Bir stokastik süreç genelde sonlu boyutlu dağılımlar ailesiyle tarif edilir ya da oluşturulur. Daha basit bir yol ise süreç için rasgele değişkenlere bağlı açık bir ifade vermektedir.

ÖRNEK:

Reel eksen üzerinde orijinde bir parçacığın bulunduğu kabul edilsin. Bu parçacık önceki konumundan bağımsız olarak her defasında p olasılıkla 1 br sağa yada q olasılıkla $(q = 1 - p)$ 1 br sola hareket etsin. Bu parçacığın hareketini modelleyen bir stokastik süreç oluşturunuz.

ÇÖZÜM:

$n = 0,1,2, \dots$ için X_n parçacığın n. adım sonundaki konumu olsun.

$Y_1, Y_2, \dots$ ler birbirlerinden bağımsız ve her biri

$$P(Y_i = -1) = q \,, P(Y_i = 1) = p \,, p + q = 1$$

ile aynı dağılımlı olmak üzere;

$$X_n = Y_1 + \cdots + Y_n \qquad , n = 1,2, \dots \quad (X_0 = 0)$$

olduğu açıktır. Burada $Y_i{}'$ler adımlara karşılık gelen rasgele değişkenlerdir. Bu parçacığın hareketi için uygun bir model $\{X_n, n = 0,1,2, \dots\}$ stokastik sürecinin olduğu açıktır.

Bu süreç $T = \{0,1,2, \dots\}$ ve $E = \{0, \mp 1, \mp 2, \dots\}$ ile kesikli parametre ve kesikli durum uzaylıdır. Bu şekilde oluşturulan bir sürece *rasgele yürüyüş süreci* denir.

Birbirlerinden bağımsız ve her biri aynı dağılıma sahip $Y_1, Y_2, \dots$ ler için $E(Y) = p - q$ ve $Var(Y) = 1 - (p - q)^2$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Buradan $\{X_n, n = 0,1,2, \dots\}$ rasgele yürüyüş süreci için

$$E(X_n) = n(p - q) \qquad , n = 0,1, \dots$$

$$Var(X_n) = n(1 - (p - q)^2) \quad , n = 0,1, \dots$$

olacağı açıktır. Kovaryans fonksiyonu ise $m < n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Cov(X_m, X_n) &= Cov(X_m, X_m + Y_{m+1} + Y_{m+2} + \cdots + Y_n) \\ &= Cov(X_m, X_m) + Cov(X_m, Y_{m+1}) + Cov(X_m, Y_{m+2}) + \cdots + Cov(X_m, Y_n) \\ &= Var(X_m) \\ &= m(1 - (p - q)^2) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece

$$Cov(X_m, X_n) = \min(n, m)\,(1 - (p - q)^2), \quad n, m = 0,1, \dots$$

olur.

$p = q = 1/2$ için $\{X_n, n = 0,1,2, \dots\}$ sürecine simetrik rasgele yürüyüş süreci denir. Simetrik rasgele yürüyüş süreci için $E(X_n) = 0$ ve $Var(X_n) = n$ olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca $m < n$ olmak üzere $Cov(X_m, X_n) = m$ dir.

$Y_1, Y_2, \dots$ ler bağımsız ve her biri $P(Y_i = 1) = p$ ve $P(Y_i = 1) = q$ olasılık dağılımı ile aynı dağılımlı olmak üzere $X_0 = 0$ ile

$X_n = X_0 + Y_1 + \dots + Y_n$

$\quad = Y_1 + \dots + Y_n, \ n = 1,2, \dots$

biçiminde tanımlanan rasgele yürüyüş sürecinin bir boyutlu olasılık dağılımını bulalım.

$X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ olup

$X_n^+ = n$ adımdaki $+1$ lerin sayısı

ve

$X_n^- = n$ adımdaki -1 lerin sayısı

olsun. Bu durumda

X_n^+ binom dağılımına sahip rasgele değişkendir, yani $X_n^+ \sim b(n, p)$

ve

X_n^- binom dağılımına sahip rasgele değişkenlerdir, yani $X_n^- \sim b(n, q)$

dir. Böylece

$X_n^+ + X_n^- = n$ (*)

ve

$X_n^+ - X_n^- = X_n$ (**)

olacağı açıktır. Bununla birlikte (*) ve (**) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa $2X_n^+ = n + X_n$ elde edilir. $X_n^+ = \frac{n+X_n}{2}$ olduğunun gözönüne alınmasıyla

$$P(X_n = k) = P\left(X_n^+ = \frac{k+n}{2}\right) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, & \text{n çift } k \in \{0, \mp 2, \dots, \mp n\} \\ & \text{n tek } k \in \{\mp 1, \mp 3, \dots, \mp n\} \\ 0 & , diğer\ durumlarda \end{cases}$$

olarak bulunur.