Homojen olmayan Poisson süreci

Tanım: $\{N(t), t \geq 0\}$ bir sayma süreci olsun. $t \geq 0$ için $\lambda(t)$, t'nin bir fonksiyonu olmak üzere

1. $N(0) = 0$,
2. $\{N(t), t \geq 0\}$ bağımsız artışlı,
3. $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$,
4. $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$

ise $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonlu homojen olmayan Poisson süreci denir.

Homojen olmayan bir Poisson sürecinin şiddet fonksiyonu sabit, yani her $t \geq 0$ için $\lambda(t) = \lambda$ ise bu sürece λ oranlı bir Poisson süreci denir. $\{N(t), t \geq 0\}$ λ oranlı bir Poisson süreci iken her $t \geq 0$ için $N(t)$ λt ortalamalı Poisson dağılımlıdır ve bu sürece göre gerçekleşen olaylar arası geçen zamanlar birbirinden bağımsız aynı $1/\lambda$ ortalamalı üstel dağılımlı rasgele değişkenlerdir.

Teorem: $\{N(t), t \geq 0\}$ $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan Poisson süreci olsun.

$M(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ olmak üzere $N(t+s) - N(s) \sim Poisson(M(t+s) - M(s))$, yani

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{e^{-[M(t+s)-M(s)]}[M(t+s)-M(s)]^k}{k!}, k = 0,1,2, \ldots \text{ dir.}$$

Her sabit $t \geq 0$ için $N(t)$, $M(t)$ ortalamalı Poisson dağılımlıdır. Bundan dolayı $M(t)$ homojen olmayan bir Poisson sürecinin ortalama değer fonksiyonudur. Bu fonksiyon aynı zamanda sürecin varyans fonksiyonudur. Ayrıca kovaryans fonksiyonunun bağımsız artışlılık ile

$$Cov(N(s), N(t)) = M(\min(s,t)) \quad s, t \geq 0$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Homojen olmayan Poisson süreci için uygulamalarda en çok karşılaşılan şiddet fonksiyonları kuvvet yasası (power law) ve loglineer yapılarıdır. İlgili şiddet fonksiyonu yapıları sırasıyla

$$\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \alpha, \beta > 0, t \geq 0$$

ve

$\lambda(t) = e^{\alpha+\beta t}$, $-\infty <, \alpha, \beta < \infty,\ t \geq 0$

biçimindedir.

Homojen olmayan bir Poisson sürecinde olaylar arası geçen zamanların bağımsız ve aynı dağılımlı olup olmadığının incelenmesi

$\{N(t), t \geq 0\}$, $\lambda(t)$ şiddet fonksiyonu ile homojen olmayan bir Poisson süreci olsun. $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri bu sürece göre gerçekleşen ardışık olaylar arası geçen zamanları göstermek üzere S_n, n.olayın gerçekleşme zamanını göstersin. $n = 1,2, \dots$ için $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ olduğu açıktır. Burada $S_0 \equiv 0$ alınır.

$P(X_1 > t) = P\big((0, t]\text{aralığında sıfır olay olması}\big) = P(N(t) = 0) = e^{-M(t)}$, $t \geq 0$

olduğundan

$F_{X_1}(t) = 1 - e^{-M(t)}$, $t \geq 0$

ve

$f_{X_1}(t) = \lambda(t)e^{-M(t)}$, $t \geq 0$

olur.

X_2 rasgele değişkeninin dağılımını bulmak için X_1 rasgele değişkeni üzerinden koşullandırma ile

$P(X_2 > t) = \int_0^\infty P(X_2 > t|\, X_1 = s)\lambda(s)e^{-M(s)}ds$

yazılabilir.

$P(X_2 > t|X_1 = s) = P(N(t+s) - N(s) = 0|X_1 = s)$

$= P(N(t+s) - N(s) = 0)$ bağımsız artışlılık ile,

$= e^{-(M(t+s) - M(s))}$ (1)

Böylece

$P(X_2 > t) = \int_0^\infty \lambda(s)e^{-M(t+s)}ds$, $t \geq 0$

olduğundan

$F_{X_2}(t) = 1 - \int_0^\infty \lambda(s)e^{-M(t+s)}ds \ , t \geq 0$

ve

$f_{X_2}(t) = \lambda(t+s)\lambda(s)e^{-M(t+s)} \ , t \geq 0$

bulunur. $\lambda(t)$ sabit olmadıkça (1) ifadesinden X_1 ve X_2 rasgele değişkenlerinin bağımsız olmayacağı açıktır. Ayrıca X_1 ve X_2'nin dağılım fonksiyonlarının ifadelerinden yine $\lambda(t)$ sabit olmadıkça aynı dağılıma sahip olmayacaklardır. Genelde

$n = 1,2, \dots$ için

$P(X_{n+1} > t | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = e^{-\int_0^t \lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n+s)ds}$

$= e^{-\int_{x_1+x_2+\cdots+x_n}^{x_1+x_2+\cdots+x_n+t} \lambda(u)du}$

$= e^{-[M(x_1+x_2+\cdots+x_n+t)-M(x_1+x_2+\cdots+x_n)]}, t \geq 0$

olduğundan $\lambda(t)$ sabit olmadıkça X_1, X_2, ... rasgele değişkenleri bağımsız olmayacaktır.

Şimdi herhangi bir $n \in \{1,2, \dots\}$ için genel halde $X_n$rasgele değişkeninin dağılımını bulalım.

$P(X_n > t | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$

$= e^{-[M(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+t)-M(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})]}$

olduğundan

$P(X_n > t | S_1 = s_1, S_2 = s_2, \dots, S_{n-1} = s_{n-1}) = e^{-[M(s_{n-1}+t)-M(s_{n-1})]}$

olur. Böylece

$$P(X_n > t | S_1 = s_1, S_2 = s_2, \dots, S_{n-1} = s_{n-1}) = P(X_n > t | S_{n-1} = s_{n-1})$$

$$= e^{-[M(s_{n-1}+t)-M(s_{n-1})]} \qquad (2)$$

olacaktır. $n = 2,3, \dots$ için

$$P(X_n > t) = \int_0^\infty P(X_n > t | S_{n-1} = s) f_{S_{n-1}}(s)ds \qquad (3)$$

yazılabilir. (2) ifadesinden $P(X_n > t|S_{n-1} = s)$ koşullu dağılımının analitik ifadesini biliyoruz. Şimdi S_{n-1} rasgele değişkeninin olasılık dağılımını bulalım. $h > 0$ bir sabit olmak üzere

$N(t) = n - 1$ ve $(t, t + h]$aralığında bir olay olması $\Rightarrow t < S_n \leq t + h$

olacağından

$P(t < S_n < t + h) \geq P(N(t) = n - 1$ ve $(t, t + h]$aralığında bir olay olması$)$'dır.

Ayrıca h çok küçük iken

$$t < S_n \leq t + h \Rightarrow N(t) = n - 1 \text{ ve } (t, t + h]\text{aralığında bir olay olması}$$

olduğundan

$P(t < S_n \leq t + h) = P(N(t) = n - 1$ ve $(t, t + h]$aralığında bir olay olması$) + o(h)$

olur. Bu durumda

$$P(t < S_n \leq t + h) = P(N(t) = n - 1)P(\,(t, t + h]\text{aralığında bir olay olması}) + o(h)$$

$$= \frac{e^{-M(t)}(M(t))^{n-1}}{(n-1)!}\left(\lambda(t)h + o(h)\right) + o(h)$$

$$= \lambda(t)\frac{e^{-M(t)}(M(t))^{n-1}}{(n-1)!}h + o(h)$$

olduğundan S_n'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t)\frac{e^{-M(t)}\left(M(t)\right)^{n-1}}{(n-1)!}, t > 0$$

olacaktır. Bu ifadenin (3) ifadesinde göz önüne alınmasıyla

$$P(X_n > t) = \int_0^\infty e^{-[M(t+s)-M(s)]}\lambda(s)\frac{e^{-M(s)}\left(M(s)\right)^{n-2}}{(n-2)!}ds, t \geq 0 = \int_0^\infty \lambda(s)\frac{e^{-M(t+s)}\left(M(s)\right)^{n-2}}{(n-2)!}ds$$

bulunur. Buradan

$$F_{X_n}(t) = 1 - \int_0^\infty \lambda(s)\frac{e^{-M(t+s)}\left(M(s)\right)^{n-2}}{(n-2)!}ds, t > 0$$

ve

$f_{X_n}(t) = \int_0^{\infty} \lambda(s)\lambda(t+s)\frac{e^{-M(t+s)}\left(M(s)\right)^{n-2}}{(n-2)!}ds\ , t > 0$

olur.

X_n'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu incelendiğinde $\lambda(t)$ sabit olmadıkça $X_1, X_2, \ldots$ rasgele değişkenlerinin aynı dağılımlı olamayacağı görülür. Böylece homojen olmayan bir Poisson sürecinin ardışık olaylar arası geçen zamanları şiddet fonksiyonu sabit olmadıkça ne bağımsız ne de aynı dağılımlıdır.

$S_1, S_2, \ldots, S_n$ varış zamanları verildiğinde S_{n+1} varış zamanının koşullu dağılımını bulalım.

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} > t | S_1 = s_1, \ldots, S_n = s_n) &= P(S_{n+1} - S_n > t - s_n | S_1 = s_1, \ldots, S_n = s_n) \\ &= P(X_{n+1} > t - s_n | S_1 = s_1, \ldots, S_n = s_n) \\ &= P(X_{n+1} > t - s_n | S_n = s_n) \\ &= e^{-[M(t) - M(s_n)]}\ ,\ t > s_n \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$f_{S_{n+1}}(t | s_1, \ldots, s_n) = f_{S_{n+1}}(t | s_n) = \lambda(t)e^{-[M(t)-M(s_n)]}\ ,\ t > s_n.$

Negatif değerler almayan bir X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu F ve bozulma oran fonksiyonunu h ile gösterelim. Bu durumda

$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t h(s)ds}\ ,\ t \geq 0$

olduğunu biliyoruz.

Homojen olmayan bir Poisson sürecinin ilk olayının gerçekleşme zamanı olan X_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$F_{X_1}(t) = 1 - e^{-M(t)}\ , t \geq 0$

olduğundan $h(t) = \lambda(t)$ elde edilir. Böylelikle ilk olayın gerçekleşme zamanı olan rasgele değişkenin bozulma oran fonksiyonu homojen olmayan bir Poisson sürecinin şiddet fonksiyonudur.

$N(t)$ verildiğinde $S_1, S_2, \dots, S_{N(t)}$ rasgele değişkenlerinin koşullu dağılımı

$N(t) = n$ verildiğinde $S_1, S_2, \dots, S_n$ varış zamanlarının koşullu dağılımı aşağıdaki şekilde verilir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sürekli ortalama değer fonksiyonu $M(t)$ ile homojen olmayan bir Poisson süreci olsun. Bu durumda $N(t) = n$ verildiğinde $S_1, S_2, \dots, S_n$ varış zamanlarının koşullu dağılımı aşağıdaki dağılımdan alınmış n-birimlik örneklemin sıra istatistiklerinin ortak dağılımı ile aynıdır.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(x)}{M(t)} & , 0 \leq x \leq t \\ 0 & , \quad dy \end{cases}$$