SAYISAL TÜREV

$$f(x_{i+1})=f(x_i)+f'(x_i)\underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{h}+\frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2+....+Rn$$

$$f(x_{i+1})=f(x_i)+f'(x_i)(x_{i+1}-x_i)+R_1$$

$$f(x_i)'=\underbrace{\frac{f(x_{i+1})\,f(x_i)}{x_{i+1}-xi}}_{\text{1.derece yaklaştırma}}-\underbrace{\frac{R_1}{x_{i+1}-x_i}}_{\text{kesme hatası}}$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1}+x_i)^{n+1} \qquad \text{n=1 için } R_1=\frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2$$

$$\frac{R_1}{(x_{i+1}-x_i)}=\frac{f''(x_i)}{2!}[x_{i+1}-x_{i,}]^2 \Rightarrow \frac{R_1}{x_{i+1}-x_i}=0(x_{i+1}-x_i)$$

*Doğrusal olmama ve adım büyüklüğünün Taylor Serisi yaklaştırmasına etkisi

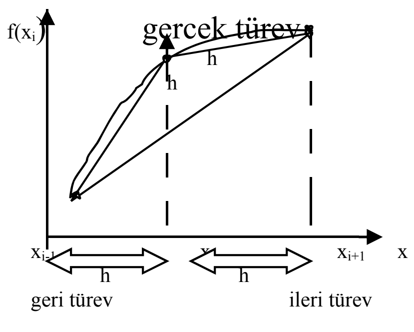
f(x=x^m ,x=1-2 m=1,2,3 ve 4

1.derce Taylor serisi kullanarak adım büyüdükçe kesme hatası artar.

"Sonlu bölünmüş fark" $f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1}-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}+0(x_{i+1}-x_i)$

$$f'(x_i)=\frac{\Delta f_i}{h}+0(h)$$

Burada Δf_i -birinci ileriye fark adını alır.Çünkü x'deki türevi x_{i+1} kullanarak bulmaktadır.h ise adım büyüklüğü yani yaklaştırmanın yapıldığı aralığının uzunluğudur.



geri farklar 1.türev

f(x_{i-1})=f(x_i)- $f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - ...$ (mesafe (-) çıktığından tek üsler (-) terim)

(1) $f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{\nabla f_i}{h} \rightarrow \nabla f_{i\rightarrow}$ birinci geriye türev

<u>merkezi farkla 1.türev</u>

f(x_{i+1})=f(x_i)+ $f'(x_i)$h+$\frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + ...$ burada (1) eşitliği kullanılırsa

f(x_{i+1})=f(x_{i-1})+2 $f''(x_i)h + \frac{2f^3(x_i)}{3!}h^3 + ...$

$\Rightarrow f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^3(x_i)}{h}h^2 -....$

veya

$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2)$,h^2 kesme hatası mertebesi

Dolayısı ile Taylor serisi analizi,türevin ifade edilmesinde merkezi fark kullanılmasının daha doğru bir ifade şekli olduğu pratik bilgisini verir.

ÖRNEK:Türevin sonlu bölünmüş farl ile ifade edilmesi o(h) mertebesinde ileri ve geri fark yaklaştırması ile O(h^2) mertebesinde merkezi fark yaklaştırması kullanarak

f(x)=-0.1x^4-0.15x^3-0.5x^2-0.25x+1.2

fonksiyonunun 1.türevini x=0.5 ve h=0.5 adım büyüklüğü için hesaplayın.Hesabı h=0.25 adımı için tekrarlayın.

Gerçek türev $\longrightarrow$ $f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - 1.0x - 0.25$
$f'(0.5) = -0.9125$,
h=0.5 için

$f(x_{i-1}) = f(0) = 1.2$
$f(x_i) = f(0.5) = 0.925$
$f(x_{i-1}) = f(1) = 0.2$

İleriye doğru bölünmüş fark

$f'(0.5) \cong \frac{0.2 - 0.925}{0.5} = -1.45$ |E_B|=%58.9

Geriye doğru bölünmüş fark

$$f'(0.5) \cong \frac{0.925-1.2}{0.5} = -0.55 \qquad |E_B|=\%39.7$$

Merkezi fark bölünmüş fark

$$f'(0.5) \cong \frac{0.2-1.2}{1} = -1 \qquad |E_B|=\%9.6$$

h=0.25

$x_{i-1}=0.25 \longrightarrow f(0.25)=1.103$
$x_i=0.5 \longrightarrow f(0.25)=0.925$
$x_{i+1}=0.75 \longrightarrow f(0.75)=0.6363$

ileri fark --- $f'(0.5) = \dfrac{0.625-0.925}{0.25} = -1.115 \qquad |E_B|=\%26.5$

geri fark --- $f'(0.5) \cong \dfrac{0.925-1.1035}{0.25} = -0.714 \qquad |E_B|=\%21.7$

merkezi fark --- $f'(0.5) \cong \dfrac{0.6363-1.1035}{0.5} = -0.934 \quad |E_B|=\%2.4$

Yüksek Mertebeli türevlerin Sonlu Farklarla Yaklaşık İfadesi

$$f(x_{i+2})=f(x_i)+ f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(2h)^2 + ...$$

$$\_ \quad f(x_{i+1})=f(x_i)+ f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + ... /2$$

$f(x_{i+1})-2f(x_{i+1})=-f(x_i)- f'(x_i) - f''(x_i)2h^2 + ...$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

*İleriye doğru sonlu bölünmüş fark.

Benzer şekilde geriye doğru sonlu bölünmüş fark

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h^2)$$

Merkezi sonlu bölünmüş fark ise,

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

ayrıca merkezi fark için

$$f''(x_i) \cong \frac{\dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}}{h}$$

2.türev, türevin türevi ise benzer şekilde 2.bölünmüş farkta birinci bölünmüş farkın farkıdır.