BAĞIMSIZ VE DURAĞAN ARTIŞLI SÜREÇLER

TANIM:

$\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. n keyfi bir doğal sayı olmak üzere $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ şartını sağlayan T parametre kümesine ait $t_1, \ldots, t_n$'lerin her seçimi için

$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$

rasgele değişkenleri birbirinden bağımsız ise $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecine bağımsız artışlı stokastik süreç denir.

T parametre kümesi en küçük bir t_0 elemanına sahip ise $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecinin bağımsız artışlılığı

$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$

rasgele değişkenlerinin bağımsızlığı ile verilir.

TEOREM:

$\{X(t), t \in T\}$ bağımsız artışlı bir stokastik süreç olsun. T'nin küçük elemanı var ve $X(t_0) = 0$ olmak üzere, bu sürecin tüm sonlu boyutlu dağılımları her $s, t \in T$ için $X(t) - X(s)$ rasgele değişkeninin dağılımı ile tek olarak belirlenir.

İSPAT:

$f_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}$ $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ rasgele vektörünün olasılık (yoğunluk) fonksiyonu olsun.

$X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n \Leftrightarrow X(t_1) = x_1, X(t_2) - X(t_1) = x_2 - x_1, \ldots., X(t_n) - X(t_{n-1}) = x_n - x_{n-1}$

olarak yazılabildiğinden

$$f_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X(t_1),X(t_2)-X(t_1),\ldots,X(t_n)-X(t_{n-1})}(x_1, x_2 - x_1, .., x_n - x_{n-1})$$

$$= f_{X(t_1)}(x_1) f_{X(t_2)-X(t_1)}(x_2 - x_1) \ldots f_{X(t_n)-X(t_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

TANIM:

$\{X(t), t \in T\}$ bir stokastik süreç olsun. Her $h > 0$ ve her $t + h \in T$ için $X(t+h) - X(t)$ rasgele değişkeninin dağılımı sadece h'ye bağlı (t den bağımsız) ise $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecine durağan artışlı süreç denir.

ÖRNEK:

$t \geq 0$ olmak üzere $N(t)$ t zamanına kadar belirli türden gerçekleşen olayların sayısı olsun. Bu şekilde oluşturulan $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik sürecine bir sayma süreci adı verilir. $0 \leq s < t$ için $N(t) - N(s)$ artış rasgele değişkeninin $(s, t]$ aralığında gerçekleşen olay sayısı olduğunun gözönüne alınmasıyla:

- Bir sayma sürecinin bağımsız artışlı olması demek; herhangi sonlu tane ayrık zaman aralıklarında gerçekleşen olay sayılarının birbirinden bağımsız olması demektir.
- Bir sayma sürecinin durağan artışlı olması demek; bir aralıkta gerçekleşen olay sayısının dağılımının yalnızca o aralığın uzunluğuna bağlı olması demektir, olay sayısının dağılımı aralığın zaman ekseni içerisindeki konumundan bağımsızdır.

ÖRNEK:

$\{X(t), t \in T\}$ bağımsız ve durağan artışlı bir stokastik süreç olsun. $T = [0, \infty)$ veya $T = \{0,1,2, \dots\}$ olmak üzere bu sürecin oratalama değer, varyans ve kovaryans fonksiyonlarını bulunuz.

ÇÖZÜM: $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecinin ortalama değer fonksiyonunun

$$M(t) = E\big(X(t)\big)$$

ile verildiğini biliyoruz. Şimdi $f(t) = E(X(t) - X(0))$ diyelim. Buradan $f(t+s) = E\big(X(t+s) - X(0)\big)$ olacağı açıktır. $X(s)$ eklenip çıkarılır ve sürecin durağan artışlılık özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} f(t+s) &= E\big(X(t+s) - X(s) + X(s) - X(0)\big) \\ &= E\big(X(t+s) - X(s)\big) + E\big(X(s) - X(0)\big) \\ &= E\big(X(t) - X(0)\big) + E\big(X(s) - X(0)\big) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece $f(t+s) = f(t) + f(s)$ denklemi elde edilir. Bu denkleme *Cauchy fonksiyonel denklemi* denir. Bu denkleminin çözümü

$$f(t) = at$$

ile verilir. O halde $t = 1$ için $f(1) = a$ olacağından $f(t) = f(1)t$ olur. Böylece

$$E(X(t) - X(0)) = E(X(1) - X(0))t$$

dır. Buradan

$$M(t) = E\big(X(t)\big) = E\big(X(1) - X(0)\big)t + E(X(0))$$

dır.

Şimdi $f(t) = Var\big(X(t) - X(0)\big)$ olsun. Bağımsız ve durağan artışlılık yardımıyla

$$
\begin{aligned}
f(t+s) &= Var\big(X(t+s)-X(0)\big) \\
&= Var\big(X(t+s)-X(s)+X(s)-X(0)\big) \\
&= Var\big(X(t+s)-X(s)) + Var(X(s)-X(0)\big) \\
&= Var\big(X(t)-X(0)) + Var(X(s)-X(0)\big) \\
&= f(t)+f(s)
\end{aligned}
$$

bulunur. $t = 1$ için $f(1) = a$ olacağından $f(t) = f(1)t$ olacağı açıktır. Böylece

$$f(t) = Var\big(X(t)-X(0)\big) = \big(Var(X(1)-X(0)\big)t$$

dır. Buradan da

$$Var\big(X(t)\big) = \big[Var\big(X(1)\big) - Var\big(X(0)\big)\big]t + Var\big(X(0)\big)$$

elde edilir.

O halde bağımsız ve durağan artışlı bir sürecin ortalama değer ve varyans fonksiyonları t ye göre lineerlerdir.

$\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecinin kovaryans fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
K(s,t) &= Cov\big(X(s),X(t)\big) \qquad\qquad s<t \\
&= Cov\big(X(s),X(t)-X(s)+X(s)\big) \\
&= Cov\big(X(s),X(t)-X(s)\big) + Cov\big(X(s),X(s)\big) \\
&= Var\big(X(s)\big) \\
&= \big[Var\big(X(1)\big) - Var\big(X(0)\big)\big]s + Var\big(X(0)\big)
\end{aligned}
$$

dır. Böylece

$$
\begin{aligned}
K(s,t) &= Cov\big(X(s),X(t)\big) \\
&= \big[Var\big(X(1)\big) - Var\big(X(0)\big)\big]\min(s,t) + Var\big(X(0)\big),\ \ s,t \in T
\end{aligned}
$$

olur.

Eğer $X(0) = 0$ olursa

$$E(X(t) = E\big(X(1)\big)t$$

$$Var\big(X(t)\big) = Var\big(X(1)\big)t$$

ve sürecin kovaryans fonksiyonu da $s < t$ için

$$Cov\big(X(s), X(t)\big) = Var\big(X(1)\big)s$$

olacaktır.

ÖRNEK (ÖDEV):

1. Rasgele yürüyüş sürecinin bağımsız ve durağan artışlı olduğunu gösteriniz.

2. Rasgele yürüyüş sürecinin sonlu boyutlu dağılımlarını bulunuz.