TANIM: GÜÇLÜ DURAĞANLIK

T lineer bir parametre kümesi olmak üzere bir $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecini gözönüne alalım. Verilen bir $n \in N$ için $t_1, \dots, t_n \in T$ ve $h \in T$ olmak üzere $\big(X(t_1), \dots, X(t_n)\big)$ rasgele vektörü ile $(X(t_1+h), \dots, X(t_n+h))$ rasgele vektörü aynı dağılımlı ise bu stokastik sürece n. mertebeden güçlü durağandır denir. Her n doğal sayısı için n. mertebeden güçlü durağan sürece ise güçlü durağan süreç adı verilir.

Not: Bir stokastik süreç güçlü durağan ise $X(t)$ rasgele değişkeninin dağılımı t'den bağımsız ve tüm moment fonksiyonları sabittir.

TEOREM: $k \leq n$ olmak üzere n. mertebeden durağan olan bir stokastik süreç k. mertebeden de güçlü durağandır.

Yukarıda verilen teoremin tersi doğru değildir. Yani $k \leq n$ olmak üzere k. mertebeden güçlü durağan olan bir stokastik süreç n. mertebeden durağan olmak zorunda değildir.

TANIM: ZAYIF DURAĞANLIK

T bir parametre kümesi olmak üzere $\{X(t), t\epsilon T\}$ sonlu ikinci momentlere sahip bir stokastik süreç olsun. Bu sürecin kovaryans fonksiyonu $K(s,t)$ yalnızca $|t-s|$ nin bir fonksiyonu ya da denk olarak her $t, h \in T$ için $Cov\big(X(t), X(t+h)\big) = R(h)$ olacak şekilde bir R fonksiyonu varsa $\{X(t), t \in T\}$ sürecine zayıf durağan ya da kovaryans durağan denir.

Not: Zayıf durağan bir stokastik sürecin varyans fonksiyonu sabittir, yani t'den bağımsızdır.

Örnekler.

1. $X(t) = \cos(At), t \geq 0$ stokastik sürecini gözönüne alalım. $A \sim \cup\, (0, 2\pi)$ olsun,

a) $M(t), V(t), K(s,t)$ fonksiyonlarını bulunuz.

b) Süreç zayıf durağan mıdır?

- $M(t) = E(\cos(At)) = \int_0^{2\pi} \cos at \frac{1}{2\pi} da = \frac{1}{2\pi t} \sin(2\pi t)$
- $E\big(X^2(t)\big) = E(cos^2(At) = \int_0^{2\pi} cos^2\, at \frac{1}{2\pi} da$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2at)+1}{4\pi} da$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi t} \sin\,(4\pi t)$$

olup $Var(X(t)) = E\big(X^2(t)\big) - E(X(t))^2$ olduğundan

$$Var(X(t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi t} \sin\,(4\pi t) - \left(\frac{1}{2\pi t} \sin(2\pi t)\right)^2$$

dır.

- $s < t$ olmak üzere

$K(s,t) = Cov(\cos\,(As), \cos(At)) = E(\cos(As)\cos(At)) - E(\cos(As))E(\cos(At))$

dır. Matematiksel işlemler ödev olarak bırakılmıştır.

$X(t) = \cos(At)\,, t \geq 0$ stokastik sürecinin varyans fonksiyonu t'ye bağlı olduğundan zayıf durağan değildir.

2. $\{X(t), t \in T\}$ zayıf durağan bir stokastik süreç olsun. $R(h) = Cov\big(X(t+h), X(t)\big)$ olmak üzere,

a. $R(0) \geq 0$
b. $R(h) = R(-h)$
c. $|R(h)| \leq R(0)$

olduğunu gösteriniz.

a) $R(0) = Cov\big(X(t), X(t)\big) = Var\big(X(t)\big) \geq 0$ olacağı açıktır.

b) $R(h) = Cov\big(X(t), X(t+h)\big)$'de $t' = t + h$ dönüşümü yapılırsa $R(h) = Cov\big(X(t' - h), X(t')\big)$ bulunur. Ayrıca $R(-h) = Cov\big(X(t), X(t-h)\big)$ olduğundan $R(h) = R(-h)$ olacağı açıktır.

c) $\Big|Cor\big(X(t), X(t+h)\big)\Big| \leq 1$ olduğunu biliyoruz.

$$\Big|Cor\big(X(t), X(t+h)\big)\Big| = \left|\frac{Cov\big(X(t), X(t+h)\big)}{\sqrt{Var(X(t)Var(X(t+h))}}\right| \leq 1$$

yardımıyla

$$\Big|Cov\big(X(t), X(t+h)\big)\Big| \leq \sqrt{Var\big(X(t)\big)Var\big(X(t+h)\big)}$$

yazılabilir. Sürecin zayıf durağan olduğu bilindiğinden

$$|R(h)| \leq R(0)$$

olur.

3. $U_n \sim \ddot{U}stel(\theta = 1)$ ve $V_n \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$, $n = 1,2,\ldots$ olarak verilsin. $U_n$ve V_n ler bağımsız olsunlar.

$$X_n = \begin{cases} U_n & n = 1,3,5,\ldots \\ V_n & n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

ile tanımlanan $\{X_n, n = 1,2,\ldots\}$ sürecinin durağanlığını inceleyiniz

$n = 1$ için $X_1 \sim \ddot{U}stel(\theta = 1)$, $n = 2$ için $X_2 \sim N(0,1)$ olduğundan X_1 ve X_2 aynı dağılımlı değildir. Bu durumda $\{X_n, n = 1,2,\ldots\}$ sürecinin güçlü durağan olmadığı açıktır. Çünkü $\{X_n, n = 1,2,\ldots\}$ süreci 1. mertebeden durağan değil ise güçlü durağan olamaz.

Sürecin ortalama değer, varyans ve kovaryans fonksiyonları aşağıdaki gibi verilir.

$$E(X_n) = \begin{cases} E(U_n) & ,n\ tek \\ E(V_n) & ,n\ çift \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & ,n\ tek \\ 0 & ,n\ çift \end{cases}$$

$$Var(X_n) = \begin{cases} Var(U_n) & ,n\ tek \\ Var(V_n) & ,n\ çift \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & ,n\ tek \\ 1 & ,n\ çift \end{cases}$$

=1

$$Cov(X_n, X_{n+k}) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Kovaryans n'den bağımsız olup alacağı değer sadece k'ya bağlı olduğu için zayıf durağandır.

4. A ve B rasgele değişkenleri bağımsız ve her biri $N(0, \sigma^2)$ dağılımlı olmak üzere $X(t) = A\cos(ft) + B\sin(ft)$ ile verilen stokastik sürecin durağanlığını inceleyelim. Burada f pozitif bir sabittir.

Bu stokastik sürecin ortalama değer varyans ve kovaryans fonksiyonlarını bulalım.

$$E\big(X(t)\big) = 0$$

$$Var\big(X(t)\big) = \sigma^2$$

$$Cov\big(X(s), X(t)\big) = \sigma^2 \cos(f(t-s))$$

olduğundan süreç zayıf durağandır.

$\big(X(t_1), \dots, X(t_n)\big)$ ile $\big(X(t_1+h), \dots, X(t_n+h)\big)$ aynı dağılıma sahip iseler süreç güçlü durağan bir süreç olacaktır. Bunu görebilmek için

$$X(t_1), \dots, X(t_n)) \sim N\left(\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \cdots & \sigma^2\cos(f(t_1-t_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^2\cos(f(t_1-t_n)) & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}\right),$$

ve

$$X(t_1+h),\ldots,X(t_n+h) \sim N\left(\mu=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}, \Sigma=\begin{bmatrix}\sigma^2 & \cdots & \sigma^2\cos\left(f(t_1-t_n)\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma^2\cos\left(f(t_1-t_n)\right) & \cdots & \sigma^2\end{bmatrix}\right)$$

olarak bulunduğundan rasgele vektörlerin her ikisi de aynı dağılımlıdır. Böylece bu sürecin tüm sonlu boyutlu dağılımları normal olup güçlü durağandır. Bu durumun sonlu boyutlu dağılımların normal ve sürecin zayıf durağan olmasından sonuçlandığını ifade edebiliriz.

5. $n \in$ Z olmak üzere X_n'ler bağımsız $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ ile aynı dağılımlı rasgele değişken olsun. $Y_n = X_n - X_{n-1}$, $n \in$ Z ile verilen $\{Y_n,\ n \in$ Z$\}$ stokastik süreci için:

a) $M(n), V(n), K(n,m)$ fonksiyonlarını bulunuz.

b)Süreç zayıf durağan mıdır?