Borel –Cantelli Lemmaları

Birinci Borel-Cantelli Lemması:

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve (A_n) U daki olayların herhangi bir dizisi olsun. Bu durumda;

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\lim_{n\to\infty} sup(A_n)) = 0$$

dır.

İSPAT: $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, n = 1,2, ...$ olarak tanımlansın.

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$$

$$= P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)$$

$$= P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(B_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$$

yazılabilir. Burada B_n küme dizisi azalan bir küme dizisidir ve $B_n \downarrow \limsup_{n\to\infty} A_n$ dir. Ayrıca $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ olduğunun gözönüne alınmasıyla

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k)]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) - \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

$$= 0$$

bulunur, yani $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$ dır.

Ek olarak

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0 \Rightarrow P\left(\liminf_{n\to\infty} \overline{A}_n\right) = 1$$

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0 \Rightarrow P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) = 0$$

olacağı açıktır.

TANIM: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve (A_n) U da ki olayların herhangi bir dizisi olsun. $A_1, A_2, \dots$ olaylarının her sonlu tanesi bağımsız, yani;

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \dots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) \dots P(A_{ik}) \ , k = 2,3, \dots$$

ise $A_1, A_2, \dots$ olaylarına bağımsız denir.

İkinci Borel-Cantelli Lemması:

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve (A_n) U daki olayların bağımsız bir dizisi olsun. Bu durumda;

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Rightarrow P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1$$

İSPAT:

$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$ olduğunu biliyoruz. $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \, , n = 1,2, \dots$ olarak tanımlanırsa $B_n \downarrow$ olacağı açıktır. $B_n \downarrow$ iken $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(B_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n)$ dir.

$$\begin{aligned}
P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) &= P(\textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \\
&= P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(\textstyle\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(\textstyle\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $m > n$ olmak üzere $\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k \subset \bigcap_{k=n}^{m} \overline{A}_k$ olur ve böylece

$$P\left(\textstyle\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\right) \leq P\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A}_k\right) = \prod_{k=n}^{m} P\left(\overline{A}_k\right)$$

ifadesine ulaşılır. $1 - x \leq e^{-x} \quad , \forall x \epsilon R$ olduğundan

$$\begin{aligned}
P\left(\textstyle\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\right) &\leq P\left(\textstyle\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A}_k\right) = \prod_{k=n}^{m} P\left(\overline{A}_k\right) = \prod_{k=n}^{m}\left(1 - P(A_k)\right) \leq \prod_{k=n}^{m} e^{-P(A_k)} \\
&= e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)}
\end{aligned}$$

dir. Yani,

$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\right) \leq e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)}$ $\quad m > n. \quad m \to \infty$ ile limite geçilirse $P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\right) \leq 0$ olacağından $P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A}_k\right) = 1$ bulunur. Böylece $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1$ sonucuna ulaşılmış olur.

Sonuç (0-1 Kanunu): (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve (A_n) U daki olayların bağımsız bir dizisi olsun. Bu durumda

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \begin{cases} 0, & \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \\ 1, & \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \end{cases}$$

dır.

ÖRNEK: Hilesiz bir madeni paranın ardarda atılması deneyini göz önüne alalım. $n = 1,2,\dots$ için A_n, n. atışta tura gelmesi olayı olsun. (A_n) bağımsız olayların bir dizisidir ve

$P(A_n) = \frac{1}{2} \quad n = 1,2,\dots$

olacağı açıktır. Buradan

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$

olup ikinci Borel-Cantelli lemması gereğince $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1$ bulunur. Yani sonsuz kez tura gelmesi olasılığı 1'dir. Simetriden dolayı sonsuz kez yazı gelmesi olasılığı da 1'dir