BİLEŞİK POISSON SÜRECİ

Tanım: $\{N(t), t \geq 0\}$ λ oranlı bir Poisson süreci olsun. $Y_1, Y_2 \ldots$'ler birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ surecinden bağımsız olsun. Bu durumda

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \qquad t \geq 0$$

ile tanımlanan $\{X(t), t \geq 0\}$ sürecine bileşik Poisson süreci denir.

Not 1: $X(t)$'nin alacağı değerler Y_i rasgele değişkenlerinin kesikli veya sürekli olmasına göre değişir. $X(t)$ bir sayma süreci olmak zorunda değildir. Çünkü Y_i'lerin aldığı değerlerin kümesi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{Z}$ olabilir.

Not 2: $i = 1,2, \ldots$ için $Y_i = 1$ ise $\{X(t), t \geq 0\}$ süreci λ oranlı bir Poisson sürecidir.

Örnek: $\{X(t), t \geq 0\}$ bileşik Poisson süreci olsun. Bu sürecin bağımsız ve durağan artışlı olduğunu gösteriniz.

Bağımsız artışlılık:

$t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in T$ olmak üzere

$X(t_2) - X(t_1) = \sum_{i=1}^{N(t_2)} Y_i - \sum_{i=1}^{N(t_1)} Y_i = Y_{N(t_1)+1} + Y_2 + \cdots + Y_{N(t_2)}$

$X(t_3) - X(t_2) = \sum_{i=1}^{N(t_3)} Y_i - \sum_{i=1}^{N(t_2)} Y_i = Y_{N(t_2)+1} + Y_2 + \cdots + Y_{N(t_3)}$

$\vdots$

$X(t_n) - X(t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{N(t_n)} Y_i - \sum_{i=1}^{N(t_{n-1})} Y_i = Y_{N(t_{n-1})+1} + Y_2 + \cdots + Y_{N(t_n)}$

olup Y_i'ler bağımsız olduğundan dolayı artış rasgele değişkenleri de bağımsızdır. Bu durumda $\{X(t), t \geq 0\}$ bieşik poisson süreci bağımsız artışlıdır.

$0 < s < t$ için $X(t) - X(s)$'nin dağılımı yalnızca $t - s$'ye bağlı ise $\{X(t), t \geq 0\}$ süreci durağan artışlıdır. Bu durumda $\{X(t), t \geq 0\}$ sürecinin durağan artışlı olup olmadığını bulabilmek için $X(t) - X(s)$'nin dağılımı bulunmalıdır. Ancak bunun dağılımını bulmak zor olduğundan karakteristik fonksiyonunu bulacağız.

Bir X rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonunun $\phi_X(u) = E\left(e^{iuX}\right)$ olduğunu biliyoruz. Burada $i^2 = -1$ dir. Şimdi $X(t) - X(s)$'nin karakteristik fonksiyonu

$$\phi_{X(t)-X(s)}(u) = E\left(e^{iu(X(t)-X(s))}\right) = E\left(E\left(e^{iu(X(t)-X(s))} \middle| N(t) - N(s)\right)\right)$$

dir. Buradan

$\phi_{X(t)-X(s)}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(e^{iu(X(t)-X(s))} \middle| N(t) - N(s) = k\right) P(N(t) - N(s) = k)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(e^{iu\left(\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j - \sum_{j=1}^{N(s)} Y_j\right)} \middle| N(t) - N(s) = k\right) \frac{e^{-\lambda(t-s)}\left(\lambda(t-s)\right)^k}{k!}.$$

$Y_j, j = 1,2, \ldots$ rasgele değişkenleri $N(t) - N(s)$'den bağımsız oldukları için koşul düşecektir. Y_j'lerin herhangi k tanesinin toplamı ile diğer herhangi k tanesinin toplamı aynı dağılımlı olacağından

$$\phi_{X(t)-X(s)}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(e^{iu(Y_1+\cdots+Y_k)}\right) \frac{e^{-\lambda(t-s)}\left(\lambda(t-s)\right)^k}{k!}$$

yazılabilir. $Y_j, j = 1,2, \ldots$'ler aynı dağılımlı olduklarından

$$\phi_{X(t)-X(s)}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_{Y_1}(u))^k \frac{e^{-\lambda(t-s)}\left(\lambda(t-s)\right)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda(t-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\phi_{Y_1}(u))^k \left(\lambda(t-s)\right)^k}{k!}$$

$$= e^{\lambda(t-s)(\phi_{Y_1}(u)-1)}$$

bulunur. Böylece $X(t) - X(s)$'nin dağılımı yalnızca $t - s$ nin bir ifadesine bağlı olacağından bileşik Poisson süreci durağan artışlıdır.

Örnek: $\{X(t), t \geq 0\}$ bileşik Poisson süreci olsun. Bu sürecin ortalama değer, varyans ve kovaryans fonksiyonlarını bulunuz.

$E(X(t)) = E\left(E(X(t)|N(t))\right)$ve $Var(X(t)) = Var\left(E(X(t)|N(t))\right) + E\left(Var(X(t)|N(t))\right)$ olduğunu biliyoruz.

$$E(X(t)) = E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i\right) = E\left(E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \middle| N(t)\right)\right)$$

dır. Burada iç kısımdaki beklenen değer

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \middle| N(t) = n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \middle| N(t) = n\right)$$

olup $N(t)$ toplamdan bağımsız olduğundan koşul düşer, yani

$$E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \middle| N(t) = n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = nE(Y_i)$$

olur. Böylece $E(X(t)|N(t)) = N(t)E(Y_i)$ olacağından

$$E(X(t)) = E(N(t)E(Y_i)) = E(Y_i)E(N(t)) = \lambda t E(Y_i)$$

dir. Benzer olarak

$Var(X(t)) = Var(E(X(t)|N(t))) + E(Var(X(t)|N(t))$

olduğunun göz önüne alınmasıyla

$$Var(X(t)|N(t) = n) = Var\left(\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \,|\, N(t) = n\right) = Var(\sum_{i=1}^{n} Y_i \,|\, N(t) = n) = Var(\sum_{i=1}^{n} Y_i)$$

$$= Var(Y_1 + \cdots + Y_n)$$

$$= nVar(Y_1)$$

ve böylece

$$Var\big(X(t)\big) = Var\big(N(t)E(Y_i)\big) + E\big(N(t)Var(Y_i)\big)$$

$$= E(Y_i)^2 \lambda t + Var(Y_i)\lambda t$$

$$= \lambda t\big(E(Y_i)^2 + Var(Y_i)\big)$$

$$= \lambda t E({Y_i}^2)$$

dır.

Ödev. Bağımsız ve durağan artışlılık özelliğini kullanarak bileşik Poisson sürecinin kovaryans fonksiyonunu bulunuz, yani $s < t$ olmak üzere $K(s,t) = Cov\big(X(s), X(t)\big)$ =?

Örnek: Belli bir bölgeye ailelerin hafta başına $\lambda = 2$ oranlı bir Poisson sürecine göre göç ettiklerini kabul edelim. Her bir ailedeki kişi sayısı bağımsız ve aşağıdaki olasılık fonksiyonu ile aynı dağılımlıdır.

$P(Y = 1) = \frac{1}{6}$

$P(Y = 2) = \frac{1}{3}$

$P(Y = 3) = \frac{1}{3}$

$P(Y = 4) = \frac{1}{6}$

Buna göre:

a) İlk 5 haftada bölgeye göç eden ortalama kişi sayısı nedir?

b) İlk 5 haftada bölgeye hiç göç olmaması olasılığı nedir?

c) İlk 5 haftada bölgeye 2 kişinin göç etmesi olasılığı nedir?

Çözüm. $N(t)$: t haftada bölgeye göç eden aile sayısı

$X(t)$: t haftada bölgeye göç eden kişi sayısı olsun. $N(t) \sim Poisson(2t)$ olduğu verilmektedir.

a) $E\big(X(5)\big) =?$

$E\big(X(5)\big) = 10E(Y_i)$

$E(Y_i)$ değerini bulalım.

$E(Y_i) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{2}$

olduğundan

$E\big(X(5)\big) = 25$

bulunur.

b) $P(X(5) = 0) = P(N(5) = 0) = e^{-10}$

olur.

c)$P(X(5) = 2) = P(X(5) = 2, N(5) = 1) + P(X(5) = 2, N(5) = 2)$

$$=P(N(5) = 1, Y_1 = 2) + P(N(5) = 2, Y_1 + Y_2 = 2)$$

$$= P(N(5) = 1)P(Y_1 = 2) + P(N(5) = 2)P(Y_1 + Y_2 = 2)$$

$$= \left(\frac{e^{-10}10^1}{1!}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{e^{-10}10^2}{2!}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

dir.

Teorem: $\{X(t), t \geq 0\}$ bir bileşik Poisson süreci olsun. Bu durumda $t \to \infty$ iken

$$\frac{X(t) - E(X(t))}{\sqrt{Var(X(t))}} \xrightarrow{\text{dağılımda}} Z \sim N(0,1)$$

dir, yani $X(t)$ büyük t ‘ler için $\lambda t E(Y_i)$ ortalama ve $\lambda t E({Y_i}^2)$ varyans ile yaklaşık olarak normal dağılımlıdır ($X(t) \sim AN\big(\lambda t E(Y_i), \lambda t E({Y_i}^2)\big)$).

Örnek. Yukarıdaki problem için herhangi 50 haftalık sürede bölgeye göç eden kişi sayısının en az 240 olması olasılığı nedir?

$$P(X(50) \geq 240) = P\left(\frac{X(50) - E\big(X(50)\big)}{\sqrt{Var\big(X(50)\big)}} \geq \frac{240 - E\big(X(50)\big)}{\sqrt{Var\big(X(50)\big)}}\right) \approx P(Z \geq -0.3735) = 0.65.$$