Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi (SEY); kısmi diferansiyel denklem veya enerji teoremiyle tanımlanan fiziksel bir problemi çözmek için kullanılan sayısal bir yöntemdir ve ilk olarak Zienkiewich ve Cheung (1965) tarafından kullanılmıştır.

SEY aşağıda sıralanan altı aşamada uygulanır.

1. Verilen diferansiyel denklem, integral denklemine dönüştürülür. Burada integral denklemi tanımlanan alan için yazılır. İntegral denklemine dönüştürme işlemi, ağırlıklı rezidüel yöntem veya varyasyonel yöntem kullanılarak yapılır.

2. Verilen çözüm bölgesi sonlu sayıda küçük elemana bölünür. Burada alan, doğrusal üçgen elemanlara bölünmüştür. Bu elemanlar birbirlerine düğüm noktalarından (node) bağlıdır. Daha sonra sonlu elemanlar ağındaki elemanlar ve düğüm noktaları ayrı ayrı numaralandırılır.

3. Bilinmeyen ϕ (gerilim) değerleri, her eleman içinde polinom denklemi ile tanımlanır. Burada doğrusal polinom yaklaşımı kullanılmıştır. Tanımlanan polinom denklemi kullanılarak elemanın düğüm noktalarındaki gerilim (ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k), değerleri tanımlanır. Daha sonra elemanın ϕ değeri düğüm noktalarında tanımlanan ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k değerleri cinsinden yazılır.

4. Üçüncü adımda, düğüm noktalarındaki gerilim değerleri cinsinden yazılan elemanların gerilim değerleri, birinci adımda elde edilen integral denklemine yerleştirilerek her eleman için doğrusal denklem takımları geliştirilir. Geliştirilen bu doğrusal denklem takımları birleştirilerek, her elemana ait dizey denklemleri oluşturulur.

5. Dördüncü adımda oluşturulan eleman dizey denklemleri birleştirilerek sonlu elemanlar ağı için genel dizey denklemi (global matrix equation) elde edilir. Genel dizey denklemini oluştururken Neumann ve Dirichlet sınır koşulları uygulanır.

6. Genel dizey denklemi çözülerek düğüm noktalarında tanımlanan gerilimler hesaplanır.

2.4.1. İntegral Denkleminin Elde Edilmesi

Akımın süreklilik denklemi (Denklem (2.2.6)) ve elektrik alanın konservatif olması (Denklem (2.10)) özellikleri kullanılarak yazılan (2.2.14) denklemi, $(x_s, 0, 0)$ noktasındaki nokta akım kaynağı için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\nabla \cdot [\sigma(x,z) \nabla \phi(x,y,z)] = -I\delta(x - x_s)\delta(y)\delta(z) \tag{2.4.1}$$

Bu denklemde I ; x,y ve z nin fonksiyonudur. Hesaplama kolaylığı açısında, y=0 etrafındaki simetriden dolayı Fourier cosinüs dönüşümü ((2.15) denklemi ile) uygulanırsa,

$$\nabla \cdot [\sigma(x,z) \nabla \phi(x,k_y,z)] - k_y^2 \, \sigma(x,z)\, \phi(x,k_y,z) = -I\delta(x - x_s)\delta(z) \tag{2.4.2}$$

elde edilir. Burada, k_y ; dönüşüm katsayısını ve $\tilde{\phi}$ ise (x, k_y, z) uzayındaki elektrik gerilimi ifade eder. Denklem (2.4.2) açık biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir (Rijo 1977).

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma(x,z)\frac{\partial \phi(x,k_y,z)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\sigma(x,z)\frac{\partial \phi(x,k_y,z)}{\partial z}\right]$$

$$- k_y^2 \, \sigma(x,z)\, \phi(x,k_y,z) = -I\delta(x - x_s)\delta(z) \tag{2.4.3}$$

Denklem (2.4.3) kullanılarak (x, k_y, z) uzayında farklı k_y değerleri için yalnızca x ve z değişkenlerine bağlı olan $\tilde{\phi}(x, k_y, z)$ hesaplanabilir. Elde edilen $\tilde{\phi}(x, k_y, z)$ değerleri kullanılarak (2.2.16) denklemi ile 3-B $\phi(x, y, z)$ uzayına dönülür. Denklem (2.4.3) de $k_y^2 \tilde{\phi}(x, k_y, z)$ terimi ile 2-B modele y- yönündeki katkı da eklenmiştir. Buna göre bu bağıntıyla yapılan modellemeye 2.5-B modelleme denilebilir.

SEY de diferansiyel denklemin integral denklemine dönüştürülmesi işlemi, varyasyonel yöntemler (variational methods) veya ağırlıklı rezidüel (method of weighted residual) yöntemlerden birisi kullanılarak yapılır. Laplacian operatörü eliptik , self-adjoint ve pozitif tanımlı olduğundan, her iki yöntemde aynı sonlu elemanlar algoritmasını oluşturur (Pelton, Rijo and Swift, 1978). Burada varyasyonel yöntem kullanılacaktır.

Varyasyonel yöntemde diferansiyel denklemin integral denklemine dönüştürülmesinde "fonksiyonel" kavramı kullanılır. Fonksiyonel şu şekilde tanımlanabilir; eğer y değişkeni x in fonksiyonu ise (y= f(x)), x in tanımlandığı bir bölgede, x in bütün değerleri için y hesaplanabilir.

z değişkeni ise y' ye bağlı (z=y(f(x))) elde ediliyorsa, z ye y nin fonksiyoneli denir. Fonksiyonel, bir değişkenin ayrık değerlerine karşı elde edilen fonksiyona bağlıdır. Bir fonksiyon gibi fonksiyonel de, sürekli ve doğrusal olarak elde edilebilir (Zhdanov ve Keller, 1995).

Varyasyonel yöntem, fonksiyonelin tanımlanan alan içinde en küçüklenmesi esasına dayanır. DAÖ yönteminde alan enerjisi bir integral denklemi ile tanımlanır ve bu en küçüklenmeye çalışılır. Denklem (2.4.3) kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$F(\phi)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma(x,z)\frac{\partial\phi(x,k_y,z)}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\sigma(x,z)\frac{\partial\phi(x,k_y,z)}{\partial z}\right]$$

$$-k_y^2\,\sigma(x,z)\,\phi(x,k_y,z)+I\delta(x-x_s)\delta(z)=0 \qquad (2.4.4)$$

Burada $F(\tilde{\phi})$, bilinmeyen $\tilde{\phi}(x,k_y,z)$ bağlı fonksiyondur.

Denklem (2.4.4) de, akım yoğunluğunun normal bileşenin bütün eleman sınır yüzeylerinde sürekli olması (Dey ve Morrison, 1979) sınır koşulu uygulanırsa, aşağıdaki fonksiyonel bağıntısı Ek-B de verilen birkaç matematiksel adım sonucu bulunur.

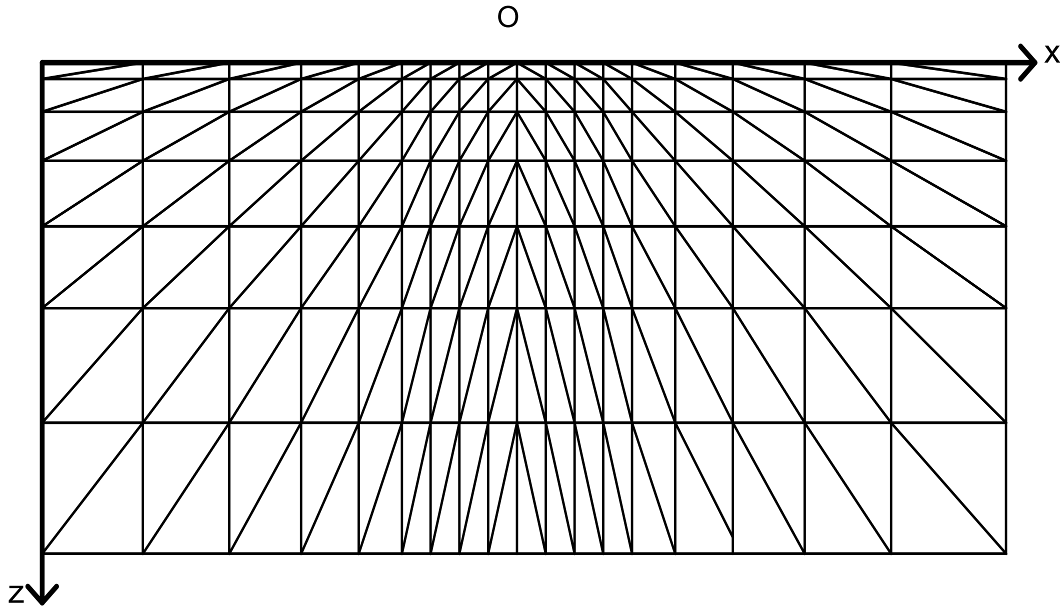
$$\chi=\frac{1}{2}\iint\left\{\sigma\left[\left(\frac{\partial\tilde{\phi}(x,k_y,z)}{\partial x}\right)^2+k_y^2\tilde{\phi}^2(x,k_y,z)+\left(\frac{\partial\tilde{\phi}(x,k_y,z)}{\partial z}\right)^2\right]+2I\delta(x-x_s)\delta(z)\tilde{\phi}(x,k_y,z)\right\}dxdz$$

(2.4.5)

Düğüm noktalarındaki bilinmeyen gerilim değerleri denklem (2.4.5) in çözümü ile hesaplanacaktır. Bu bağıntının çözümü sabit bir k_y değeri için yapılır. Bundan sonraki bağıntılarda kolaylık açısından $\tilde{\phi}(x,k_y,z)$ yerine $\tilde{\phi}(x,z)$ kullanılacaktır.

2.4.2. Alanın Elemanlara Ayrılması

İkinci aşamada, denklem (2.4.5) in tanımlı olduğu alan, eleman adı verilen sonlu sayıda küçük parçalara bölünür. Elemanlar birbirlerine belli sayıda noktalardan bağlıdır ve bilinmeyen değerler her eleman üzerinde belirlenen bu noktaların koordinat değerlerinde hesaplanırlar. Bilinmeyen değerlerin hesaplandığı bu noktalara düğüm noktası (node) denir. Birbirlerine düğüm noktalarından bağlı sonlu sayıda elemanın oluşturduğu alana sonlu elemanlar ağı (finite element mesh) adı verilir. Şekil 2.4.1 de doğrusal üçgen (linear triangle) elemanlara bölünmüş bir sonlu elemanlar ağı görülmektedir.



Şekil 2.4.1. Doğrusal üçgen elemanlara bölünmüş sonlu elemanlar ağının şematik gösterimi (Uchida, 1995).

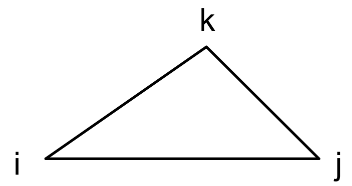
Ağ üzerindeki elemanların boyutları ve sayısı ile düğüm noktası sayısı problemin çözümünde çok önemlidir. Elemanlara ayrılan alanda, düğüm noktaları ve elemanlar ayrı ayrı numaralandırılır (Bkz. Şekil 2.6.4). Dirichlet sınır koşulunu uygulamak için sonlu elemanlar ağının orta noktasından (O) sol, sağ ve aşağı yöne doğru gidildikçe elemanların boyutları artırılır.

2.4.3. Eleman Dizey Denkleminin Elde Edilmesi

SEY 1-B, 2-B ve 3-B tanımlanan diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için kullanılabilir. 1-B çözümde bir eğri düzgün doğru parçalarının bir serisi ile tanımlanır. 2-B çözümde üçgen veya dikdörtgen elemanlar yada her ikisinin birleşimi kullanılabilir. 3-B çözümde ise quadratik üçgen veya dikdörtgen şekilli elemanlar kullanılır. Burada 2-B modellemede kullanılan doğrusal üçgen eleman anlatılacaktır.

Doğrusal üçgen eleman Şekil 2.2.4 de görülmektedir. Bilinmeyen gerilim değerleri elemanın sadece köşe noktalarında tanımlandığından doğrusal üçgen denmektedir. Sonlu elemanlar ağı içinde elemanın şekline bağlı bir fonksiyon, Lagrangien veya Hermitien polinom yaklaşımı kullanılarak tanımlanır. Doğrusal üçgen eleman (Şekil 2.2.4) için bilinmeyen gerilim ($\tilde{\phi}(x,z)$) değerlerini, Lagrangien polinom yaklaşımından aşağıdaki gibi yazılabilir.

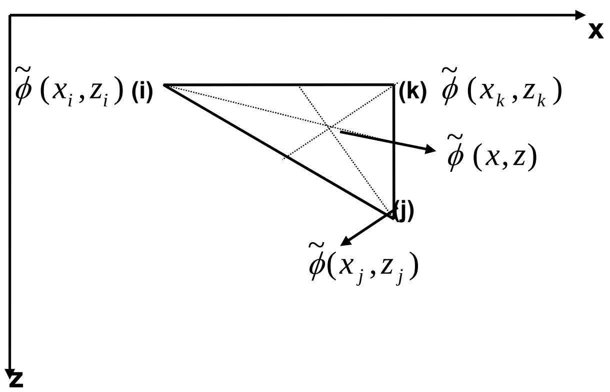
$$\tilde{\phi}\,(x,z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 z = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{x} & \mathrm{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \qquad (2.4.6)$$



Şekil 2.4.2. Doğrusal üçgen eleman.

Doğrusal üçgen elemanda bilinmeyenler elemanın köşe noktalarında tanımlanır. Buna göre i, j ve k noktalarında tanımlı olan $\tilde{\phi}\,(x,z)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir (Şekil 2.4.3).

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i\,(x_i, z_i) &= \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 z_i \\ \tilde{\phi}_i\,(x_j, z_j) &= \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 z_j \\ \tilde{\phi}_i\,(x_k, z_k) &= \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 z_k \end{aligned} \qquad (2.4.7)$$



Şekil 2.4.3. Doğrusal üçgen elemanın düğüm noktalarında $\tilde{\phi}\,(x,z)$ nin tanımlanması.

Bundan sonra kısalık açısından

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i &= \tilde{\phi}(x_i, z_i) \\ \tilde{\phi}_j &= \tilde{\phi}(x_j, z_j) \\ \tilde{\phi}_k &= \tilde{\phi}(x_k, z_k) \\ \tilde{\phi} &= \tilde{\phi}(x,z) \end{aligned}$$

olarak kullanılacaktır.

Bu denklemlerde α_0, α_1 ve α_2 sabit katsayılardır. (2.4.7) denklem sistemi dizey formu şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \tag{2.4.8}$$

Yazılan bu dizey denkleminden α_0, α_1 ve α_2

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k \end{bmatrix} \tag{2.4.9}$$

şeklinde çözülür. Burada, Δ doğrusal üçgenin alanıdır ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & z_i \\ 1 & x_j & z_j \\ 1 & x_k & z_k \end{vmatrix} \tag{2.4.10}$$

Elemanın alanını pozitif hesaplayabilmek için düğüm noktaları saatin tersi yönünde numaralandırılır. a,b ve c sabitleri ise global koordinatlarda,

$$\begin{array}{lll} a_i = x_j z_k - x_k z_j & b_i = z_j - z_k & c_i = x_k - x_j \\ a_j = x_k z_i - x_i z_k & b_j = z_k - z_i & c_j = x_i - x_k \\ a_k = x_i z_j - x_j z_i & b_k = z_i - z_j & c_k = x_j - x_i \end{array}$$

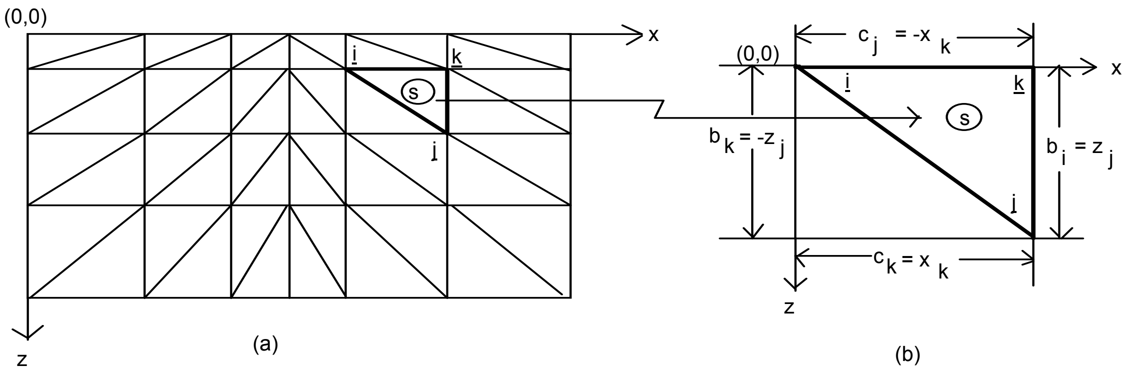
şeklinde çözülür. Burada,

$$b_i + b_j + b_k = c_i + c_j + c_k = 0$$

ve i- düğüm noktası merkez ((x_i, z_i)=(0,0)) olmak üzere

$$a_i = 2\Delta, \quad a_j = a_k = 0$$

olduğu görülmektedir. Genel (global) ve bölgesel (lokal) koordinatlarda yukardaki katsayılar, i- düğüm noktası merkez olmak üzere Şekil 2.4.4 de görülmektedir.



Şekil 2.4.4. Kartezyen koordinatlar sisteminde (x,z); Simgesel bir sonlu elemanlar ağı üzerinde s elemanı (a), bölgesel koordinatlarda s elemanının görünümü (b) (Fenner' den sonra 1975).

Denklem (2.4.9) da (x,z) koordinatlarına bağlı çözülen α_0, α_1 ve α_2 değerleri, denklem (2.4.6) de yerine konursa,

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}1 & x & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k\end{bmatrix} \tag{2.4.11}$$

elde edilir. Bu denkleme göre $\tilde{\phi}\,(x,z)$ fonksiyonu alan içinde tanımlanan doğrusal üçgen elemanın düğüm noktalarında hesaplanmış $\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_j$ ve $\tilde{\phi}_k$ ya bağlı olarak çözülebilir. $\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_j$ ve $\tilde{\phi}_k$ nın yanında çarpan olarak bulunan değerler grubu,

$$\begin{bmatrix}N_i \; N_j \;\; N_k\end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}1 & x & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \tag{2.4.12}$$

şeklinde yazılabilir. Burada N_i, N_j ve N_k değişkenleri şekil fonksiyonu, aradeğer fonksiyonu veya temel fonksiyon (shape functions,interpolation functions, or basis functions) olarak bilinir. Şekil fonksiyonlarının x ve z e bağlı türevleri sıfırdır. Her şekil fonksiyonunun ait olduğu düğüm noktasındaki değeri bire eşit veya birden küçüktür. Diğer düğüm noktalarındaki değeri ise sıfırdır. Bir elemana ait şekil fonksiyonlarının toplamı birdir. Her şekil fonksiyonu kendi düğüm noktası ile kendisine komşu düğüm noktalarının kenarları boyunca lineer olarak değişir. Şekil fonksiyonu denklem (2.4.12) da görüldüğü gibi sadece elemanın koordinatlarına bağlıdır. Buna göre (2.4.11) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tilde{\phi} = N_i \tilde{\phi}_i + N_j \tilde{\phi}_j + N_k \tilde{\phi}_k \qquad (2.4.13)$$

Burada çözüm bölgesi içinde herhangi bir elemanın gerilimi, elemanın düğüm noktalarında tanımlanan gerilimler ve şekil fonksiyonları cinsinden tanımlanmıştır. $\tilde{\phi}(x,z)$ nin x ve z ye göre kısmi türevi alınırsa,

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} = \alpha_1 = \frac{1}{2\Delta}\left(b_i \tilde{\phi}_i + b_j \tilde{\phi}_j + b_k \tilde{\phi}_k\right) \qquad (2.4.14)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = \alpha_2 = \frac{1}{2\Delta}\left(c_i \tilde{\phi}_i + c_j \tilde{\phi}_j + c_k \tilde{\phi}_k\right) \qquad (2.4.15)$$

elde edilir. (2.4.13), (2.4.14) ve (2.4.15) denklemleri (2.4.5) de yerine konursa,

$$X = \frac{1}{2}\iint_{\Delta} \frac{\sigma}{4\Delta^2}\left\{\left(b_i \tilde{\phi}_i + b_j \tilde{\phi}_j + b_k \tilde{\phi}_k\right)^2 + \left(c_i \tilde{\phi}_i + c_j \tilde{\phi}_j + c_k \tilde{\phi}_k\right)^2\right\} dxdz$$

$$+\frac{1}{2}\iint_{\Delta} \sigma k^2 \left(N_i \tilde{\phi}_i + N_j \tilde{\phi}_j + N_k \tilde{\phi}_k\right)^2 dxdz + \iint_{\Delta} I_\Delta \delta(x - x_s)\delta(z)\left(N_i \tilde{\phi}_i + N_j \tilde{\phi}_j + N_k \tilde{\phi}_k\right) dxdz \qquad (2.4.16)$$

bulunur.Yukardaki integral denklemi doğrusal üçgenin alanı için yazılmıştır. Ek-C de verilen şekil fonksiyonunun özellikleri denklem (2.4.16) ya uygulanırsa,

$$X = \frac{\sigma}{8\Delta}\left\{\left(b_i \tilde{\phi}_i + b_j \tilde{\phi}_j + b_k \tilde{\phi}_k\right)^2 + \left(c_i \tilde{\phi}_i + c_j \tilde{\phi}_j + c_k \tilde{\phi}_k\right)^2\right\}$$

$$+\frac{1}{12}\sigma k^2 \Delta\left(\tilde{\phi}_i^2 + \tilde{\phi}_j^2 + \tilde{\phi}_k^2 + \tilde{\phi}_i \tilde{\phi}_j + \tilde{\phi}_j \tilde{\phi}_k + \tilde{\phi}_i \tilde{\phi}_k\right) + \frac{I_\Delta}{2\Delta}\left(a_i \tilde{\phi}_i + a_j \tilde{\phi}_j + a_k \tilde{\phi}_k\right) \qquad (2.4.17)$$

elde edilir. Enerjiyi minimize etmek için (2.4.17) bağıntısının, bilinmeyen fonksiyonlara göre kısmi türevi alınarak sıfıra eşitlenir. Buna göre,

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tilde{\phi}_i} = \frac{\sigma}{4\Delta}\left\{b_i\left(b_i \tilde{\phi}_i + b_j \tilde{\phi}_j + b_k \tilde{\phi}_k\right) + c_i\left(c_i \tilde{\phi}_i + c_j \tilde{\phi}_j + c_k \tilde{\phi}_k\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{12}\sigma k^2 \Delta\left(2\tilde{\phi}_i + \tilde{\phi}_j + \tilde{\phi}_k\right) + \frac{I_\Delta}{2\Delta} a_i = 0 \qquad (2.4.18)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tilde{\phi}_j} = \frac{\sigma}{4\Delta}\left\{ b_j\left(b_i\tilde{\phi}_i + b_j\tilde{\phi}_j + b_k\tilde{\phi}_k\right) + c_j\left(c_i\tilde{\phi}_i + c_j\tilde{\phi}_j + c_k\tilde{\phi}_k\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{12}\sigma k^2\Delta\left(\tilde{\phi}_i + 2\tilde{\phi}_j + \tilde{\phi}_k\right) + \frac{I_\Delta}{2\Delta}a_j = 0 \qquad (2.4.19)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tilde{\phi}_k} = \frac{\sigma}{4\Delta}\left\{ b_k\left(b_i\tilde{\phi}_i + b_j\tilde{\phi}_j + b_k\tilde{\phi}_k\right) + c_k\left(c_i\tilde{\phi}_i + c_j\tilde{\phi}_j + c_k\tilde{\phi}_k\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{12}\sigma k^2\Delta\left(\tilde{\phi}_i + \tilde{\phi}_j + 2\tilde{\phi}_k\right) + \frac{I_\Delta}{2\Delta}a_k = 0 \qquad (2.4.20)$$

elde edilir. Bu denklemler, enerjinin minimizasyonu için türetilen fonksiyonelin extramum değerleridir. Hesaplanması gereken düğüm noktalarındaki $\left(\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_k\right)$ değerleri yukardaki denklemlerin çözümünden elde edilir. Bu denklemler doğrusaldır ve çözümüde doğrusal olarak elde edilir (Coggon,1971).

Denklem (2.4.18), (2.4.19) ve (2.4.20) aşağıdaki gibi dizey denklemi biçimine getirilir.

$$\frac{\sigma}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k \end{bmatrix} + \frac{1}{12}\sigma k^2\Delta\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k \end{bmatrix} + \frac{I_\Delta}{2\Delta}\begin{bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{bmatrix} = 0 \qquad (2.4.21)$$

Bu denklem sonlu elemanlar ağı içinde bir doğrusal üçgen eleman için yazılmıştır. Denklemde ilk toplamaya kadar olan bölümde ilk iki dizey çarpılırsa,

$$\frac{\sigma}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_ib_j + c_ic_j & b_ib_k + c_ic_k \\ b_ib_j + c_ic_j & b_j^2 + c_j^2 & b_jb_k + c_jc_k \\ b_ib_k + c_ic_k & b_jb_k + c_jc_k & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k \end{bmatrix} + \frac{1}{12}\sigma k^2\Delta\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\phi}_i \\ \tilde{\phi}_j \\ \tilde{\phi}_k \end{bmatrix} + \frac{I_\Delta}{2\Delta}\begin{bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{bmatrix} = 0 \qquad (2.4.22)$$

olur. A ve B satır ve sütun sayıları birbirine eşit ve C ninde satır sayısı A ve B nin sütun sayısına eşit üç dizey için

(A+B)C=AC+BC

özelliği yazılabilir. Bu özellik denklem (2.4.22) ye uygulanırsa, simgesel bir i- elemanı için aşağıdaki dizey denklemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} k_{11}^{i} & k_{12}^{i} & k_{13}^{i} \\ k_{21}^{i} & k_{22}^{i} & k_{23}^{i} \\ k_{31}^{i} & k_{32}^{i} & k_{33}^{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1^{i} \\ \tilde{\phi}_2^{i} \\ \tilde{\phi}_3^{i} \end{bmatrix} = I_{\Delta} \begin{bmatrix} a_1^{i} \\ a_2^{i} \\ a_3^{i} \end{bmatrix} \qquad (2.4.23)$$

Bu denklem kısaca,

$$k^{i} . u^{i} = s^{i} \qquad (2.4.24)$$

şeklinde yazılabilir. Yukardaki denklemde i-elemanı için k^{i}, (3×3) boyutlu düğüm noktalarının koordinatlarına, k_y dönüşüm katsayısına ve elemanın öziletkenliğine bağlı katsayı dizeyi (stiffness matrix), u^{i} düğüm noktalarındaki gerilimlere bağlı (3×1) boyutunda sütun vektör, s^{i} elemana uygulanan nokta akıma bağlı (3×1) boyutunda sütun vektördür.