POISSON SÜRECİNİN PARÇALANMASI

λ oranlı bir $\{N(t), t \geq 0\}$ Poisson sürecine göre gerçekleşen herbir olayı 1.tip ya da 2.tip olay olarak sınıflandıralım. Bu sürece göre bir olay gerçekleştiği zaman bunun 1.tip veya 2.tip olay olması olayın gerçekleşme zamanına bağlı olsun. s zamanında bir olay olduğunda önceki gerçekleşenlerden bağımsız olarak 1.tip olay olması olasılığını $p(s)$ ile gösterelim. (Yani $p(s)$ olasılıkla 1.tip ve $1 - p(s)$ olasılıkla 2.tip)

$N_1(t)$ ve $N_2(t)$ sırasıyla t zamanına kadar gerçekleşen 1.tip ve 2.tip olayların sayısını göstersin. Bu durumda $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ olur.

Teorem: Her sabit $t \geq 0$ için $N_1(t)$ ve $N_2(t)$ rasgele değişkenleri sırasıyla λtp ve $\lambda t(1-p)$ ortalamalı Poisson dağılımıdır, burada $p = \frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds$ dir.

İspat. Ortak dağılım bulunarak $N_1(t)$ ve $N_2(t)$ rasgele değişkenlerinin bağımsız olup olmadıkları araştırılır, yani $P(N_1(t) = n, N_2(t) = m) =$?

$N(t)$ rasgele değişkeninin dağılımını bildiğimizden bu rasgele değişken üzerinden koşullandırma ile

$$P(N_1(t) = n, N_2(t) = m) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_1(t) = n, N_2(t) = m \mid N(t) = k)P(N(t) = k)$$

$$= P(N_1(t) = n, N_2(t) = m \mid N(t) = n+m)P(N(t) = n+m)$$

dır. t zamanına kadar $n+m$ olay gerçekleştiği bilindiğinde bu olaylar $(0,t)$ aralığındaki düzgün dağılıma göre bağımsız olarak gerçekleşir. $(0,t]$ aralığında gerçekleşen herhangi bir olayı göz önüne alalım. Bu olay s zamanında gerçekleşmiş ise bu olayın 1.tipten olay olması olasılığı $p(s)$ olacaktır. Bu olay $(0,t)$ aralığındaki düzgün dağılıma göre bir zamanda gerçekleşecektir. Böylelikle bu olayın 1.tipten olay olması olasılığı diğer olaylardan bağımsız olarak, $U(0,t)$ düzgün dağılımı ile koşullandırma sonucunda

$$p = \frac{1}{t}\int_0^t p(s)ds$$

biçiminde bulunur. Böylece $P(N_1(t) = n, N_2(t) = m \mid N(t) = n+m)$ koşullu olasılığı herbir denemede başarı olasılığı p olan $n+m$ bağımsız denemede n tane başarı ve m tane başarısızlık elde edilmesi olan binom olasılığına eşit olur, yani

$$P(N_1(t) = n, N_2(t) = m \mid N(t) = n+m) = \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m$$

dir. O halde

$$P(N_1(t) = n, N_2(t) = m) = \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}$$

$$= \frac{(n+m)!}{n!m!}(\lambda tp)^n(\lambda t(1-p))^m \frac{e^{-\lambda t}}{(n+m)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda tp}(\lambda tp)^n}{n!}\frac{e^{-\lambda t(1-p)}(\lambda t(1-p))^m}{m!}$$

olduğundan $N_1(t)$ ve $N_2(t)$ bağımsız ve sırasıyla $\lambda tp \; ve \; \lambda t(1-p)$ ortalamalı Poisson dağılımlı rasgele değişkenlerdir.

$(0,t]$ aralığında gerçekleşen 1.tip olayların otalama sayısı

$$E\big(N_1(t)\big) = \lambda tp = \lambda \int_0^t p(s)ds$$

ve 2.tip olayların otalama sayısı

$$E(N_2(t) = \lambda t(1-p) = \lambda t(1 - \tfrac{1}{t}\int_0^t p(s)ds = \lambda \int_0^t \big(1-p(s)\big)ds$$

olur.

NOT:

Eğer $p(s)$ s'den bağımsız ise yani sabit ise $\{N_1(t), t \geq 0\}$ ve $\{N_2(t), t \geq 0\}$ bağımsız iki Poisson sürecidir ve bu sürecin beklenen değeri $E\big(N_1(t)\big) = \lambda tp$ ve $E(N_2(t)) = \lambda t(1-p)$ dır. Burada $p(s) = p$. Fakat $p(s)$ s'ye bağlı ise bu iki süreç Poisson süreci olamaz, çünkü durağan artışlılık özelliği bozulur.

λ oranlı bir $\{N(t), t \geq 0\}$ Poisson sürecine göre gerçekleşen olayları k farklı tipe ayıralım. s zamanında bir olay gerçekleştiğinde bu olayın önceki gerçeklenişlerden bağımsız olarak i.tipten $(i = 1,2,3 \ldots, k)$ bir olay olması olasılığını $p_i(s)$ ile gösterelim. Burada $p_1(s) + \cdots + p_k(s) = 1$. $i = 1,2,3, \ldots, k$ için $N_i(t), (0,t]$ zaman aralığında gerçekleşen i.tipten olayların sayısı olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ süreci

$$N(t) = N_1(t) + \cdots + N_k(t)$$

olacak şekilde parçalansın.

Teorem: $i = 1,2, \ldots, k$ için $(0,t]$ aralığında gerçekleşen i.tip olayın sayısını gösteren $N_i(t)$ rasgele değişkenleri bağımsızdır ve $N_i(t) \sim Poisson(\lambda \int_0^t p_i(s)ds)$ dır.

İspat ödev olarak bırakılmıştır.

İpucu: $P(N_1(t) = n_1, N_2(t) = n_2, \ldots, N_k(t) = n_k) = P(N_1(t) = n_1, N_2(t) = n_2, \ldots, N_k(t) = n_k | N(t) = n_1 + n_2 + \cdots + n_k) = \frac{n_1+n_2+\cdots+n_k}{n_1!n_2!\ldots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$.

Örnek: Bir sayaca sinyaller dakikada $\lambda = 3$ oranlı bir Poisson sürecine varmaktadır. Sayaca varan her bir sinyal $2/3$ olasılıkla kaydedilmektedir.

a) İlk t dakikada sayacın en az bir sinyal kaydetmesi olasılığı nedir?

b) İlk t dakikada sayaca yalnızca 6 sinyal geldiği bilindiğinde bunların yalnızca 3 tanesinin sayaç tarafından kaydedilmesi olasılığı nedir?

$N(t)$: t zamanına kadar sayaca gelen sinyal sayısı

$N_1(t)$: t zamanına kadar sayaca kaydedilen sinyal sayısı

$N_2(t)$: t zamanına kadar sayaca kaydedilmeyen sinyal sayısı

$N_1(t)$ ve $N_2(t)$ birbirinden bağımsız ve $N_1(t) \sim Poisson(2t), N_2(t) \sim Poisson(t)$ olup $N(t) \sim Poisson(3t)$ olacaktır.

a)$P(N_1(t) \geq 1) = 1 - P(N_1(t) < 1) = 1 - P(N_1(t) = 0) = 1 - \frac{e^{-2t}\ (2t)^0}{0!} = 1 - e^{-2t}$

b) 1.yol:

$$P(N_1(t) = 3, N_2(t) = 3 | N(t) = 6)$$

$$= \binom{6}{3}(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{2})^3$$

2.yol:

$$P(N_1(t) = 3 | N(t) = 6) = \frac{P(N_1(t)=3, N(t)=6)}{P(N(t)=6)}$$

$$= \frac{P(N_1(t)=3, N_1(t)+N_2(t)=6)}{P(N(t)=6)}$$

$$= \frac{P(N_1(t)=3, N_2(t)=3)}{P(N(t)=6)}$$

$$= \frac{P(N_1(t)=3)P(N_2(t)=3)}{P(N(t)=6)}$$

$$= \binom{6}{3}(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{2})^3$$

Örnek: Bir A bölgesine göçler haftalık $\lambda = 10$ oranlı Poisson sürecine göre gerçekleşir. Her bir göçmenin Karadeniz bölgesinden olması olasılığı $1/16$'dır. Şubat ayında A bölgesinden göç edenlerin hiçbirinin Karadeniz bölgesinden olmaması olasılığı nedir?

$N(t)$: t haftada A bölgesine göç edenlerin sayısı

$N_1(t)$: t haftada A bölgesine Karadeniz bölgesinden göç edenlerin sayısı

$N_2(t)$: t haftada A bölgesine Karadeniz bölgesi dışındaki yerlerden göç edenlerin sayısı

$N_1(t)$ ve $N_2(t)$ birbirinden bağımsız ve $N_1(t) \sim Poisson\left(\frac{5}{8}t\right), N_2(t) \sim Poisson\left(\frac{150}{16}t\right)$ olup $N(t) \sim Poisson(10t)$ olacaktır. İstenilen olasılık

$$P(N_1(4) = 0) = e^{-5/2}$$

olur.

Örnek $(M|G|\infty)$: Bir araba servisine müşteriler λ oranlı bir $\{N(t), t \geq 0\}$ Poisson sürecine göre gelmektedir. Müşterilerin servise gelmesi ile bekleme olmaksızın servis verilmektdir ve servis süreleri birbirinden bağımsız G dağılımı ile aynı dağılımlıdır. t zamanına kadar servisten ayrılan müşteriyi 1. tip serviste olan müşteriyi 2.tip olarak adlandıralım.

$X(t)$: t zamanına kadar servisten ayrılan müşteri sayısı

$Y(t)$: t zamanında serviste olan müşteri sayısı

olmak üzere $X(t)$ ve $Y(t)'$nin dağılımını bulunuz.

M: Varışlar arası sürelerin üstel dağılımlı olması

G: Servis süresinin dağılımı

∞: Servisteki personel sayısı

$N(t) = X(t) + Y(t)$ olup $X(t) \sim Poisson(\lambda \int_0^t p(s)ds)$ ve $Y(t) \sim Poisson(\lambda \int_0^t (1 - p(s))ds)$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $p(s)$, yani s zamanında gelen müşterinin 1.tipten olması olasılığını hesaplayalım. Z servis süresini gösteren rasgele değişken olmak üzere

$$p(s) = P(Z \leq t - s) = G(t - s), t \geq s$$

olacaktır. Böylece

$$p = \frac{1}{t}\int_0^t G(t - s)ds$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t G(y)dy$$

ve

$$1 - p = 1 - \frac{1}{t}\int_0^t G(y)dy$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t (1 - G(y))dy$$

bulunur. O halde $X(t) \sim Poisson(\lambda \int_0^t G(y)dy)$ ve $Y(t) \sim Poisson(\lambda \int_0^t (1 - G(y)dy))$ dır.

Şimdi G $U(0,2)$ düzgün dağılımın dağılım fonksiyonu olsun. olsun. Buna göre $X(t)$ ve $Y(t)$'nin dağılımı ne olur?

$$G(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ t/2 & , 0 \leq t < 2 \\ 1 & , t \geq 2 \end{cases}$$

$0 \leq t < 2$ için $\int_0^t G(y)dy = \int_0^t \frac{y}{2}dy = \frac{t^2}{4}$

ve

$t \geq 2$ için $\int_0^t G(y)dy = \int_0^2 G(y)dy + \int_2^t G(y)dy = \int_0^2 \frac{y}{2} dy + \int_2^t 1 dy = t - 1$ olduğundan

$$\int_0^t G(y)dy = \begin{cases} t^2/4 & 0 \leq t < 2 \\ t - 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

bulunur. Buradan

$X(t) \sim Poisson(\lambda \int_0^t G(y)dy)$ ve $Y(t) \sim Poisson(\lambda \int_0^t (1 - G(y)dy))$

dır.

Ödev: G, $\alpha = 2$ ve $\beta = 1$ parametreli gamma dağılımı iken yukarıdaki problemi yeniden çözünüz.