

SONLU FARK YÖNTEMLERİ

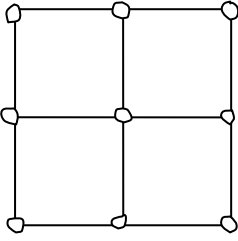
SONLU FARK YÖNTEMLERİ

SFY-A.Thom(1920) tarafından “kareleme metodu” olarak geliştirildi.

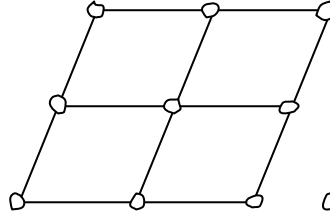
Sonlu farklar tekniği diferensiyel denklemleri-sonlu fark denklemlerine dönüştürür.Bu sonlu farklar yaklaşımı cebirsel formdadır.Bu cebirsel denklemlerde çözüm bölgesinde, bazı komşu noktalardaki değerlere bağlıdır.Bu nedenle sonlu farklar çözümü temel olarak şu üç adımda yapılır.

- (1)Çözüm bölgesi düğüm noktalarından oluşan bir grid'e bölünür.
- (2)Çözülen diferensiyel denklemin sonlu farklar eşdeğeri bir yaklaşımla elde edilir.Bu denklem bir noktadaki bağımlı değişkenler cinsindedir.
- (3)Diferensiyel denklem,belirlenen sınır/veya başlangıç koşulları kullanılarak çözülür.

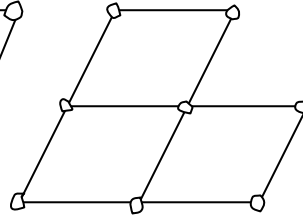
En genel 2-B problemlerde kullanılan gridler:



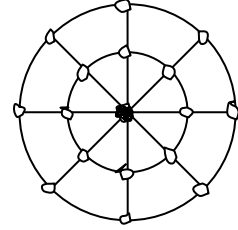
dikdörtgen grid



skew grid



üçgen grid



çembersel grid

PARABOLİK KDD'LERİN SONLU FARKLAR İLE ÇÖZÜMÜ

Tek uzaysal bağımlı değişkene bağlı parabolik KDD örneği,

$$k \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}, k \text{ sabit}$$

Bunun eşdeğer sonlu farklar yaklaşımı

$$k \frac{\phi(i, j+1) - \phi(i, j)}{\Delta t} = \frac{\phi(i+1, j) - 2\phi(i, j) + \phi(i-1, j)}{(\Delta x)^2}$$

Burada $x=i \Delta x, i=0,1,2,\dots,n$

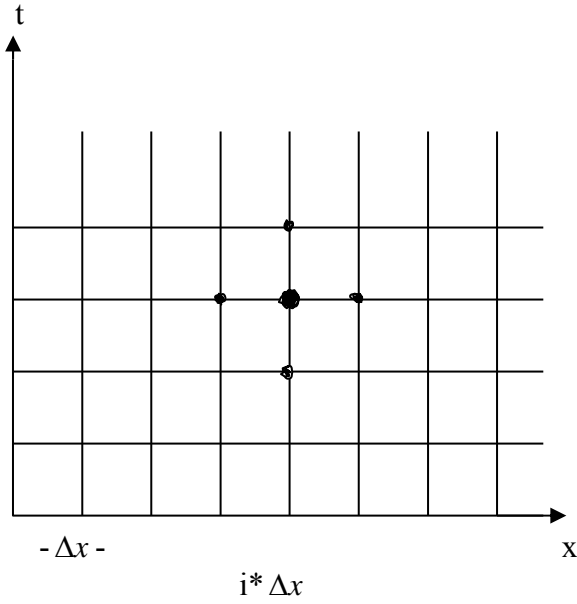
$t=j \Delta t, j=0,1,2,\dots$

Zamana göre türev için ileri farklar,mekana göre 2.türev için merkezi farklar kullanıldı.

$$r = \frac{\Delta t}{k \Delta x^2} \text{ kısaltılması kullanılırsa}$$

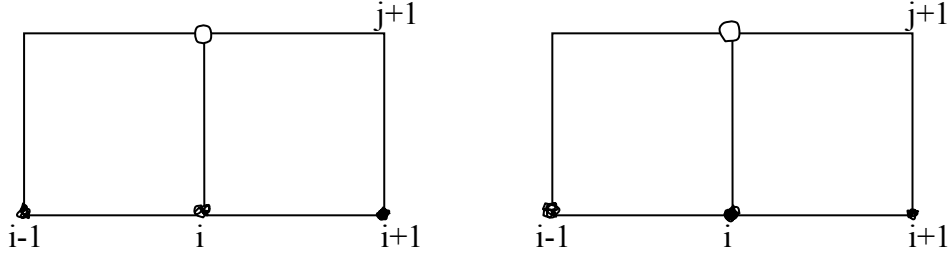
$$\phi(i, j+1) = r\phi(i+1, j) + (1-2r)\phi(i, j) + r\phi(i-1, j)$$

Bu açık formül(explicit formüla) $\phi(x, t + \Delta t)$ olduğunda $\phi(x, t)$ yerine çözülür. Bu nedenle ilk t-zamanda ϕ değeri ($t = \Delta t$), sınır ve başlangıç koşulları kullanılarak hesaplanır. Daha sonra $t = 2\Delta t$ zamandaki ϕ değeri kullanılarak hesaplanır. Bu işlem ardışık devam eder.



İki bağımsız değişken x, t için sonlu fark ağı.

(3.13) denkleminin bir grafik ile açıklarsak, hesaplama noktaları (computational molecule) bir dikdörtgen grid kullanılıyorsa ve içi dolu noktalar ϕ 'nin bilindiği boş noktalar ise bilinmediği nokta ise



$0 < r \leq \frac{1}{2}$ ve $r = \frac{1}{2}$ için

Durağan bir çözüm için veya hataları azaltmak için, r 'nin değerini belirlemek için özel çaba gösterilmelidir. (13) denkleminin $(1-2r)$ değeri negatif geçilse geçerlidir. Bu koşul için

$0 < r \leq \frac{1}{2}$ olmalıdır. Eğer $r = \frac{1}{2}$ seçersek $\phi(i, j+1) = \frac{1}{2}\phi(i+1, j) + \phi(i-1, j)$ r 'ye bağlı durağa

çözüm bulmak için, zaman aralığı, Δt "renders" açık formülü etkili olmaz. Formül uygulamak için basit olmasına rağmen, hesap süresi uzundur.

Crank ve Nicholson (1974) tarafından "implicit" formül önerilmiştir. Bu formül bütün sonlu r

değeri için geçerlidir. Eğer $\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}$ formülü j ve $(j+1)$ inci zaman adımları, le merkezi farklar ile

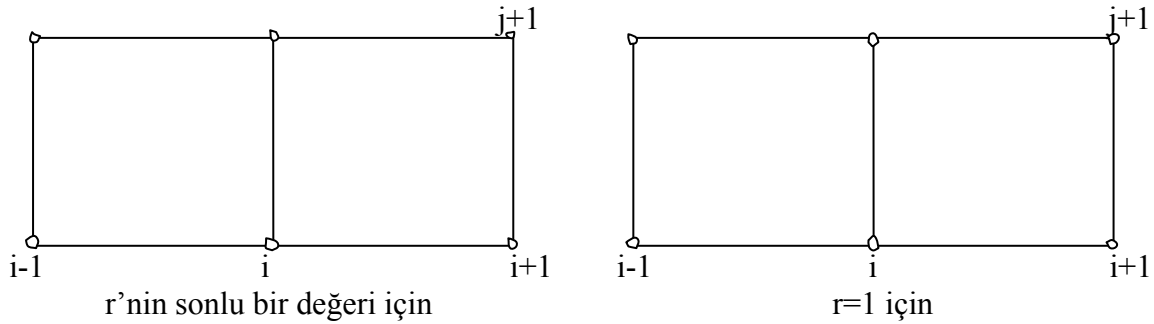
yazılırsa

$$k \frac{\phi(i, j+1) - \phi(i, j)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[\frac{\phi(i+1, j) - 2\phi(i, j) + \phi(i-1, j)}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi(i+1, j+1) - 2\phi(i, j+1) + \phi(i-1, j+1)}{(\Delta x)^2} \right]$$

Bu yeniden yazılırsa

$$-r\phi(i-1, j+1) + 2(1+r)\phi(i, j+1) - r\phi(i+1, j+1) = r\phi(i-1, j) + 2(1-r)\phi(i, j) + r\phi(i+1, j), \left[r = \frac{\Delta t}{k\Delta x^2} \right]$$

Denklemin sol tarafı üç bilinen değerden oluşmakta sağ taraf ise ϕ 'nin bilinmeyen değerlerinden oluşmaktadır. Bu şekil 5a'da açıklanmaktadır.



Crank-Nicholson yönteminde hesaplama molekülleri

Eğer zaman sırasında n-adet düğüm noktası varsa, $j=0$ için 15 denklemi uygulanırsa $i=1, 2, \dots, n$ sonuç n-adet ardışık denklem ile n-adet bilinmeyen ϕ ve bilinen başlangıç ile sınır değerleri elde edilir.

Benzer şekilde $j=1$ için n-adet denklem ile $j=0$ değerleri kullanılarak ϕ 'ler hesaplanır.

Duyarlılık ve koşulsuz durağanlıkların birleştirilmesi sayesinde, daha büyük adımla çözüm bulunabilir. Bütün sonlu r değeri için çözüm doğru olsa da, genellikle r=1 kullanılarak denklem aşağıdaki forma indirgenir. Çözüm molekülleri şekil 5b'dir.

$$-\phi(i-1, j+1) + 4\phi(i, j+1) - \phi(i+1, j+1) = \phi(i-1, j) + \phi(i+1, j)$$

Daha karmaşık sonlu farklar yaklaşımı, yukarıdakine benzer yaklaşımlar kullanılarak geliştirilebilir.

Bunlardan iki tanesi Leapfrog ve Dufort-Frankel yöntemleridir. Bu yöntemlerin hepsi tablo 2'de görülmektedir. Burada son iki yöntemde, iki adım sonlu farklar yaklaşımı ($j+1$)deki ϕ hesabı için j ve j-1 zamanlarındaki ϕ değerlerinin bilinmesi gerekir. Buna karşın ilk iki yöntem tek adım yaklaşımlarıdır. (Ayrıntı için Smith ve Ferziger).

ÖRNEK: "diffusion Denklemi"

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi}{\partial t}, 0 \leq x \leq 1 \text{ aralığında çözümü}$$

$$\phi(0, t) = 0, \phi(1, t) = 0, t > 0 \text{ için (sınır koşulu)}$$

$$\phi(x, 0) = 100 \text{ başlangıç koşulunu kullanarak çözünüz.}$$

ÇÖZÜM: Bu problem $L=1$ m. uzunluğunda çubuktaki ısı dağılımı ile ilgili bir matematik modelidir. Bu çubuğun uçları buz blokları ile kapatılmış (veya $0^\circ C$ uygulanmış) ve çubuğun ilk değeri $100^\circ C$.

Bu fiziksel yorum ile probleminiz, çubuğun iç sıcaklığını zaman ve mesafenin fonksiyonu olarak hesaplar.

Problemde açık ve kapalı iki yol çizilir.

(a) Açık Yöntem:

Basit hesap için $\Delta x = 0.1$ ve $r = \frac{1}{2}$ seçersek

$$\Delta t = \frac{r\Delta x^2}{k} = 0.05, (h=1)$$

çözümü $0 \leq x \leq 0.5$ aralığında bulmak yeterlidir. Çünkü $x=0.5$ de simetriktir.

Önce (3.1.2) ile sınır ve başlangıç değerlerini hesaplayalım.

Bu değerler sabit düğüm noktaları için tabloda verilmektedir.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	1.0
t	50	100	100	100	100	100	100	50
0.05	0	75	100	100	100	100			
0.1	0	50	87.5	100	100	100			
0.15	0	43.75	75	93.75	100	100			
0.2	0	37.5	68.75	87.5	96.87	100			
0.25	0	34.37	62.5	82.81	93.75	96.87			
.									
.									
.									
.									
1.1	31.25	58.59	78.21	89.84...					

$$\phi(i, j+1) = \frac{1}{2} [\phi(i+1, j) + \phi(i-1, j)] \text{ ile çözüm.}$$

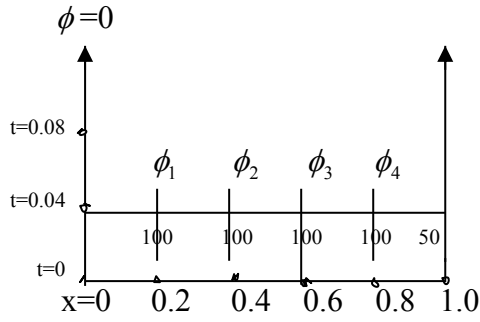
Denklemin sınır koşulları ile analitik çözümü

$$\phi(x, t) = \frac{40n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\pi x^{-n^2\pi^2 t}, n=2k+1$$

Açık sonlu farklar yöntemi ile analitik yöntemin karşılaştırması yapılırsa (tablo 4) sonlu farklar yöntemi makul sonuç vermektedir. Daha iyi çözüm Δx ve Δt adımlarını küçülterek elde edilebilir.

(b) Kapalı Yöntem

$\Delta x = 0.2$ ve $r=1$ seçelim. $\Delta t = 0.04$ hesaplanır. (16) denklemine göre serberst düğüm noktalarını uygulanırsa, $\phi(i, j+1)$ ve ϕ_i ($i=1,2,3,4$) ilk zaman için ϕ değerleridir.



İlk zaman adını için 16.denklemleri ile

$$-\phi(i-1, j+1) + 4\phi(i, j+1) - \phi(i+1, j+1) = \phi(i-1, j) + \phi(i+1, j)$$

$$\begin{aligned} -0 + 4\phi_1 - \phi_2 &= 50 + 100 & \text{--- } t=0.04 \text{ de ---} \\ -\phi_1 + 4\phi_2 - \phi_3 &= 100 + 100 \\ -\phi_2 + 4\phi_3 - \phi_4 &= 100 + 100 \\ -\phi_3 + 4\phi_4 - 0 &= 100 + 50 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \phi_1 &= 58.13 \\ \phi_2 &= 82.54 \\ \phi_3 &= 72 \\ \phi_4 &= 55.5 \end{aligned} \quad \text{hesaplanır.}$$

$\Delta t = 0.08$ için

$$\begin{aligned} -0 + 4\phi_1 - \phi_2 &= 0 + 82.54 \\ -\phi_1 + 4\phi_2 - \phi_3 &= 58.13 + 72 \\ -\phi_2 + 4\phi_3 - \phi_4 &= 82.54 + 55.5 \\ -\phi_3 + 4\phi_4 - 0 &= 72 + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \phi_1 &= 34.44 \\ \phi_2 &= 55.23 \\ \phi_3 &= 56.33 \\ \phi_4 &= 32.08 \end{aligned}$$

*Bu işlem programlanabilir ve adım aralığı küçültülerek daha doğru çözüm bulunabilir.

HİPERBOLİK KDD'İN SONLU FARK İLE ÇÖZÜMÜ

En basit hiperbolik denklem örnek aşağıdaki dalga denklemi verilebilir.

$$V^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad , v=\text{hız}$$

$$V^2 \frac{\phi(i+1, j) - \phi(i, j) + \phi(i-1, j)}{\Delta x^2} = \frac{\phi(i, j+1) - 2\phi(i, j) + \phi(i, j-1)}{\Delta t^2}$$

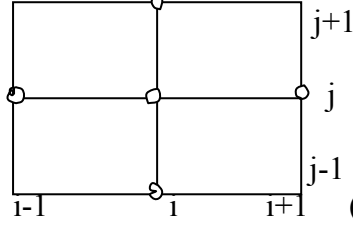
Burada

$$x=i \Delta x, t=j \Delta t, i, j=0, 1, 2$$

$$r = \left(\frac{v \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \text{ alınır (aspect ratio)}$$

$$\phi(i, j+1) = 2(1-r)\phi(i, j) + r[\phi(i+1, j) + \phi(i-1, j)] - \phi(i, j-1)$$

$\phi(i, j+1) \rightarrow \phi(x, t)$ ve dalga denkleminin açık formülü ve ilgili şekil



(şekil 7) $r \leq 1$ ve $r=1$ için dalga denkleminin hesap noktaları.

Eğer $r=1$ seçilirse

$$\phi(i, j+1) = \phi(i+1, j) + \phi(i-1, j) - \phi(i, j-1) \quad (20)$$

Denklem 13 ve 15 dekinden farklı olarak, tek adım yaklaşımı yerine 18 denkleminde iki adım yaklaşımı kullanılmaktadır.

(20) denkleminde ise, ϕ 'nin $j+1$ hesabı için j ve $j-1$ deki değeri bilinmelidir. Bu nedenle, 18 veya 20 denklemi için çözümde ayrı algoritmalar türetmeliyiz.

Yani $\phi(i,1)$ ve $\phi(i,2)$ yi hesaplamalıyız. Bunun için, önceden bir başlangıç koşulu tanımlarız. Örneğin, 17 denkleminde

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

geriye faklar ile

$$\frac{\partial \phi(x,0)}{\partial t} = \frac{\phi(i,1) - \phi(i,-1)}{2\Delta t} = 0$$

$$\phi(i,1) = \phi(i,-1) \quad (21)$$

(21) denklemi (18) de kullanılırsa ve $j=0(t=0)$ alınırsa

$$\phi(i,1) = 2(1-r)\phi(i,0) + r[\phi(i-1,0) + \phi(i+1,0)] - \phi(i,1)$$

veya

$$\phi(i,1) = (1-r)\phi(i,0) + \frac{r}{2}[\phi(i-1,0) + \phi(i+1,0)] \quad (22)$$

(22) denklemi başlangıç ve sınır koşullarını kullanarak her (i,j) deki ϕ değeri (18) ile hesaplanır.

Parabolik KDD de olduğu gibi, hiperbolik KDD'de de kapalı yöntemler var. Fakat hiperbolik KDD'ler kapalı yöntemlerle sonsuz sayıda eşzamanlı denklem elde edilir. Bu nedenle bazı basitleştirmeler yapılmadan kullanılamazlar.

Her nokta (i,j) , h =ağ boyutlu.

eğer kaynak terim yoksa, $(g(x,y)=0)$ denklem Laplace denklemine dönüşür. Bu durumda (25) denklemi;

$$\phi(i, j) = \frac{1}{4} [\phi(i+1, j) + \phi(i-1, j) + \phi(i, j+1) + \phi(i, j-1)] \quad (26)$$

Buradan bir nokta, onun çerçevesindeki dört noktanın aritmetik ortasına eşit. 5. noktalı hesap (ağıl molekülü) şeklinde görülmektedir. Burada değerlerin katsayıları gösterilmiştir.

Eliptik denklem'e SF. yaklaşımı sonucu büyük bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. bunları çözümü büyük bir problemdir.

GENEL CEBİRSEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİ (s.647)

1-) Bant dizey yöntemi (gauss elimination)-Eliminasyon yöntemleri

$$[A][X] = [B] \rightarrow [X] = [A]^{-1}[B]$$

2-) İterative yöntem

3-) genel yineleme yöntemi

- JACOBI
- GAUSS-SEIDEL
- SUCCESSIVE OVER-RELAXATION (SOR)

SOR YÖNTEMİ:

ilk önce (i,j) noktası için hata(residual)- $R(i,j)$ tanımlı

$$R(i,j) = \phi(i+1, j) + \phi(i-1, j) + \phi(i, j+1) + \phi(i, j-1) - 4\phi(i, j) - h^2 g(i, j)$$

k 'ncü yinelemede residual- $R^k(i,j)$ ile gösterilir. Bu değer $\phi(i, j)$ 'yi düzeltme değeri

olabilir. Gerçek değere yaklaştıkça $R^k(i,j) \rightarrow 0$ olmalı. Bu nedenle çakışma oranı geliştirmek için k 'ncü yinelemeli residual'i w gibi bir sayı ile çarpıp $\phi(i, j)$ 'ye ekleyebiliriz. Böylece $k+1$ 'inci yinelemede $\phi(i, j)$ elde edilir. yani ;

$$\phi^{k+1}(i, j) = \phi^k(i, j) + \frac{w}{4} R^k(i, j) \quad \text{veya;}$$

$$\phi^{k+1}(i, j) = \phi^k(i, j) + \frac{w}{4} [\phi^k(i+1, j) + \phi^{k+1}(i-1, j) + \phi^{k+1}(i, j-1) - 4\phi^k(i, j) - h^2 g(i, j)]$$

(31).

w -relaxation factor olarak bilinir. yöntem ise "successive over-relaxation(SOR)". $1 < w < 2$ aralığında değişir. $w=1$ olursa, yöntem successive relaxation adını alır. Optimum w -değeri

deneme yanılma ile bulunur.(31) denklemi için başlangıç koşulu $\phi(i, j)$ her serbest nokta için seçilir.Genel olarak $\phi(i, j)=0$ veya sabit noktaların averaj olarak alınır.

ÖRNEK:

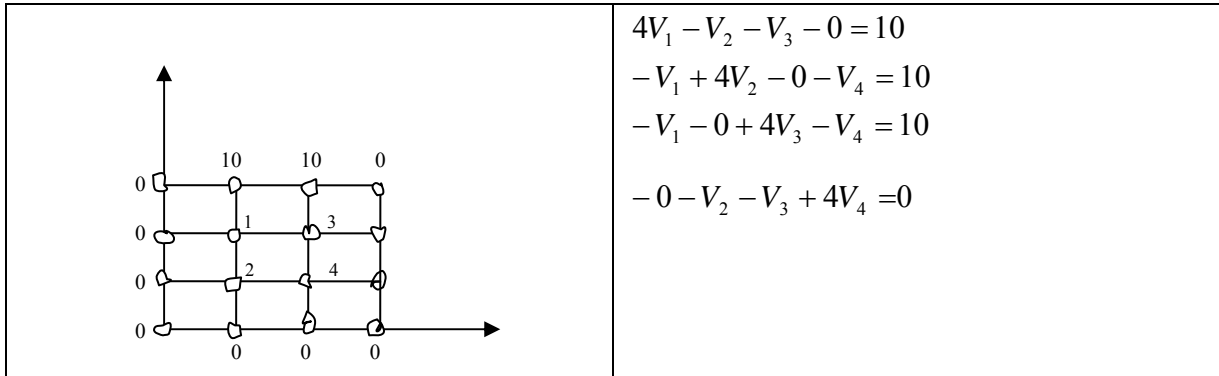
$$\nabla^2 V = 0, \quad 0 \leq X, Y \leq 1$$

$$V(X,1) = 45X(1 - X),$$

$$V(X,0) = V(0,Y) = V(1,Y) = 0$$

ÇÖZÜM:

$h=1/3$ alalım



$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$AV=B \Rightarrow$ A:band dizey , V:?, B:sabit noktalardaki pot.deger

$$\begin{bmatrix} v_1 = 3,75 \\ v_2 = 3,75 \\ v_3 = 1,25 \\ v_4 = 1,25 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK:

$\nabla^2 V = \frac{-g_s}{\epsilon}$, $0 \leq x, y \leq 1$ şeklindeki grid noktalarındaki v-gerilmelerini

hesaplayınız. $g_s = x(y-1)$ nc/m² , $\epsilon_r = 1.0$. (SOR-kullan).

problemin analitik çözümü var. Özellikle bu problem seçildi. Hem SF. çözümünü analitik çözümle karşılamak için hem de analitik çözümün karmaşık ve zor olmasına rağmen, sayısal çözümün basit ve sade olmasını göstermek için. Gerçek çözüm için superpozisyon ilkesi uygulanırsa,

$$V = V_1 + V_2 \longrightarrow \text{poisson denkleminin çözümü } \nabla^2 v_2 = g = -g_s / \epsilon_0$$

↓
(Homejen sınır kosulu ile)

Laplace denk. çözümü $\nabla^2 v_1 = 0$ (şekilde gösterilen homojen olmayan sınır koşulu için)

ANALİTİK ÇÖZÜM

$$v_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

$$v_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$A_{mn} = \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{\left[1.0 - \frac{1}{b} [1 - (-1)^n] \right] (-1)^{m+n} .144ab}{\left[(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 \right] mn\pi}$$

$$a=b=1 \text{ ve } g(x, y) = -x(y-1) \cdot 10^{-9} / \epsilon_0$$

SF. çözümünde, dikdörtgen optimun w (over-relaxation faktor) quadratic denklemin küçük kökleri ile verilebilir.

$$t^2 w^2 - 16w + 16 = 0, t = \cos\left(\frac{\pi}{N_x}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{N_y}\right)$$

N_x, N_y x, y absislerinde örnekleme aralığı buradan;

$$w = \frac{8 - \sqrt{64 - 16t^2}}{t^2}$$

üç durumu denersek: $N_x = N_y = 4, 12, 20$ Böylece $\Delta_x = \Delta_y = h = \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$ ayrıca

$$g(x, y) = \frac{-g_s}{\epsilon} = \frac{-x(y-1)10^{-9}}{10^{-9}/36\pi} = -36\pi x(y-1)$$

(S.158 ve 159-çözüm ve fortran programına bak)

SF ÇÖZÜMLERİNİN DUYARLILIĞI VE DURANLIĞI (ACCURACY AND STABILITY)

Duyarlılık \Rightarrow yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınlığı ile ölçülür.

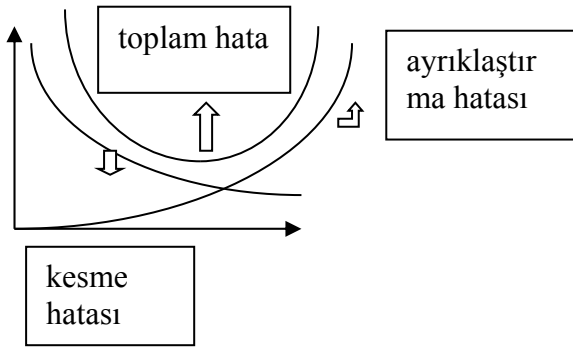
Durağanlık \Rightarrow zaman arttıkça çözümün genliğinin artmasının sağlanmasıdır.

SAYISAL ÇÖZÜMDE KAÇINILMAZ 3 HATA TÜRÜ VARDIR.

- MODELLEME HATASI
- KESME TALARI (AYRIKAŞTIRMA)
- YUVARLATMA HATALARI

Modelleme hataları matematik modeli kurarken kullanılan birçok yaklaşımda kaynaklanır.Örneğin doğrusal olmayan bir sistemi doğrusal bir KDD ile tanımlanır. Kesme hatası,sayısal yaklaşımda sonsuz serilerle tanımlanan işlemlerde sonlu sayıda terimi kullanmazdan kaynaklanır.Örneğin Taylor serisinde belli terimden sonrasını keseriz.Bu hata daha sıkı bir ağ ile azaltılabilir.Yani ağ boyutu ve zaman aralığı küçültülerek bu hatalarda kaçınılırız.diğer bir yol,daha fazla terimi (seride) türev işlemine katabiliriz.Bunu için yüksek dereceli terimlere dikkat etmek gerekir.Durağan olmama(instability) → KDD'nin derecesinden yüksek dereceli bir fark denkleminin kullanmamızdan kaynaklanabilir.Bu yüksek dereceli fark denklemleri “spurious çözümleri” bulmamıza neden olabilir.

Kesme(roundoff) hataları, bilgisayarın bir sonlu duyarlılıkla hesapları yapmasından kaynaklanabilir.Bu bilgisayarların sınırlı aritmetik adresleme yapmasından kaynaklanır.Bu hata double-precision aritmetik kullanarak önlenbilir.Bu hatadan kurtulmanın tek yolu,tüm hesapların tamsayılarla yapılmasıdır.Fakat bu mümkün değildir.Ağ'da adım boyunu küçültmenin (h) duyarlılığı artıracakı söylense de bu çok küçük olamaz.Daha sık mesh → aritmetik işlemlerden kaynaklanan kesme hatasını artırabilir.



Bir sayısal algoritma,eğer her adımdaki hataların toplamı küçük bir değerse durağandır denir.Durağan olmama (instability) durumunda(sınırlı olmayan çözüm)soncu çok anlamsız sonuç elde edilir.