$U_1, U_2, \ldots, U_n$ 'ler $U(0,t)$ düzgün dağılımdan alınan n birimlik bir örneklem olmak üzere $S_1, S_2, \ldots, S_n | N(t) = n \sim (U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)})$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $s < t$ olmak üzere

$$P(N(s) = k | N(t) = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, k = 0,1, \ldots, n,$$

yani

$$N(s) | N(t) = n \sim Binom\left(n, p = \frac{s}{t}\right)$$

dir. Düzgün dağılım bilgisine sahip olunmasaydı doğrudan hesap yapılması gerekecekti. Bu durumda

$$\begin{aligned} P(N(s) = k | N(t) = n) &= \frac{P(N(s)=k, N(t)=n)}{P(N(t)=n)} \\ &= \frac{P(N(s)=k, N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} \\ &= \frac{P(N(s)=k) P(N(t-s)=n-k)}{P(N(t)=n)} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k}, k = 0,1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Örnek. $P(S_1 > s | N(t) = n)$ olasılığını bulunuz.

$N(t) = n$ olarak verildiğinde ilk olayın gerçekleşme zamanı S_1, $U(0,t)$ düzgün dağılımdan alınan n birimlik bir örneklemin birinci sıra istatistiklerine karşılık geldiğinden

$$P(S_1 > s | N(t) = n) = P\left(U_{(1)} > s\right), s < t$$

olacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} P(S_1 > s | N(t) = n) &= P\left(U_{(1)} > s\right) \\ &= P(\min\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} > s) \\ &= P(U_1 > s, U_2 > s, \ldots, U_n > s) \\ &= P(U_1 > s) P(U_2 > s) \ldots P(U_n > s) \\ &= \left(1 - \frac{s}{t}\right)^n, s < t \end{aligned}$$

dir. Şimdi $E(S_1 | N(t) = n)$ beklenen değerini hesaplayalım.

$$E(S_1|N(t)=n) = E\big(U_{(1)}\big) = \int_0^t P(S_1 > s|N(t)=n)ds$$

$$= \int_0^t \left(1-\frac{s}{t}\right)^n ds$$

$$= \frac{t}{n+1}$$

olarak bulunur. Ayrıca gösterilebilir ki $1 \le k \le n$ için

$$f_{X_k|N(t)=n}(s) = \frac{n(t-s)^{n-1}}{t^n},\ \ 0 < s < t$$

ve dolayısıyla

$$P(X_k > s|N(t)=n) = \left(1-\frac{s}{t}\right)^n, 0 < s < t$$

olur. Bu durumda $1 \le k \le n$ için

$$E(S_k|N(t)=n) = E(X_1 + \cdots + X_k|N(t)=n)$$

$$= E(X_1|N(t)=n) + E(X_2|N(t)=n) + \cdots + E(X_k|N(t)=n)$$

$$= k\frac{t}{n+1}$$

dır.

Örnek. Bir tren istasyonuna yolcular λ oranlı bir Poisson sürecine göre gelmektedir. t zamanında hareket eden bir tren için $X(t), t$ zamanına kadar istasyona gelen yolcuların toplam bekleme zamanı olmak üzere yolcuların ortalama bekleme zamanı nedir, yani $E\big(X(t)\big)$ =?

Tren t zamanında hareket edecekse,

1. yolcunun istasyona geliş zamanı s_1 olmak üzere bu yolcunun bekleme zamanı $t - s_1$'dir.

2. yolcunun istasyona geliş zamanı s_2 olmak üzere bu yolcunun bekleme zamanı $t - s_2$'dir.

⋮

Yolcuların bekleme zamanları yukarıda belirtilmiştir. Ayrıca t zamanına kadar gelen yolcu sayısı da $N(t)$ olsun. Bu durumda yolcuların toplam bekleme zamanları

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} (t - S_k)$$

olacaktır. Burada rasgele sayıda rasgele değişkenin toplamı vardır. Bunun beklenen değerinin hesabı için $N(t)$ rasgele değişkeni üzerinden koşullandırma yapılmalıdır. Burada $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecinin λ oranlı bir Poisson süreci olduğunu yeniden hatırlatalım.

Ortalama bekleme zamanı

$$E(X(t)) = E\left(\sum_{k=1}^{N(t)}(t - S_k)\right) = E\left(E\left(\sum_{k=1}^{N(t)}(t - S_k)|N(t)\right)\right)$$

ile hesaplanır. İlk olarak iç kısmı hesaplayalım.

$$E\left(\sum_{k=1}^{N(t)}(t - S_k)|N(t) = n\right) = E(nt - \sum_{k=1}^{n} S_k|N(t) = n)$$

$$= nt - E\left(\sum_{k=1}^{n} U_{(k)}\right)$$

$$= nt - E(\sum_{k=1}^{n} U_k)$$

$$= \frac{nt}{2}$$

olarak bulunur. Böylece

$$E(X(t)) = E\left(\frac{N(t)t}{2}\right) = \frac{\lambda t^2}{2}$$

dır.