# KÜMELER CEBRİ ve OLASILIK ÖLÇÜSÜ

**TANIM:** $\Omega$ boş olmayan bir küme ve $U$ $\Omega$ da bir sınıf olsun.

1. $\Omega \in U$
2. $\forall A \in U$ için $\bar{A} \in U$
3. $\forall A, B \in U$ için $A \cup B \in U$

3'. $(A_n)$ $U$ da herhangi bir küme dizisi olsun. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$

özelliklerini göz önüne alalım.

1, 2, 3 özelliklerini sağlayan U sınıfına $\Omega$ da bir cebir denir.

1, 2, 3' özelliklerini sağlayan U sınıfına $\Omega$ da bir $\sigma$-cebir denir.

NOT: Her $\sigma$-cebir bir cebirdir. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

**TANIM:** $U, \Omega$'da bir $\sigma$-cebir olsun.$(U, \Omega)$ ikilisine ölçülebilir uzay denir.

***U* $\sigma$-cebirinin bazı özellikleri**

1. $\emptyset \in U$
2. $U$' dan $A_n$ küme dizisi için $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in U$
3. $A_1, A_2, \dots, A_n \in U$ $\quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in U \quad ve \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in U$
4. $\forall A, B \in U$ için $A \setminus B \in U$

NOT: Her $\sigma$-cebir bir cebirdir. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

**TANIM** (Olasılık Ölçüsü):

$\Omega \neq \emptyset$ ve $U'$da $\Omega'$da bir $\sigma$-cebir olsun.

$$P: U \longrightarrow R$$

$$A \longrightarrow P(A)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

1. $P(\Omega) = 1$
2. $\forall A \in U$ için $P(A) \geq 0$
3. $U$'dan alınan her ayrık $(A_n)$ küme dizisi için $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

özelliklerini sağlayan $P$' ye bir olasılık ölçüsü denir.

**TANIM:** $U$ $\Omega$ da bir $\sigma$-cebir ve $P$ $U$ üzerinde bir olasılık ölçüsü ise $(\Omega, U, P)$ üçlüsüne bir olasılık uzayı veya olasılık modeli denir.

**$P$ olasılık ölçüsünün bazı matematiksel özellikleri**

$P$ olasılık ölçüsünün bazı özellikleri aşağıdaki teorem ile belirlenir.

<u>**Teorem:**</u> $(\Omega, U, P)$ bir olasılık uzayı olsun:

a) $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

b) $A_1, A_2, \ldots, A_n,\ U$ da ayrık kümeler $\Rightarrow \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)=\mathrm{P}(A_1)+\ldots+\mathrm{P}(A_n)$

c) $P(\overline{A})=1-P(A)$

d) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

e) $0 \leq P(A) \leq 1$

f) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)=\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)-\sum_{1 \leq i<j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j)+\sum_{1 \leq i<j<k \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k)-\ldots+(-1)^{n-1} \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

g) $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)+\ldots+\mathrm{P}(A_n)$ $\quad\left(P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right)$

$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) \leq \mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)+\ldots+\mathrm{P}(A_n)+\ldots$ $\quad\left(P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\right)$

h) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots \quad \Rightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} P(A_n)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$

$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots \quad \Rightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} P(A_n)=P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$

I) $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)-(n-1)$

dır.

**İspat:**

a) $A_n=\varnothing$ , $n=1,2,\ldots$ olsun. Bu durumda, $A_n$ ‘ler ayrık ve

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$$

dır. Olasılık ölçüsü tanımındaki (iii) şıkkından,

$$\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

$$\mathrm{P}(\varnothing)=\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(\varnothing) \Rightarrow \mathrm{P}(\varnothing)=0$$

dır.

b) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in U$ kümeleri ayrık olsun. $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$ olmak üzere $(A_n)$ dizisindeki kümeler ayrıktır.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing \cup \ldots) \\ &= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}(\varnothing) + \mathrm{P}(\varnothing) + \ldots \ \ (\text{(iii) den}) \\ &= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n) \ \ (\text{(a) dan}) \end{aligned}$$

dir.

c) $A \cup \overline{A} = \Omega$ ve $P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

d)

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad B = A \cup (\overline{A} \cap B)$$

$$\Rightarrow \quad P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$\Rightarrow \quad P(A) \leq P(B) \ , (P(\overline{A} \cap B) \geq 0)$$

e) $\forall \ A \in U$ için $\varnothing \subset A \subset \Omega \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$ dır.

f) $$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$$

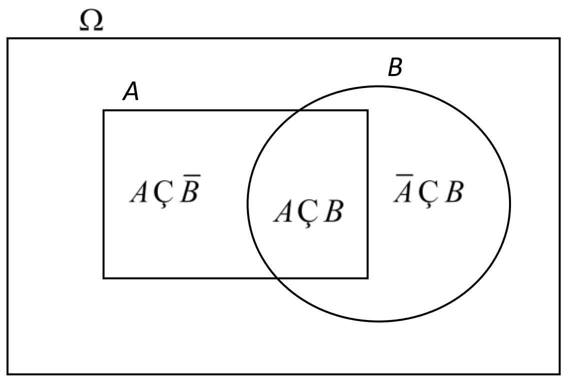
ve

$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

olmak üzere,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

elde edilir.




$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathrm{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

eşitliğini ödev olarak ispatlayınız.

g)

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leq \mathrm{P}\left(A_1 \cup (\overline{A}_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup \ldots \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-1} \cap A_n)\right)$$

$$= \mathrm{P}(A_1) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + \ldots + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n)$$
$$\leq \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + P(A_3) + \ldots + \mathrm{P}(A_n)$$

h) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ olsun.

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathrm{P}(A_1) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + \ldots + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n) + \ldots$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left(\mathrm{P}(A_1) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) + \ldots + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n)\right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(A_1 \cup (\bar{A}_1 \cap A_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup \ldots \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n)\right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(A_n)$$

dır.

Şimdi $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ olsun. Bu durumda,

$$\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2 \subset \cdots \subset \bar{A}_n \subset \cdots$$

olmak üzere,

$$\lim_{n \to \infty} P(\bar{A}_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n\right)$$
$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - P(A_n)\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n}\right)$$
$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

dır.

ı) Ödev olarak bırakılmıştır.