2.2. DALGA ALANININ SONLU FARKLARLA İFADESİ)

İki boyutlu heterojen bir ortamda x ve z yatay ve düşey eksenler ve z ekseni aşağıya doğru pozitif olsun. Bu şartlardaki bir basınç dalgası (P dalgası) hareketi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-f \qquad (2.12)$$

diferansiyel denklemi ile verilmektedir. Burada $v = v(x,z)$ dalganın yayılma hızı, $u = u\,(x,z,t)$ dalganın yerdeğiştirme vektörü, $f= f(t)$ kaynak fonksiyonudur. Zaman – uzay gridleri de şu şekilde tanımlanmaktadır.

$$x_m = m\Delta x \qquad \mathrm{m = 1,\text{---------------},M}$$

$$z_n = n\Delta z \qquad \mathrm{n = 1,\text{----------------},N}$$

$$t_k = k\Delta t \qquad \mathrm{k = 1,\text{----------------},K}$$

$\Delta x, \Delta z$ uzay örnekleme aralıkları , Δt zaman örnekleme aralığıdır.Yine

$$v_{m,n} = v(x_m, z_n)$$

$$u_{m,n,k} = u(x_m, z_n, t_k)$$

şeklinde gösterilmektedirler.Ayrıca

$$g_{m,n} = (v_{m,n})^2$$

dir.Buna göre dalga denklemi şu şekilde yeniden ifade edilebilir.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[g(x,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right]=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+g(x,z)f(t)\delta(x-x_s)\delta(z-z_s) \qquad (2.13)$$

Burada δ birim impuls fonksiyonudur. Dalga denkleminde kullanılan ikinci dereceden türevler, ikinci merkezcil fark operatörü kullanılarak elde edilmektedir. (m,n) noktalarındaki birinci türev değerleri $\Delta x = \Delta z$ olarak alındığında (Şekil 2.1-a) şu şekilde verirler.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m,n,k} \cong \left(u_{m+1/2,n,k} - u_{m-1/2,n,k}\right)/\,\Delta x$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{m,n,k} \cong \left(u_{m,n+1/2} - u_{m,n-1/2,k}\right)/\,\Delta z \qquad (2.14)$$

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{m+1/2,n,k} = \left(u_{m+1,n,k} - u_{m,n,k}\right) / \Delta x$$

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{m-1/2,n,k} = \left(u_{m,n,k} - u_{m-1,n,k}\right) / \Delta x \qquad (2.15)$$

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right)_{m,n+1/2,k} = \left(u_{m,n+1,k} - u_{m,n,k}\right) / \Delta x$$

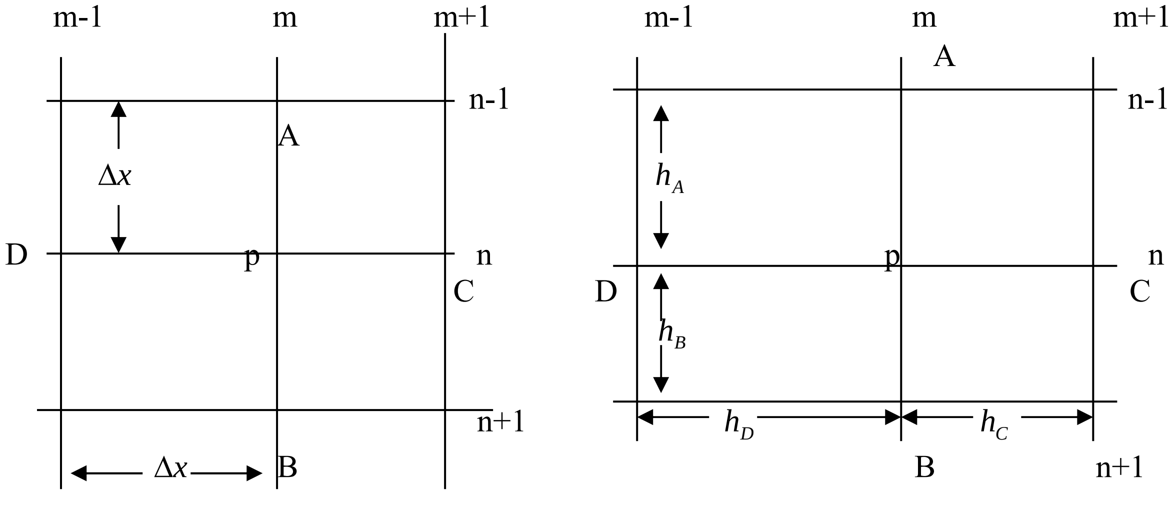
$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right)_{m,n-1/2,k} = \left(u_{m,n,k} - u_{m,n-1,k}\right) / \Delta x \qquad (2.16)$$

$$g_{m+1/2,n} = \left(g_{m,n} + g_{m+1,n}\right) / 2$$

$$g_{m-1/2,n} = \left(g_{m,n} + g_{m-1,n}\right) / 2$$

$$g_{m,n+1/2} = \left(g_{m,n} + g_{m,n+1}\right) / 2 \qquad (2.17)$$

$$g_{m,n-1/2} = \left(g_{m,n} + g_{m,n-1}\right) / 2$$



a **b**

Şekil 2.1 **a-** $\Delta x = \Delta z$ olması durumu.

b- $\Delta x \neq \Delta z$**,** Δx ve Δz sırasıyla *x* ve *z* yönlerinde değişken olması durumu

Bu ifadelere göre;

$$\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m+1/2,n,k} = \frac{\left(g_{m,n}+g_{m+1,n}\right)}{2\Delta x}\left(u_{m+1,n,k}-u_{m,n,k}\right)$$

(2 . 18)

$$\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m-1/2,n,k} = \frac{\left(g_{m,n}+g_{m-1,n}\right)}{2\Delta x}\left(u_{m,n,k}-u_{m-1,n,k}\right)$$

$$\left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{m,n+1/2,k} = \frac{\left(g_{m,n}+g_{m,n+1}\right)}{2\Delta x}\left(u_{m,n+1,k}-u_{m,n,k}\right)$$

(2 . 19)

$$\left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{m,n-1/2,k} = \frac{\left(g_{m,n}+g_{m,n-1}\right)}{2\Delta x}\left(u_{m,n,k}-u_{m,n-1,k}\right)$$

olur. Birinci türevler bulunduğuna göre , ikinci türevler de bunlardan yararlanarak şu şekilde bulunurlar.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{m,n,k} = \left[\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m+1/2,n,k} - \left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m-1/2,n,k}\right]/\Delta x \qquad (2.20)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]_{m,n,k} = \left[\left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{m,n+1/2,k} - \left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{m,n-1/2,k}\right]/\Delta x \qquad (2.21)$$

Sağ taraftaki birinci türevler yerlerine konulduklarında *x*'e göre ikinci türev

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{m,n,k} = a_{m,n}u_{m+1,n,k} - \left(a_{m,n}+b_{m,n}\right)u_{m,n,k} + b_{m,n}u_{m-1,n,k} \qquad (2.22)$$

olur.buradaki katsayılar

$$a_{m,n} = \frac{g_{m,n}+g_{m+1,n}}{2(\Delta x)^2}$$

(2 . 23)

$$b_{m,n} = \frac{g_{m,n} + g_{m-1,n}}{2(\Delta x)^2}$$

dir.Benzer şekilde z'ye göre ikinci türev ;

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]_{m,n,k} = c_{m,n}u_{m,n+1,k} - (d_{m,n} + c_{m,n})u_{m,n,k} + d_{m,n}u_{m,n-1,k} \qquad (2.24)$$

dir.Buradaki katsayılar da ;

$$c_{m,n} = \frac{g_{m,n} + g_{m,n+1}}{2(\Delta x)^2}$$

$$d_{m,n} = \frac{g_{m,n} + g_{m,n-1}}{2(\Delta x)^2} \qquad (2.25)$$

dir.Yine *t*'ye göre ikinci türev ikinci merkezcil fark operatörü kullanılarak;

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{m,n,k} = (u_{m,n,k+1} - 2u_{m,n,k} + u_{m,n,k-1})/(\Delta t)^2 \qquad (2.26)$$

bulunur.Buradaki $(\Delta t)^2$ çarpanı uzay değişkenlerine göre ikinci türevlere çarpan olarak geçirilebilir.Ayrıca burada $\Delta x = \Delta z$ olduğu için ve Δx , '*x*' yönünde değişmediği için

$$a_{m-1,n} = b_{m,n}$$

$$c_{m,n-1} = d_{m,n} \qquad (2.27)$$

ve

$$a_{m,n} = \frac{(g_{m,n} + g_{m+1,n})}{2(\Delta x)^2}(\Delta t)^2$$

$$c_{m,n} = \frac{(g_{m,n} + g_{m,n+1})}{2(\Delta x)^2}(\Delta t)^2 \qquad (2.28)$$

dir.Bu durumda **şekil 2.1a-** da görüldüğü gibi herhangi bir ***p*** noktasındaki dalga alanı **(2. 13)** denklemine göre şu şekilde ifade edilir.

$$u_{m,n,k+1} = a_{m,n}u_{m+1,n,k} + a_{m-1,n}u_{m-1,n,k} + c_{m,n}u_{m,n+1,k} + c_{m,n-1}u_{m,n-1,k}$$

$$-\left(a_{m,n} + a_{m-1,n} + c_{m,n} + c_{m,n-1} - 2\right)u_{m,n,k} - u_{m,n,k-1} + g_{m,n}\, f(k+1)\delta(m-m_s)\delta(n-n_s) \qquad (2\,.\,29)$$

Buna göre **k** ve **k-1** zamanlarındaki dört komşu noktadaki alan değerleri kullanılarak **K+1** zamanındaki herhangi bir (m,n) noktasındaki dalga alanı hesaplanabilir.Ayrıca bu ifadedeki (m_s, n_s) kaynak noktasıdır.

$\Delta x \neq \Delta z$, Δx ve Δz sırasıyla *x ve z* yönlerinde değiştiği durumlarda ise **Şekil 2.1b'** ye göre , birinci ve ikinci türevler yeniden şu şekilde tanımlanırlar.

$$\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m+1/2,n,k} = \frac{\left(g_{m,n} + g_{m+1,n}\right)}{2h_C}\left(u_{m+1,n,k} - u_{m,n,k}\right)$$

$$\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m-1/2,n,k} = \frac{\left(g_{m,n} + g_{m-1,n,k}\right)}{2h_D}\left(u_{m,n,k} - u_{m-1,n,k}\right) \qquad (2\,.\,30)$$

$$\left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{m,n+1/2,k} = \frac{\left(g_{m,n} + g_{m,n+1}\right)}{2h_B}\left(u_{m,n+1,k} - u_{m,n,k}\right)$$

$$\left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{m,n-1/2,k} = \frac{\left(g_{m,n} + g_{m,n-1}\right)}{2h_A}\left(u_{m,n,k} - u_{m,n-1,k}\right) \qquad (2\,.\,31)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{m,n,k} = \frac{2}{\left(h_C + h_D\right)}\left[\left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m+1/2,n,k} - \left(g\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{m-1/2,n,k}\right] \qquad (2\,.\,32)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]_{m,n,k} = \frac{2}{\left(h_A + h_B\right)}\left[\left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{m,n+1/2,k} - \left(g\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{m,n-1/2,k}\right] \qquad (2\,,\,33)$$

dir.Buna göre yeni katsayılar ;

$$a_{m,n} = \frac{\left(g_{m,n} + g_{m+1,n}\right)}{h_C\left(h_D + h_C\right)}(\Delta t)^2 \qquad (2\,.\,34\,.\,a)$$

$$b_{m,n} = \frac{\left(g_{m,n} + g_{m-1,n}\right)}{h_D\left(h_D + h_C\right)}(\Delta t)^2 \qquad (2\,.\,34\,.\,b)$$

$$c_{m,n} = \frac{\left(g_{m,n} + g_{m,n+1}\right)}{h_B\left(h_B + h_A\right)}\left(\Delta t\right)^2$$

(2 . 35)

$$d_{m,n} = \frac{\left(g_{m,n} + g_{m,n-1}\right)}{h_A\left(h_B + h_A\right)}\left(\Delta t\right)^2$$

olmaktadır.Bu durumda **şekil 2.1b** ‘ de görüldüğü gibi herhangi bir **p** noktasındaki dalga alanı **(2 . 13)** denklemine göre ;

$$\begin{aligned} u_{m,n,k+1} &= a_{m,n}u_{m+1,n,k} + b_{m,n}u_{m-1,n,k} + c_{m,n}u_{m,n+1,k} + d_{m,n}u_{m,n-1,k} \\ &- \left(a_{m,n} + b_{m-1,n} + c_{m,n} + d_{m,n} - 2\right)u_{m,n,k} - u_{m,n,k-1} \\ &+ g_{m,n}\, f\left(k+1\right)\delta\left(m - m_s\right)\delta\left(n - n_s\right) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. (Mufti 1985)

2. 3. KARARLILIK (STABILITY) ŞARTI, GRİD DİSPERSİYONU ve BUNLARA GÖRE ZAMAN ve UZAY ÖRNEKLEME ARALIKLARININ BELİRLENMESİ

Fiziksel anlamda sayısal hesaplama, sonlu farklar algoritmasının sabit olmasını gerektirmektedir.Yani zaman indisi **k ,** Δt zaman artımına bağlı olarak bütün m , n’ ler için arttığından dolayı sınırlı olmalıdır. Kararlılık koşulu için farklı yaklaşımlar yapılmıştır. $\Delta x = \Delta z$ olması durumunda ; Alterman and Rotenberg (1969) , Ottaviani (1971)’e göre;

$$v_{\max}\Delta t / \Delta x \langle 0.86 \qquad (2 . 37)$$

şartı sağlanmalı , Alford et al (1974)’e göre ise

$$v_{\max}\Delta t / \Delta x \leq 1/\sqrt{2} \qquad (2 . 38)$$

olması gerekmektedir.Genelde Alford et al (1974) kararlılık şartı kullanılmaktadır. $\Delta x \neq \Delta z$ olması durumunda ise Virieux (1985)’e göre ;

$$v_{\max}\Delta t\sqrt{\left(\frac{1}{\left(\Delta x\right)^2} + \frac{1}{\left(\Delta z\right)^2}\right)}\langle 1 \qquad (2. 39)$$

şartı sağlanmalıdır.Bu ifadeler Δt ’ nin keyfi olarak seçilemeyeceğini göstermektedir. Δt seçimi ortamdaki maksimum hız, Δz ve Δx grid aralıkları ile kontrol edilmelidir.

Ayrık gridler üzerinde yayınan dalgalar , artan ilerleme zamanlarıyla değişime uğramaktadırlar.Bu olay **‘grid dipersiyonu ‘** olarak adlandırılır. Grid dispersiyonu frekansla normal hız değişimini ortaya çıkarmaktadır.Dağılma yüksek frekanslarda ve uzun dalga boylarında artmaktadır. Dispersiyon grid aralıklarının büyük olduğu durumlarda daha da etkilidir.Yine dağılma özellikle yüksek frekanslarda yönbağımlıdır.(Anisotropic) (Alford et al 1974 , Kosloff and Baysal 1982). Yeterli duyarlılıkta modellenebilecek en kısa dalga boyu olarak on grid noktası uzunluğu alınması gerektiği Alford et al (1974) ve Kosloff And Baysal (1982) tarafından belirtimiştir.

Modellemede kullanılan en kısa dalga boyu , yer kesitindeki en düşük hızın en yüksek frekansa bölünmesiyle belirlenir. Örnekleme teorisine göre seçilen en büyük grid aralığı en kısa dalga boyunun yarısıdır.Maksimum frekans ise kaynak dalgacığının belirgin olan en yüksek frekansı olarak tanımlanabilir. Kaynağın en yüksek frekansı sonuçta ayrımlılığı belirleyeceği için yer kesitine uygun bir frekans bandı seçilmelidir (Kosloff and Baysal 1982 ,Baysal 1992)

2 . 4 . İLK DEĞERLER ve SINIR ŞARTLARI

(2. 29) veya **(2.36)** ifadelerinden görüldüğü gibi hesaplamaya başlamak için $t = 0$ ve $t = -\Delta t$ zamanlarındaki değerlerin tanımlanması gerekmektedir. $t = -\Delta t$ ‘ de dalga alanının sıfır olduğu bilinmektedir.Buna göre sadece $t = 0$ ‘ daki dalga alanının tanımlanması gerekmektedir. Yani bütün m , n noktaları için $u_{m,n,1}$ değerlerinin verilmesi yeterlidir. Bütün m, n noktalarında tanımlanan kaynak alanının ilk değeri $u_{m,n,1}$ değerlerine atanarak bütün m , n noktaları için ilk değer verilmiş olunur. Bu matematiksel olarak ;

$$u_{m,n,k} = u^{(0)}_{m,n,k} \qquad k = 1 \qquad (2 . 40)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $u^{(0)}$ kaynak alan fonksiyonudur.Bunun nasıl hesaplanacağı daha ileride anlatılacaktır.

Yine dalga alanı hesabında yer modellerinin ölçüleri yatay ve düşey olarak sınırlandırılmak zorundadır. Bu nedenle uygulamaya başlamak için sınır şartlarının belirlenmesi gerekmektedir.Sınırlarda genellikle **‘‘Neumann katı yüzey sınır şartı ’’** veya **‘‘Dirichlet serbest yüzey sınır şartı ’’** kullanılmaktadır.Bunlar ;

$$\left.\begin{matrix} u_{1,n,k} = 0 & u_{m,1,k} = 0 \\ u_{M,n,k} = 0 & u_{m,N,k} = 0 \end{matrix}\right\} \text{(Dirichlet Sınır Şartı) (2. 41)}$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial u_{1,n,k}}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial u_{m,1,k}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial u_{M,n,k}}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial u_{m,N,k}}{\partial z} = 0 \end{matrix}\right\} \text{(Neumann Sınır Şartı) (2 . 42)}$$

ile ifade edilir.Bu şartlara göre sınırlarda yansıma katsayısı $|R| = 1$ olmaktadır.Bu da sınıra gelen dalga ile sınırdan yansıyan dalganın genliğinin aynı olması demektir.Bu durum ise istenmeyen kenar yansımalara sebep olmakta ve bu nedenle hesaplanan dalga alanını olumsuz olarak etkilemektedir.Bu sınır şartları kullanıldığında model boyutları yeteri kadar büyük verilirse hesaplama zamanı içinde bu sınırlardan yansıma elde edilmeden model için dalga alanı hesaplanabilir veya sınır yansımaların görüldüğü bölümler atılarak doğru dalga alanı elde edilebilir.Sınırlarda yansımaların olmaması için ise $|R| = 0$ olması gerekmektedir.Bu yaklaşım Reynolds (1978) tarafından uygulanmış ve buna **''Transparent sınır şartı ''**adını vermiştir.Bu şarta göre ;

$$\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{p}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0 \qquad (2.43)$$
$$x=M,1\le z\le N,0\langle t\langle K$$

$$\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{p}{v}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0 \qquad (2.44)$$
$$x=1,1\le z\le N,0\langle t\le K$$

$$\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{p}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)u=0 \qquad (2.45)$$
$$z=N,1\le x\le M,0\langle t\langle K$$

$$u=0, z=1,1\le x\le M,0\langle t\langle K \qquad (2.46)$$

olmalıdır.Burada $p = v\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ dir.Buna göre sınırlarda sonlu farklar yaklaşımı ile çözüm ;

$$u_{1,n,k+1}=u_{1,n,k}+u_{2,n,k}-u_{2,n,k-1}+p_{1,n}\left(u_{2,n,k}-u_{1,n,k}-\left(u_{3,n,k-1}-u_{2,n,k-1}\right)\right) \qquad (2.47)$$
$$2\le n\le N-1,2\le k\le K-1$$

$$u_{M,n,k+1}=u_{M,n,k}+u_{M-1,n,k}-u_{M-1,n,k-1}-p_{M,n}\left(u_{M,n,k}-u_{M-1,n,k}-\left(u_{M-1,n,k-1}-u_{M-2,n,k-1}\right)\right) \qquad (2.48)$$
$$2\le n\le N-1,2\le k\le K-1$$

$$u_{m,N,k+1}=u_{m,N,k}+u_{m,N-1,k}-u_{m,N-1,k-1}-p_{m,N}\left(u_{m,N,k}-u_{m,N-1,k}-\left(u_{m,N-1,k-1}-u_{m,N-2,k-1}\right)\right)$$
$$2\le m\le M-1,2\le k\le K-1 \qquad (2.49)$$

$$u_{m,1,k+1}=0 \qquad (2.50)$$
$$2\le m\le M-1,2\le k\le K-1$$

$$u_{1,1k+1}=u_{1,1,k}+p_{1,1}\left(u_{2,2,k}-u_{1,1,k}\right) \qquad (2.51)$$

$$u_{M,1,k+1}=u_{M,1,k}+p_{M,1}\left(u_{M-1,2,k}-u_{M,1,k}\right)$$

(2. 52)

$$u_{1,N,k+1} = u_{1,N,k} + p_{1,N}\left(u_{2,N-1,k} + u_{1,N,k}\right) \qquad (2.53)$$

$$u_{M,N,k+1} = u_{M,N,k} + p_{M,N}\left(u_{M-1,N-1,k} - u_{M,N,k}\right) \qquad (2.54)$$

ifadeleri verilmektedir (Reynolds 1978). Burada $p_{m,n} = v_{m,n}\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ şartını sağlamalıdır. $\Delta x \neq \Delta z$ olduğu durumda ,ilgili m,n noktalarındaki grid aralıkları dikkate alınmalıdır.

2. 5. KAYNAK ve KAYNAK ALAN

Burada $t = 0$ zamanında dalga cephesi arayüzey ile eşleşen, düşey yayılan bir düzlem dalga kullanılmaktadır.Buna göre **FDM** ile hesaplamaya başlamak için gerekli olan kaynak alan;

$$u^{(0)}_{m,n,k} = R\phi\left(t - t_r\right) \qquad (2.55)$$

şeklinde tanımlanır.Burada ϕ kaynak fonksiyonu , t_r , kaynak dalgacığının , verildiği noktadan kaynak alanın hesaplanacağı noktaya varış zamanıdır.Bu zaman uygun ışın yolu boyunca hesaplanabilmektedir. **R** ise yansıma katsayısıdır.Kaynak olarak **RİCKER** dalgacığı kullanılmıştır.

$$\phi(t) = e^{-\alpha t}\cos(2\pi f t) \qquad (2.56)$$

ile tanımlanmaktadır.Burada α sabit bir sayıdır. f ise kaynağın orta frekansıdır.Kaynağın en yüksek frekansı sonuçta ayrımlılığı belirleyeceği için yer kesitine uygun bir frekans bandı seçilmesi gerektiği daha önceden belirtilmişti.