VARIŞLAR ARASI ZAMAN DAĞILIMLARI

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. Bu süreçte X_1 rasgele değişkeni ilk olay gerçekleşinceye kadar geçen zaman olmak üzere X_n rasgele değişkeni $(n-1)$. olay gerçekleştikten sonra n. olay gerçekleşinceye kadar geçen zamanı belirtsin. Bu şekilde oluşturulan $\{X_n, n = 1,2, \dots\}$ dizisine $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecinin varışlar arası geçen zaman dizisi adı verilir.

$S_0 = 0$ ve $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,\ n = 1,2, \dots$ yazalım. Burada S_n sayma sürecinin n. olayının varış zamanını gösterir.

Her sabit $t \geq 0$ için $N(t) = maks\{n: S_n \leq t\}$ olduğu açıktır. Ayrıca $\{N(t) \geq n\}$ olayı $\{S_n \leq t\}$ olayına denk olduğundan $P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t)$ olacaktır.

Şimdi $\{N(t), t \geq 0\}$ λ oranlı bir Poisson süreci olsun. İlk olayın gerçekleşme zamanı olan X_1 rasgele değişkeninin olasılık dağılımını bulalım, yani $P(X_1 > t) =$?

$$X_1 > t \Leftrightarrow N(t) = 0$$

olduğundan

$$P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

olacağı açıktır. Bu durumda

$$F_{X_1}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad , t \geq 0$$

olup $X_1 \sim Üstel\left(\theta = \frac{1}{\lambda}\right)$ bulunur. Buradan

$$E(X_1) = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad Var(X_1) = \frac{1}{\lambda^2}$$

dır. Şimdi ikinci olayın gerçekleşme zamanı olan X_2 rasgele değişkeninin olasılık dağılımını bulalım. Bunun için ilk olarak aşağıdaki hatırlatmayı yapalım.

Hatırlatma

(Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve X ile Y bu uzayda tanımlı birer rasgele değişken olsun. $E(Y) = E\big(E(Y|X)\big)$ olduğu bilinmektedir.

$$Y(w) = \mathrm{I}_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \in \bar{A} \end{cases}$$

alınsın. Bu durumda

$$E(Y|X = x) = E(\mathrm{I}_A|X = x) = 1P(\mathrm{I}_A = 1|X = x) + 0P(\mathrm{I}_A = 0|X = x) = P(A|X = x)$$

olur. Böylece $E(Y) = E\big(E(Y|X)\big)$ koşullu beklenen değer eşitliğinden $A \in U$ olmak üzere

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X = x)dF_X(x)$$

$$= \begin{cases} \sum_{x \in D_x} P(A|X = x)P(X = x) & , X \text{ kesikli} \\ \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X = x)f_X(x)\,dx & , X \text{ sürekli} \end{cases}$$

elde edilir. Olasılık teorisinde bu ifade tam olasılık formülü olarak bilinir.

X_1 üzerinden koşullandırma ile

$$P(X_2 > t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X_2 > t|X_1 = s)\, f_{X_1}(s) ds$$

$$= \int_0^{\infty} P(X_2 > t|X_1 = s)\, \lambda e^{-\lambda s} ds$$

dır. Ayrıca

$P(X_2 > t|X_1 = s) = P((s, s+t]$ aralığında 0 olay$|X_1 = s)$

$$= P(N(s+t) - N(s) = 0)$$

$$= P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

olarak elde edilir. Bu durumda X_2 rasgele değişkeninin dağılımı

$$P(X_2 > t|X_1 = s) = e^{-\lambda t}$$

dir. Böylece $X_2 \sim Üstel\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ olacağı açıktır. Ayrıca $P(X_2 > t|X_1 = s) = P(X_2 > t)$ olduğundan X_1 ve X_2 bağımsızdır. Genelde $n = 2,3, ...$ için

$$P(X_n > t|X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = e^{-\lambda t}$$

bulunur. O halde bir λ oranlı Poisson sürecine göre gerçekleşen olaylar arası geçen zamanlar olan X_1, X_2 ... rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı $1/_{\lambda}$ ortalamalı üstel dağılım sahiptirler. Bu durumda n. olayın gerçekleşme zamanı olan S_n rasgele değişkeni $\alpha = n \ ve\, \beta = 1/_{\lambda}$ parametreli gamma dağılımına sahiptir, yani

$$S_n \sim Gamma\left(\alpha = n\ , \beta = 1/_{\lambda}\right)$$

dır. Açıktır ki $n = 1,2, ...$ için

$$E(S_n) = \frac{n}{\lambda} \text{ ve } Var(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}$$

dır.

NOT: Sürecin bağımsız ve durağan artışlı olması zamanın herhangi bir noktasından itibaren sürecin olasılık anlamında yeniden başlaması iddiasına denktir. Yani süreç herhangi bir nokta üzerinde önceki bütün gerçeklenişlerden bağımsızdır. Aynı zamanda orijinal süreç ile aynı dağılıma sahiptir. Diğer bir deyişle süreç hafızasızlık özelliğine sahiptir ve bu durumda olaylar arası geçen zamanların üstel dağılımlı olması zaten beklenir.

VARIŞ ZAMANLARININ KOŞULLU DAĞILIMI

t zamanına kadar bir tane olay gerçekleştiği bilindiğinde bu olayın gerçekleşme zamanının koşullu dağılımını bulalım.

İlk olarak $S_1 = X_1 \sim Üstel(\lambda)$ iken $X_1|N(t) = 1 \sim U(0, t)$ olduğunu gösterelim.

$$P(X_1 \leq s|N(t) = 1) = \frac{P(X_1 \leq s, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)}$$

$$= \frac{P((0,s]\,aralığında\ 1\ olay\ ve\ (s,t]\,aralığında\ 0\ olay)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{P(N(s)=1, N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{P(N(s)=1)P(N(t-s)=0)}{P(N(t)=1)}$$

$$= \frac{s}{t}, 0 < s < t$$

dir. Böylece $X_1|N(t) = 1 \sim U(0,t)$ olur. Genel halde koşullu dağılım aşağıdaki teoremle ifade edilir.

Teorem: $\{N(t), t \geq 0\}$ λ oranlı bir Poisson süreci olsun. t zamanına kadar n tane olay gerçekleştiği bilindiğinde bu olayların gerçekleniş zamanlarının koşullu dağılımı $(0,t)$ aralığındaki düzgün dağılımdan alınmış n birimlik örneklemin karşılık gelen sıra istatistiklerinin ortak dağılımıdır, yani

$$S_1, S_2, \dots, S_n | N(t) = n \sim (U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)})$$

dir. Burada $U_1, U_2, \dots, U_n$ ‘ler $U(0,t)$ düzgün dağılımdan alınan n birimlik bir örneklemdir.

İspat.

$$f_{U_{(1)},\dots,U_{(n)}}(u_1, \dots, u_n) = n!\, f_{U_1,U_2,\dots,U_n}(u_1, \dots, u_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f_{U_i}(u_i)$$

$$= \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < u_1 < \dots < u_n < t$$

olduğunu biliyoruz.

$$f_{S_1,\dots,S_n\ |N(t)=n}(s_1, \dots, s_n|n) = \frac{f_{S_1,\dots,S_n,N(t)=n}(s_1, \dots s_n, n)}{P(N(t)=n)}.$$

$$S_1 = s_1, S_2 = s_2, \dots, S_n = s_n, N(t) = n$$
$$\Updownarrow$$
$$X_1 = s_1, X_2 = s_2 - s_1, \dots, X_n = s_n - s_{n-1}, X_{n+1} > t - s_n$$

olduğundan

$$f_{S_1,\dots,S_n,N(t)=n}(s_1, \dots s_n, n) = f_{X_1}(s_1) f_{X_2}(s_2 - s_1) \dots f_{X_n}(s_n - s_{n-1}) P(X_{n+1} > t - s_n)$$

$$= \lambda e^{-\lambda(s_1)} \lambda e^{-\lambda(s_2 - s_1)} \dots \lambda e^{-\lambda(s_n - s_{n-1})} (1 - 1 + e^{-\lambda(t - s_n)})$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda t}$$

olarak bulunur. Böylece

$$f_{S_1,\dots,S_n|N(t)=n}(s_1, \dots, s_n|n) = \frac{f_{S_1,\dots,S_n,N(t)=n}(s_1, \dots s_n, n)}{P(N(t)=n)} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}} = \frac{n!}{t^n}, 0 < s_1 < \dots < s_n < t$$

ve dolayısıyla ispat tamamlanır.