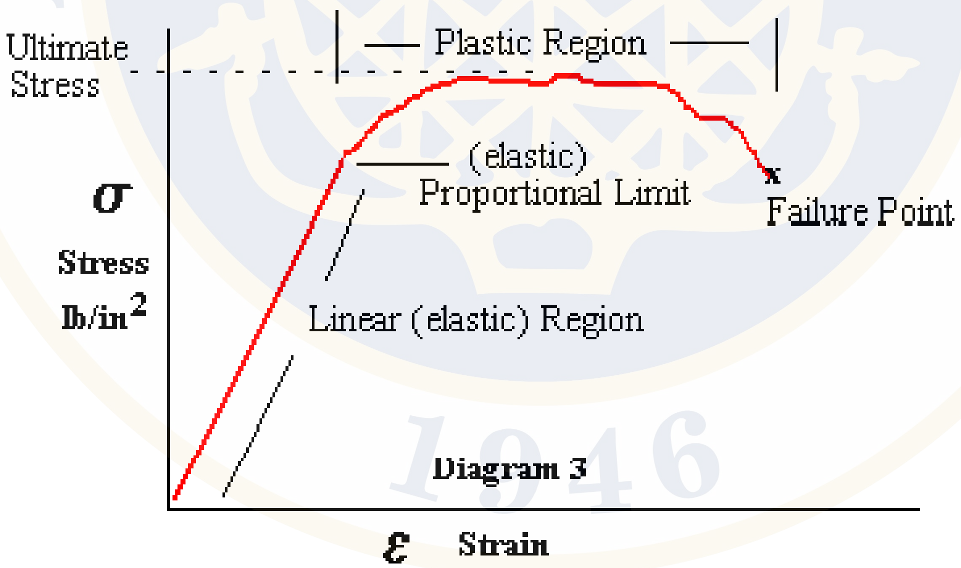
2006
ANKARA

2. ESNEKLİK KURAMI

Yer içerisinde yayılan sismik dalgalar veya deprem dalgaları esnek (elastik) dalgalar olarak bilinmektedir. Bununla birlikte, sismik dalgalar yer içerisinden ilerlerken yerkürenin esnek, homojen ve yön bağımsız olduğu varsayımı yapılmaktadır. Yer içerisinde meydana gelen bir patlatmadan veya bir depremden söz ederken, yer içindeki malzemenin gerilmesinden (stress) ve bir biçim değişikliğinden, yamulmadan (strain) söz etmiş oluruz.

2.1 Esneklik

Esneklik, bir cismin, etkisinde kaldığı iç kuvvetler ortadan kalktığında yeniden ilk biçim ve boyutları kazanma yeteneğidir. İdeal esnek davranış söz konusu olduğunda, gerileme ve biçim değiştirme arasında birebir bağlantı vardır. Bu bağlantı doğrusal olduğunda "esneklik doğrusaldır" denir (Şekil 2.1). Esneklik sınırı ,malzemenin biçim değiştirmeksizin etkisinde kalabileceği en yüksek gerilme değeridir. Bu değer aşıldığında malzemede kalıcı ve tersinmez biçim değişiklikleri görülür (Şekil 2.1). Maddeler üzerinde kuvvet uygulandığında, şekillerinde az ya da çok değişmeler olur. Bir yay çekilirse uzar, sıkıştırılırsa kısalır. Süngeri elimizle bastırdığımızda şekli değişir, elimizi çekince eski şeklini alır. Çelik bir çubuğun bir ucu sabitleşip diğer ucundan bir kuvvet uygulanırsa çubuk eğilir, kuvvet kaldırıldığında çubuk eski şeklini alır. Şekil değiştirici kuvvet ortadan kalktığında eski şeklini alan maddelere *esnek maddeler* denir.



Şekil 2.1 Gerilme-yamulma ilişkisi

Doğrusal esneklik kuramı, gerilme ve biçim değiştirme arasında homojen ve doğrusal bağlantılar bulunduğu temel varsayım olarak kabul eden öğretinin özünü oluşturur. Bu bağlantılar Hooke Yasası'nın bir genellemesidir.

Hook Yasası: Bir-boyutlu ortam içerisinde gerilme (σ) ile birim uzama (ε) orantısını gösteren

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (1)$$

bağıntısına *Hooke Yasası* denir. Burada E, *Young Modülü*'nü göstermektedir. Bu yasa yalnız doğrusal şekil değiştirmeler için geçerlidir. Esneklik modülü büyük olan malzemelere katı (rijit), küçük olanlara esnek (fleksibl) malzeme denir. Örneğin metaller katı, plastikler esnek malzeme sayılır. Esneklik sınırı (σ_e), kaldırıldığı zaman plastik (kalıcı) uzamanın görülmediği, veya diğer bir deyişle yalnız esnek (kalıcı olmayan) şekil değiştirmenin oluştuğu en yüksek gerilmedir.

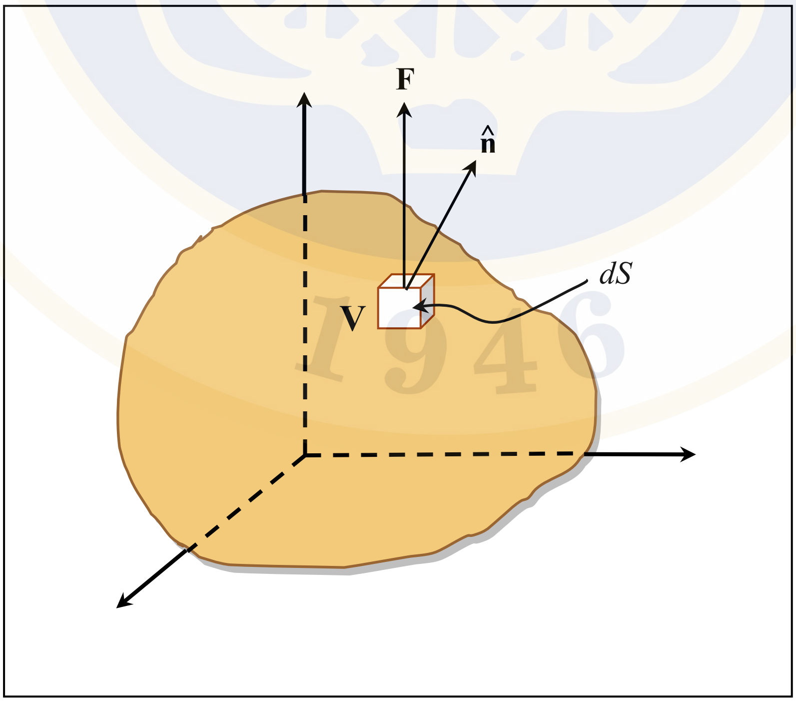
2.2 Gerilme (stress)

Gerilme, uygulanan yükler altında, bir cismin her bir birim alanındaki içsel kuvvetlerin dağılımının bir ölçüsüdür. Kısaca birim alana uygulanan kuvvet miktarıdır. Basınç ile aynı birimlere sahip olmasına karşın gerilme, hem doğrultu hem de üzerine uygulanan yüzey ile değiştiğinden basınçtan daha karmaşık değerlere sahiptir. Bu nedenle basınç, gerilmenin özel bir durumudur.

Bir cisim üzerine etki eden iki kuvvet söz konusudur.

1) *Cisim kuvveti (fi)* : Cisim içerisindeki her noktaya uygulanır ve net kuvvet cismin hacmiyle orantılıdır. Örneğin, çekim kuvveti (F=m.g), elektromanyetik kuvvetler gibi.
2) *Yüzey kuvveti (Ti)* : Bir cismin yüzeyine uygulanan ve net kuvveti cismin yüzey alanı ile orantılı olan kuvvettir. Örneğin bir uçağa uygulanan rüzgar direnci gibi.

Geniş sürekli bir ortam içerisinde, *S* yüzeyine sahip, küçük bir *V* hacmine uygulanan kuvvetleri düşünelim (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 Bir hacim elemanı üzerine uygulanan yüzey kuvveti

$$Gerilme = \frac{F}{A},$$

ya da her bir alana düşen kuvvet miktarı (N/m^2), 1 N/m^2 = 1 kg/m.sn^2 = 1 Pa (Pascal)

1 atm = 1000 mbar = 1 bar = 10^5 Pa

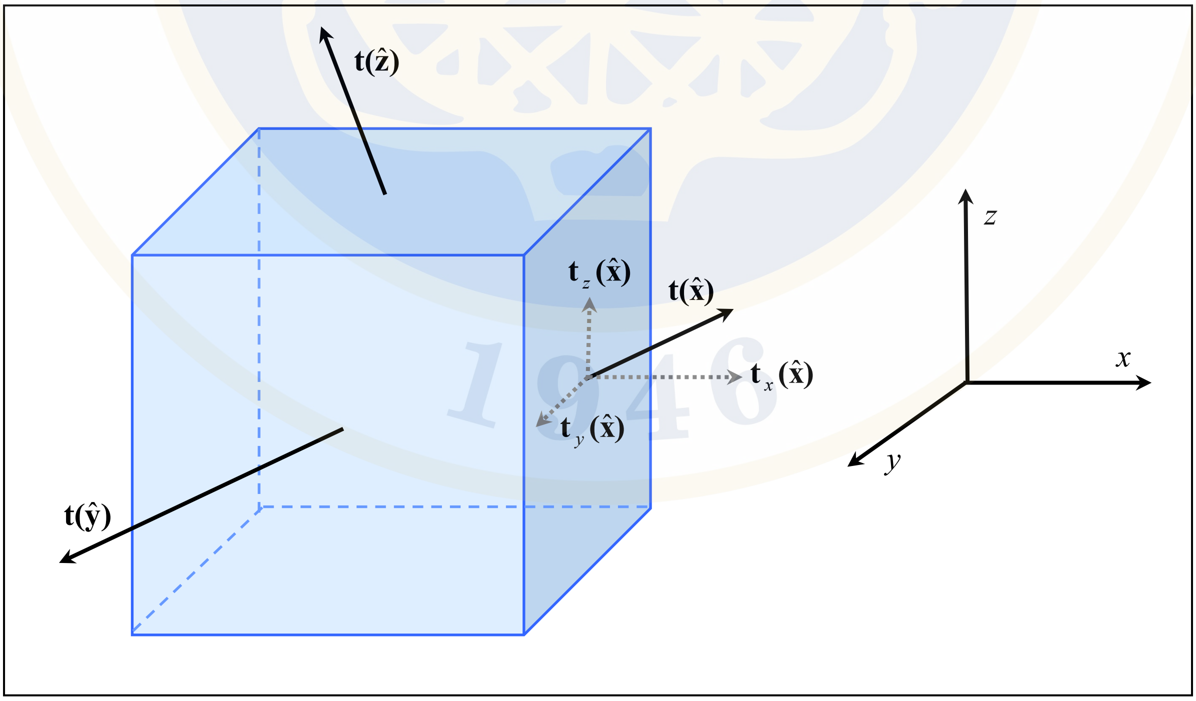
Örnekler:

Derinlik (km)	Bölge	Basınç (GPa)
0-24	Kabuk	0 – 0.6
24-400	Üst Manto	0.6 – 13.4
400-670	Geçiş Zonu	13.4 – 23.8
670-2891	Alt Manto	23.8 – 135.8
2891-5150	Dış Çekirdek	135.8 – 328.9
5150-6371	İç Çekirdek	328.9 – 363.9

Şekil 2.2'de yüzey kuvveti (**F**), birim normal vektöre (**n**) sahip her bir yüzey elemanına (**dS**) uygulanmaktadır. Bir hacim elemanının yüzeyine etki eden kuvvetler, üç adet çekme vektörü ile tanımlanabilir. Bu tanımla çekme vektörü, **t**, herhangi bir noktadaki bölünemeyecek kadar küçük her bir birim alandaki yüzey kuvveti ile sınırlıdır.

$$GerilmeVektörü = Çekme = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \lim_{\delta S \to 0} \frac{F}{\delta S} = \left(t_x, t_y, t_z\right) \quad (2)$$

Her bir çekme vektörü, koordinat sistemindeki eksenlere dik yüzeylere etki etmektedir. Çekme vektörünün (**t**), düzleme dik olan bileşenine *normal gerilme*, paralel olan bileşenine ise *kesme gerilmesi* denmektedir.



Şekil 2.3 Birim hacim elamanın yüzeyleri üzerindeki çekme kuvvetleri.

Şekil 2.3'de kartezyen koordinat sistemi üzerinde gösterilen gerilme tensörü, **t**, *xy*, *xz* ve *yz* düzlemleri boyunca çekme vektörleri anlamında şu şekilde tanımlanabilir:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} t_x(\hat{\mathbf{x}}) & t_x(\hat{\mathbf{y}}) & t_x(\hat{\mathbf{z}}) \\ t_y(\hat{\mathbf{x}}) & t_y(\hat{\mathbf{y}}) & t_y(\hat{\mathbf{z}}) \\ t_z(\hat{\mathbf{x}}) & t_z(\hat{\mathbf{y}}) & t_z(\hat{\mathbf{z}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Matris ifadesinden de görüleceği üzere gerilme, dokuz elemanlı bir tensördür fakat simetriden dolayı altı elemanla da tanımlanabilmektedir. Genelde katılar statik dengede olduklarından, kesme gerilmesinden kaynaklanan net bir dönme hareketi yoktur. Örneğin, *xz* düzlemindeki kesme gerilmeleri düşünülecek olursa, denge hali için $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ olacaktır. Benzer şekilde $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ve $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ olacaktır. Böylece gerilme tensörü,

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Matris içerisindeki köşegen elemanlar ($\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}$) normal gerilmelere, diğer elemanlar ise kesme veya teğetsel gerilmelere karşılık gelmektedir. Normal gerilmeleri σ simgesi ile gösterirsek,

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Gerilme tensörü içerisinde yer alan bu altı eleman, herhangi bir ortam içerisinde verilen bir noktadaki gerilme durumunu tanımlamaya yetecektir. **n** ile tanımlanan herhangi bir dönme düzlemi boyunca çekme gerilmesi, gerilme tensörü ile **n**'nin çarpılması ile elde edilir.

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\tau}\hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} t_x(\hat{\mathbf{n}}) \\ t_y(\hat{\mathbf{n}}) \\ t_z(\hat{\mathbf{n}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{n}_x \\ \hat{n}_y \\ \hat{n}_z \end{bmatrix} \tag{6}$$

Herhangi bir gerilme tensörü için, **n**'ye dik düzlemler boyunca hiçbir kesme gerilmesinin olmadığı bir **n** doğrultusu bulmak her zaman olasıdır. Yani **t**(**n**), **n** doğrultusundadır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \lambda\hat{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\tau}\hat{\mathbf{n}}, \\ &\boldsymbol{\tau}\hat{\mathbf{n}} - \lambda\hat{\mathbf{n}} = 0, \\ &(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{I}\lambda)\hat{\mathbf{n}} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Bu bir eigen değer / eigen vektör problemidir. Burada, **I** birim matris, λ, eigen değer yada asal gerilmeler, **n** ise eigen vektör yada asal eksenlerdir.

$$\det[\boldsymbol{\tau} - \mathbf{I}\lambda] = 0 . \quad (8)$$

Gerilme tensörünün determinantının alınmasıyla λ için üçüncü derecen üç bilinmeyenli bir denklem elde edilecektir. Bu denklemin çözülmesiyle eigen vektörleri veya asal gerilme eksenleri bulmak için tekrar yerine yazılacak olan üç tane çözüm bulunacaktır. Sayısal değerlerin yerine yazılmasıyla bütün kesme gerilmeleri sıfır olacak ve geriye sadece köşegen elemanlardaki asal gerilmeler diğer bir deyişle normal gerilmeler kalacaktır.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Burada bileşenlerin büyüklük değerleri şu şekildedir:
$|\sigma_{xx}| > |\sigma_{yy}| > |\sigma_{zz}|$

Eğer, $|\sigma_{xx}| = |\sigma_{yy}| = |\sigma_{zz}|$ olursa, gerilme alanı *hidrostatik* olarak adlandırılır ve kesme gerilmesinin oluştuğu herhangi bir dönme düzlemi bulunmaz.

Gerilme çeşitleri

1. Tek-eksenli gerilme, örnek $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{zz} \neq 0$
2. Düzlemsel gerilme, örnek $\sigma_{xx} \neq 0$, $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{zz} \neq 0$
3. Tam kesme gerilmesi - iki gerilme bileşeninin büyüklük olarak eşit fakat ters yönlerde olduğu durumdur, örnek $\sigma_{xx} = -\sigma_{yy}$
4. Yön bağımsız, lithostatik, hidrostatik gerilme - her yerde eşit gerilme değeri. Ortalama gerilme M;
   $$M = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) /3$$
5. Deviatrik gerilme – esas gerilme etkisi kalktıktan sonra geriye kalan gerilme durumudur. Bu gerilme hareket yükselimini ifade eder ve sismolojideki en önemli gerilme türüdür.

Tensör matematiksel olarak genelleştirilmiş bir değer veya tüm skaler, vektör, matris ve doğrusal işleçleri içeren geometrik durumun özel bir halidir.

2.3 Yamulma (strain)

Yamulma, bir cismin gerilme uygulandıktan sonra başlangıca oranla şekil ve boyutlarında meydana gelen değişikliğin miktarı olarak tanımlanır. Bu biçim değişikliği (deformasyon), yamulma tensörü ile ifade edilebilir. Yamulma göreceli bir ölçümdür ve bu nedenle boyutsuzdur. Yamulma, malzemenin konumundaki mutlak değişimden çok malzemenin şekil değişikliği ile ilgilidir. Örneğin, uzama yamulması, uzunluğa karşılık gelen uzamadaki değişim olarak tanımlanır. Bir ucundan tutturulmuş 100 m uzunluğundaki bir ip, 101 m'ye kadar eşit şekilde çekilirse, yer değiştirme alanı ip boyunca 0'dan 1 m'ye değişecektir. Oysa yamulma alanı ise ipin her yerinde 0.01 (%1) sabit değerini alacaktır. Genel anlamda bir eksen boyunca meydana gelen yamulmayı şu şekilde tanımlayabiliriz;

$$Yamulma = \frac{uzunluktaki\ \deg isim}{baslangic\ uzunlugu}$$

Bir malzeme çekildiği zaman uzamadaki değişim ve yamulma pozitif, sıkıştırıldığı zaman ise negatif olacaktır. Normal ve kesme olmak üzere iki türlü yamulma şekli vardır. *Normal yamulma* üç ana eksen boyunca olan yamulma türüdür. Eksenler boyunca meydana gelen yamulmada malzemenin şekli değil sadece boyutları değişmektedir. Diğer bir deyişle açılarda bir değişim olmamaktadır. *Kesme yamulması* ise malzeme boyutlarının değişmediği ancak şekil bozukluğunun meydana geldiği yamulma türüdür. Yamulmanın ölçütü açılardaki değişim ile ilgilidir.

Normal yamulmalar için genellikle ε simgesi ve gerilmede olduğu aynı eksen indisleri kullanılır. Örneğin *x, y, z* eksenlerine karşılık gelen yamulmalar ε_{xx}, ε_{yy}, ve ε_{zz}'dir. İndislerdeki ilk harf, yer değiştirmenin olduğu düzleme dik yönü, ikinci harf ise yer değiştirme doğrultusunu vermektedir.

Yamulma ile ilişkili diğer bir nicelik ise *yer değiştirmelerdir.* Bunlar kısaca malzemenin herhangi bir noktası tarafından hareket ettirilen uzaklıktır. *x, y, z* yönlerindeki yer değiştirmeler, u_x, u_y, u_z ile gösterilir. Malzemede bir yamulma oluştuğu zaman, yer değiştirme miktarları noktadan noktaya göre değişir. x_0 gibi bir referans noktasından çok yakında bulunan herhangi bir *x* noktasındaki yer değiştirmenin u=(u_x, u_y, u_z) olduğunu düşünelim. Bu yer değiştirme Taylor serisine açılırsa,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \mathbf{u}(\mathbf{x_0}) + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$= \mathbf{u}(\mathbf{x_0}) + \mathbf{Jd}$$

Burada $\mathbf{d} = \mathbf{x}\text{-}\mathbf{x_0}$ dir. **J** ise Jacobian matrisidir. Taylor açılımında yüksek dereceli kısmi türevler terimler ihmal edilmiştir. **J,** simetrik ve asimetrik parçalara ayrılarak şu şekilde yazılabilir.

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Omega} \tag{11}$$

Burada yamulma tensörü **ε** simetriktir ($\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$) ve şu şekilde verilmektedir.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Dönme (rotasyon) tensörü **Ω** ise ters simetriktir ($\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$) ve şu şekilde verilmektedir;

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Sismolojide biz sadece malzemenin biçim değişikliği yani yamulma tensörü ile ilgileniriz, katı cismin dönmesi yani dönme tensörü ile değil.

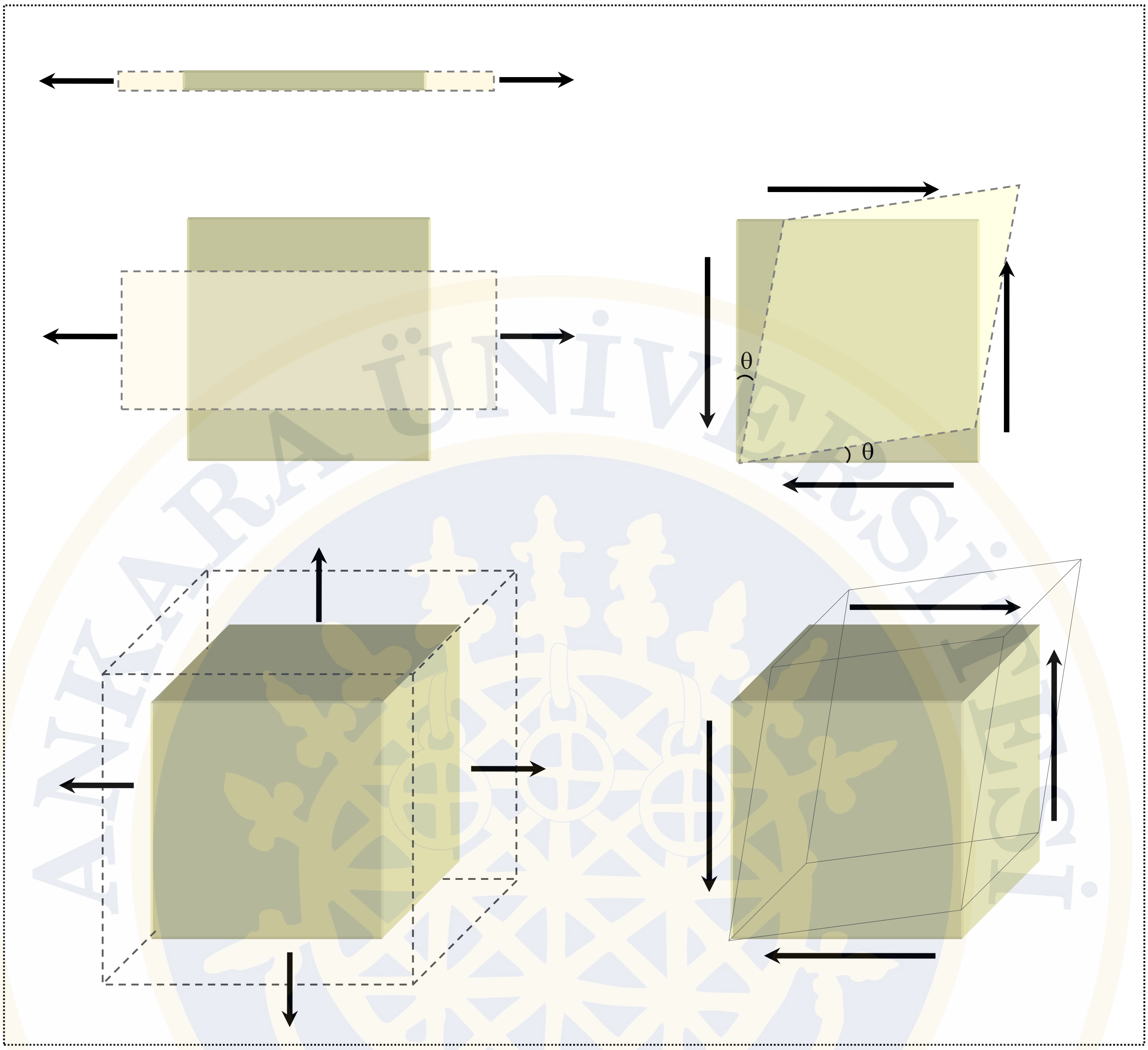
Üç boyutlu ortam içerisinde gerilme, genellikle malzemenin hacimsel değişimine neden olur (Şekil 2.4). Sadece normal (asal) gerilmeler, hacim yamulması ile ilişkilidir. Hacimsel yamulmayı δ ile gösterecek olursak

$$\delta = \frac{Hacimdeki\ \deg isim}{Baslangictaki\ hacim}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bağıl hacim değişimi yada dilatasyon

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\left(V - V_0\right)}{V_0} = \frac{\Delta V}{V_0} \\ &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \end{aligned} \tag{14}$$

şeklinde verilir. Yamulma tensörü de gerilme tensörü gibi simetriktir ve altı bağımsız elemandan oluşmaktadır.



Şekil 2.4. Bir cisim üzerindeki normal ve kesme yamulmalarının bir, iki ve üç boyutlu ortamlar için gösterimi.

2.4 Gerilme - Yamulma İlişkisi

Herhangi bir malzeme gerilme altında kaldıkça şekil ve hacim değiştirmeye kısaca yamulmaya başlar. Gerilme-yamulma ilişkisi malzemeden malzemeye farklılık gösterir. Bu tür malzemeler aşağıdaki şekilde isimlendirilirler;

Ensek (elastic) malzeme : Gerilme altında biçim değiştiren ancak gerilme kalktıktan sonra tekrar başlangıçtaki boyut ve şekline dönen malzemelerdir. Kalıcı bir şekil bozukluğu yoktur.

Kırılgan (brittle) malzeme : Uygulanan gerilmeler altında kırılarak deformasyona uğrayan malzemelerdir. Örnek cam kırılgan bir malzemedir. Düşük ısı ve basınçta kayaçlar kırılgan bir özelliğe sahip olurlar.

Sünek (ductile) malzeme : Kırılmadan deformasyona uğrayan malzemelere sünek malzemeler denir. Metaller tipik birer sünek malzemedir. Birçok malzeme her iki davranış özelliğini de gösterir. Bu tür malzemeler uzun süren bir gerilme altında kalırlarsa sünek olarak deformasyona uğrarlar, fakat aynı malzemeler gerilmeler çok hızlı ve büyük ise kırılgan bir özellik gösterirler. Kayaçlar, yüksek sıcaklık ve basınçta tipik birer sünek malzemedir.

Koyu Akışkan (viscous) malzemeler : Sürekli bir gerilme altında deformasyona uğrayan malzemelerdir. Sıvılar gibi tamamen akışkan bir özelliğe sahip malzemeler en küçük gerilmeler altında bile deformasyona uğrarlar. Yüksek ısı ve basınç altında kalan kayaçlar böyle bir malzeme özelliği gösterebilirler.

Plastik malzemeler : Gerilmenin belirli bir eşik seviyesine kadar akışkan olmayan malzemelerdir

Viskoelastik malzemeler : Esnek ve viskoz özelliklerin birleşimini gösteren malzemelerdir. Örneği yer modeli böyle bir özelliğe sahiptir. Yerin kabuğu esnek bir malzeme onun altındaki manto ise viskoz akıcılığa sahip bir malzemedir.

Gerilme ve yamulma tensörleri arasındaki en genel doğrusal ilişki şu şekilde yazılabilir;

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \equiv \sum_{k=1,3}\ \sum_{l=1,3} c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \tag{15}$$

Burada c_{ijkl} dördüncü dereceden esneklik tensörüdür ve ortamın deformasyona olan tepkisinin bir göstergesidir. Ortamın deformasyona olan tepkisi, sismik dalgalarının neden yayıldığının bir sebebidir. Bu uzayın her noktasında sabittir fakat yerden yere göre farklılık gösterebilir. Yukarıdaki eşitlik mükemmel esnekliği varsaymaktadır. Herhangi bir enerji kaybı veya soğurulma yoktur.

Yön bağımsız bir ortam söz konusu ise bağımsız elemanların sayısı sadece 2 olacaktır. Bu iki eleman, *Lame parametreleri* olarak adlandırılır ve λ ve μ ile gösterilir. Bu durumda;

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{16}$$

Bu açılım (15) bağıntısında yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} &= c_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \\
&= \left[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\right]\varepsilon_{kl} \\
&= \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \mu(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) \\
&= \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \\
&= \lambda\Theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij},
\end{aligned} \tag{17}$$

Burada Θ, $\boldsymbol{\varepsilon}$'nin köşegen elemanlarının toplamına yada kübik dilatasyona karşılık gelmektedir. Bu, yön bağımsız bir malzeme için Hook Kanunudur. İki Lame parametresi, yön bağımsız bir katı içerisindeki doğrusal gerilme-yamulma ilişkisini tamamen tanımlar. μ, *kesme modülüdür* ve makaslanmaya karşı malzemenin gösterdiği direncin bir ölçüsüdür. Bu ise uygulanan kesme gerilemesi ile oluşan kesme yamulmasının arasındaki oranın yarısı ile ifade edilmektedir.

$$\mu = \frac{\tau_{ij}}{2\varepsilon_{ij}} \qquad i \neq j \tag{18}$$

Diğer Lame parametresi λ'nın ise basit bir fiziksel açıklaması yoktur. Yön bağımsız katılar için yaygın olarak kullanılan diğer esneklik parametreleri ise şu şekildedir.

Young Modülü (E) : Eksenel gerilme ve yamulmanın bir oranıdır.

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \tag{19}$$

Bulk (sıkışabilirlik) Modülü (κ) : Hidrostatik basıncın hacim değişimine oranıdır. Diğer bir deyişle malzemenin sıkıştırılmazlığının bir ölçüsüdür.

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{20}$$

Poisson Oranı (υ) : Enine kısalmanın boyuna uzamaya oranı olarak tanımlanır. Boyutsuzdur ve 0-0.5 arasında değişir. Üst limit (0.5) sıvı özelliğe karşı gelir. İdeal şartlar için değeri 0.25'dir. Kıtasal kayaçlarda ortalama Poisson oranı 0.27-0.28 dolayındadır.

$$\upsilon = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{21}$$

Sismolojide çoğunlukla sıkışma (compressional) (*P*) ve kesme (shear) (*S*) dalgaları ile ilgilenilir. Daha sonra da görüleceği üzere, bu hızlar esneklik parametreleri ve yoğunluk değerinden (ρ) hesaplanabilir.

P hızı (α) :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{22}$$

S hızı (β) :

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{23}$$

P ve S hızlarına bağlı olarak hesaplanan Poisson oranı bağıntısı ise şu şekildedir;

$$\upsilon = \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{2(\alpha^2 - \beta^2)} \tag{24}$$