POISSON SÜRECİ

Tanım: $N(t)$, $(0,t]$ aralığında gerçekleşen belli bir türden olayların sayısı olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik sürecine bir sayma süreci denir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci $T = [0, \infty)$ ve $E = \{0,1,2,\ldots\}$ ile sürekli parametre ve kesikli durum uzaylı bir süreçtir. $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $N(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$,
2. $N(t)$ negatif olmayan tamsayı değerli bir rasgele değişkendir,
3. Eğer $s < t$ ise $N(s) \leq N(t)$ ‘dir,
4. $s < t$ için $N(t) - N(s)$, $(s,t]$ aralığında gerçekleşen olay sayısıdır.

Hatırlatma (Poisson Dağılımı): Bir X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, \ldots, \lambda > 0$$

ise X rasgele değişkenine λ parametreli Poisson dağılımına sahip bir rasgele değişken denir ve $X \sim Poisson(\lambda)$ biçiminde gösterilir. Bu rasgele değişkenin beklenen değeri, varyansı ve moment çıkaran fonksiyonu, sırasıyla,

$$E(X) = \lambda, \qquad Var(X) = \lambda, \qquad M_x(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \ , t \in \mathcal{R}$$

dır. Poisson dağılımı sürekli ortamda kesikli sonuçlar verirken aşağıdaki özelliklere sahip deneyleri modellemek için kullanılır.

1)Ortamın ayrık kısmındaki olayların sayısı bağımsız.

2)Ortamın çok küçük bir kısmında bir olay gerçekleşmesi olasılığı ortamın büyüklüğü ile orantılı olacak.

3)Ortamın çok küçük bir kısmında iki yada daha çok gerçekleşmesi olasılığı yaklaşık olarak sıfırdır.

Tanım 1: $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci ve λ pozitif bir sabit olsun.

(i) $N(0) = 0$,

(ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışlı,

(iii) $s, t \geq 0$ için $N(t+s) - N(s)$ rasgele değişkeni λt ortalamalı Poisson, yani

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{e^{-\lambda t}\,(\lambda t)^k}{k!}, k = 0,1,2, \ldots$$

şartlarını sağlayan $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine λ oranlı Poisson süreci denir.

Poisson süreci hem bağımsız hem de (iii) özelliğinden dolayı durağan artışlı bir sayma sürecidir. Poisson sürecine göre bir aralıkta gerçekleşen olayların sayısı yalnızca aralığın uzunluğuna bağlıdır, yani $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$ dır.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci λ oranlı bir Poisson süreci olsun. Bu sürecin ortalama değer ve varyans fonksiyonları sırasıyla

$$M(t) = E\big(N(t)\big) = \lambda t, t \geq 0$$

ve

$$V(t) = Var\big(N(t)\big) = \lambda t\,, t \geq 0$$

dir. Sürecin kovaryans fonksiyonu ise $s < t$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K(s,t) &= Cov\big(N(s), N(t)\big) \\ &= Cov\big(N(s), N(t) - N(s) + N(s)\big) \\ &= Cov\big(N(s), N(t) - N(s)\big) + Cov\big(N(s), N(s)\big) \\ &= Var\big(N(s)\big) = \lambda s \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$K(s,t) = \lambda \min(s,t)\,, s,t \geq 0.$$

$\{N(t), t \geq 0\}$ λ oranlı bir Poisson süreci olsun. Bu sürecin ilk olarak iki boyutlu olasılık dağılımını bulalım, yani $n = 0,1,2, \ldots$ olmak üzere $k \leq n$ ve $s < t$ için $P(N(s) = k, N(t) = n) =?$

$$N(s) = k, N(t) = n \Leftrightarrow N(s) = k\,, N(t) - N(s) = n - k$$

olduğundan

$$\begin{aligned} P(N(s) = k, N(t) = n) &= P(N(s) = k, N(t) - N(s) = n - k) \\ &= P(\,N(s) = k)P(N(t) - N(s) = n - k) \\ &= P(\,N(s) = k)P(N(t-s) = n - k) \\ &= \frac{e^{-\lambda s}\ (\lambda s)^k}{k!}\,\frac{e^{-\lambda(t-s)}\ (\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Ödev: λ oranlı bir Poisson sürecinin sonlu boyutlu dağılımlarını bulunuz.

Tanım ($o(h)$ gösterimi): $\lim\limits_{h \to o} \frac{f(h)}{h} = 0$ ise $f(h) = o(h)$ yazılır.

$f(h) = o(h)$ olması f fonksiyonunun h'den daha hızlı 0'a gittiği anlamı taşır.

Özellik: $f(h) = o(h)$ ve $g(h) = o(h)$ iken $af(h) + bg(h) = o(h)$ dır.

NOT: Herhangi bir sayma sürecinin Poisson süreci olup olmadığını anlamak için yukarıdaki 3 şartı sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir. İlk iki şartın sınanması kolay olabilir. Ancak

3.şartı kontrol etmek her zaman kolay olmayacaktır. Bu nedenle bu tanıma denk aşağıdaki tanımı vermek daha kullanışlı olur.

Tanım 2:$\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci ve λ pozitif bir sabit olsun.

(i)$N(0) = 0$,

(ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız ve durağan artışlı,

(iii)$P(N(h) = 1)$=$\lambda h + o(h)$,

(iv)$P(N(h) \geq 2) = o(h)$

şartlarını sağlayan $\{N(t), t \geq 0\}$ sürecine λ oranlı Poisson süreci denir.

Teorem: Tanım 1 ve Tanım 2 denktir.

İspat. Ödev olarak bırakılmıştır.

Örnek. Bir benzin istasyonuna araçlar dakikada $\lambda = 2$ oranlı bir Poisson sürecine göre gelmektedir. Buna göre,

a) İlk 2 dk'da benzin istasyonuna hiç araç gelmemesi,

b) Herhangi 2 dk'lık zaman diliminde hiç araç gelmemesi,

c) İlk 2 dk'da 2'den fazla araç gelmesi,

d) İlk 1 dk'da 1 ve ilk 5 dk'da 4 araç gelmesi

olasılıklarını hesaplayınız.

e)$E(N(10))$ =? $E(N(10)|N(5) = 5)$ =?

Çözüm. $N(t)$ ilk t dakikada istasyona gelen araçların sayısı olsun. $N(t) \sim Poisson(2t)$ olduğundan olasılıklar ve istenen beklenen değerler aşağıdaki gibi bulunur.

a) $P(N(2) = 0) = e^{-4}$

b) $P(N(t+2) - N(t) = 0) = P(N(2) = 0) = e^{-4}$

c) $P(N(2) \geq 2) = 1 - P(N(2) < 2) = 1 - P(N(2) = 0) - P(N(2) = 1)$

$$= 1 - e^{-4} - 4e^{-4} = 1 - 5e^{-4}$$

d) $P(N(1) = 1, N(5) = 4) = P(N(1) = 1, N(5) - N(1) = 4 - 1)$

$$= P(N(1) = 1)P(N(4) = 3)$$

$$= 2e^{-2}e^{-8}8^3$$

e) $E\big(N(10)\big) = 20$

$$E(N(10)|N(5) = 5) = E(N(10) - N(5) + N(5)|N(5) = 5)$$

$$= E(N(10) - N(5)|N(5) = 5) + E(N(5)|N(5) = 5)$$

$$= E\big(N(10) - N(5)\big) + 5 = E\big(N(5)\big) + 5 = 10 + 5 = 15.$$