Stokastik Süreçler

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı olsun. T bir parametre kümesi olmak üzere

$$X : T \times \Omega \to \mathbb{R}$$

$$(t, w) \to X(t, w)$$

biçimindeki X fonksiyonunu göz önüne alalım. Her sabit $t \epsilon T$ için $X(t, w)$ fonksiyonu bir rasgele değişken ise X fonksiyonuna bir stokastik süreç denir. Bu stokastik süreç genellikle $\{X(t), t \epsilon T\}$ biçiminde gösterilir.

Her sabit $t \epsilon T$ için $X(t, w)$ fonksiyonunun aldığı değerlerin kümesine E ile gösterilen durum uzayı, her sabit $w\epsilon\Omega$ için bu sürecin verdiği t'nin fonksiyonuna sürecin bir yörüngesi adı verilir.

$\{X(t), t \epsilon T\}$ herhangi bir stokastik süreç olsun. Verilen herhangi bir $t \epsilon T$ için $X(t)$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_{X(t)}(x; t) = P(X(t) \leq x), x\epsilon\mathbb{R}$ ile verilir. $t_1, t_2, \dots, t_n \epsilon T$ için $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu, $F_{X(t_1),\dots,X(t_n)}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(X_1(t_1) \leq x_1, \dots, X_n(t_n) \leq x_n)$ ile tanımlanır ve sürecin n boyutlu dağılımı adı verilir.

Bir stokastik sürecin ayırt edilebilir özelliklerinin çoğu sürecin sonlu boyutlu dağılımlar ailesi yardımıyla ortaya çıkartılır. Elimizdeki tek araç bu ailedir. Bundan dolayı genelde süreçler sonlu boyutlu dağılımlara göre adlandırılır ya da sınıflandırılır. Örneğin; bir sürecin sonlu boyutlu dağılımları normal ise o sürece *Gauss süreci* denir. Bir sürecin sonlu boyutlu dağılımları bir Markov bağımlılığı sergiliyorsa, yani $t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_{n-1} < t_n < t$ olmak üzere her $x_1, x_2, \dots, x_n, x \in \mathbb{R}$ için

$$P(X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n) = P(X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_n) = x_n)$$

ise $\{X(t), t\epsilon T\}$ sürecine *Markov süreci* denir.

Örnek. $n = 1,2, \dots$ için n. günde Ankara'da metrekareye düşen ortalama yağış miktarının gözlenmesi deneyini gözönüne alalım.

$\Omega = \{w: w = (w_1, w_2, \dots)$ i. günde düşen ortalama yağış miktarı, $i \in \mathbb{N}\}$ olsun.

$$X : \mathbb{N} \times \Omega \to \mathbb{R}$$

$$(n, w) \quad \to X(n, w) = w_n$$

ile tanımlanan $\{X_n, n = 1,2, \dots\}$ $T = \mathbb{N}$ ve $E = [0, \infty)$ ile kesikli parametre ve sürekli durum uzayı ile bir stokastik süreçtir. $w = (0, 5, 12, 7, 3,0 ,0 ,5, 25, \dots)$ için bu stokastik sürecin yörüngesini çiziniz.

Ortalama Değer, Varyans ve Kovaryans Fonksiyonları

$\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. Beklenen değerin varlığı koşulu altında

$$M(t) = E\big(X(t)\big), t \in T$$

ve

$$V(t) = E\big(X^2(t)\big) - M^2(t), t \in T$$

ile verilen M ve V fonksiyonlarına sırasıyla sürecin ortalama değer ve varyans fonksiyonları denir.

$$K(s,t) = Cov\big(X(s), X(t)\big) = E\big(X(s)X(t)\big) - M(s)M(t) \quad s, t \in T$$

fonksiyonuna ise sürecin kovaryans fonksiyonu adı verilir.

Örnek. $A \sim N(0,1)$ olmak üzere $X(t) = At + 2, t \geq 0$ ile verilen $\{X(t), t \in T\}$ sürecini gözönüne alalım. Bu sürecin ortalama değer, varyans ve kovaryans fonksiyonlarını bulunuz.

$$M(t) = E\big(X(t)\big) = E(At + 2) = tE(A) + 2 = 2$$

$$V(t) = Var(At + 2) = t^2 Var(A) = t^2, t \geq 0$$

olup $X(t) \sim N(2, t^2)$ olacağı açıktır. $s, t \geq 0$ olmak üzere

$$K(s,t) = Cov\big(X(s), X(t)\big) = Cov(As + 2, At + 2) = stVar(A) = st$$

dır.