ÖRNEK (Kesikli Olasılık Dağılımı): $\Omega = \{w_1, w_2, ...\}$ ve $U = P(\Omega)$ olsun. $\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$ olacak şekilde $P_i \epsilon (0,1)$ sayılarını göz önüne alalım.

$$P: U \longrightarrow \mathcal{R}$$

$$A \longrightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \, I_A(w_i)$$

ile verilen P fonksiyonunun bir olasılık ölçüsü olduğunu gösteriniz. Burada;

$$I_A(w_i) = \begin{cases} \omega_i \epsilon A \\ \omega_i \notin A \end{cases}$$

olup

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i I_\Omega(\omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$$

dir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{A\cup B}(\omega) = \mathrm{I_A}(\omega) + \mathrm{I_B}(\omega) - \mathrm{I}_{A\cap B}(\omega) \\ A \cap B = \emptyset \text{ olmak üzere } \mathrm{I}_{A\cap B}(\omega) = \mathrm{I}_A(\omega)\omega + \mathrm{I}_B(\omega) \end{pmatrix}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \sum_{i=1}^{\infty} P_i \, \mathrm{I}_{\cup_{n=1}^{\infty} \mathrm{A_n}}(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P_i \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_{A_n}(\omega_i) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} P_i \mathrm{I}_{A_n}(\omega_i) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Hatırlatma:

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$
   $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n : A_1, A_2,$ ... olaylarından sonsuz tanesinin gerçekleşmesi olayı
   $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n : A_1, A_2,$ ... olaylarından sonlu tanesinin dışımda tümünün gerçekleşmesi olayı.

TEOREM: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun.

(i) A_n, $n = 1,2, ...$ U dan alınan herhangi artan bir küme dizisi ise;

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

dir.

(ii) A_n , $n = 1,2, \dots$ U daki azalan bir küme dizisi ise;

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

dir.

İSPAT: $B_1 = A_1$ ve $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, $n = 2,3, \dots$ olmak üzere B_n küme dizisi için

1. B_n'ler ayrıktır.
2. $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

dir.

(i)$A_n \uparrow$ olsun. Bu durumda $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ dır.

$$\begin{aligned} P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \big(P(A_k) - P(A_{k-1})\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \end{aligned}$$

bulunur.

(ii) A_n $\downarrow$ olsun. Bu durumda $\bar{A}_n \uparrow$ olacağı açıktır. Böylece

$$\begin{aligned} P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} P(\bar{A}_n) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \big(1 - P(\bar{A}_n)\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK: Bir zarın ardarda atılması deneyinde eninde sonunda 6 gelmesi olasılığını bulunuz.

A_n: İlk n atışta hiç 6 gelmemesi olayı olsun. Yani,

A_1: İlk atışta 6 gelmemesi

A_2: İlk 2 atışta 6 gelmemesi

$\vdots$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ olayı bir zarın sonsuz kez atılması deneyinde hiç 6 gelmemesi olayıdır. Ayrıca $n = 1,2,3, \ldots$ için $A_n \supset A_{n+1}$ olacağından $A_n \downarrow$ olarak bulunur. Bu durumda

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty}(A_n)\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

dır. Buradan eninde sonunda 6 gelmesi olasılığı $1 - P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - 0 = 1$ dir.

P Olasılık Ölçüsünün Sürekliliği

TEOREM: (A_n) U daki olayların herhangi bir dizisi olsun. P olasılık ölçüsü süreklidir, yani

$$A_n \longrightarrow A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$$

dir.

İSPAT**:**

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \leq P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$$

eşitsizliğinin gösterilmesiyle ispat tamamlanır.

$$\liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

olduğu açıktır.

- $\limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \leq P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$ olduğunu gösterelim.

$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ olduğunu biliyoruz. $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, $n = 1,2, \ldots$ diyelim. Bu durumda $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ olacağı açıktır. Ayrıca

$B_1 = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$

$B_2 = A_2 \cup A_3 \cup \ldots$

olup B_n azalan bir küme dizisidir. Böylece

$\limsup_{n\to\infty} P(B_n) = P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$ (*)

dir. $A_n \subset B_n, n = 1,2, \ldots$ olduğunun gözönüne alınmasıyla $P(A_n) \leq P(B_n)$ olup

$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}(B_n)$ (**)

elde edilir. (*) ve (**) ifadelerinden

$\limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$

bulunur.

- $P(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n)$ olduğunu gösterelim.

$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ olduğunu biliyoruz. $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, $n = 1,2,\ldots$ diyelim. Bu durumda $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ olacağı açıktır. Ayrıca

$B_1 = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$

$B_2 = A_2 \cap A_3 \cap \ldots$

olup B_n artan bir küme dizisidir. Böylece

$P(\liminf_{n\to\infty}(B_n)) = P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$ (***)

dir. $A_n \supset B_n, n = 1,2,\ldots$ olduğunun gözönüne alınmasıyla $P(A_n) \geq P(B_n)$ olup

$\liminf_{n\to\infty} P(B_n) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n)$ (****)

elde edilir. (***) ve (****) ifadelerinden

$$P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n)$$

bulunur. Böylece $A_n \longrightarrow A$ olduğundan ve ispatlanan bu eşitsizlik yardımıyla

$$\liminf_{n\to\infty} P(A_n) = \limsup_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$$

olur.