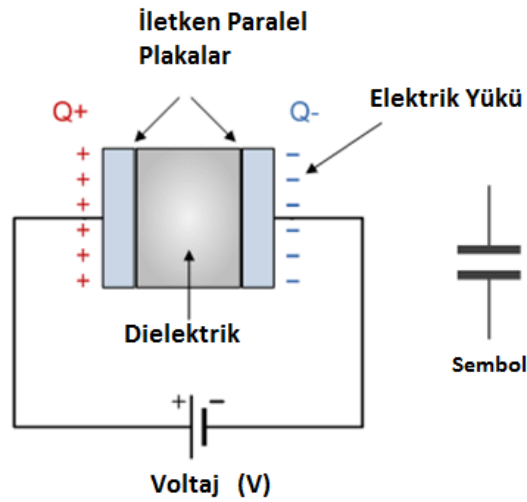


9. ve 10. Hafta: Sığa ve Dielektrikler

Kapasitörler, plakaları üzerinde potansiyel bir fark üreten elektrik yükü şeklinde enerji depolama yeteneğine veya “kapasitesine” sahip aygıtlardır. Kondansatörler şekil ve boyut olarak çok fazla farklılık göstermesine rağmen temel konfigürasyonu eşit ancak karşıt yük taşıyan iki iletkenidir. Bu iki iletken birbirine bağlanmamış veya temas etmeyen iyi bir yalıtkan malzeme ile elektriksel olarak ayrılmış paralel iletken plakalardan oluşur. Bu kapasitör plakaları arasındaki mika, kağıt, vb. yalıtım katmanına ise dielektrik denir.

Bir kondansatörün en basit örneği, Şekil 5.1 de gösterildiği birbirine paralel olan, d mesafesiyle ayrılmış ve A alanına sahip iki iletken plakadır.



Şekil 5.1 Paralel Plakalı Kondansatör

Kondansatörün yüklenmesi;

Başlangıçta yüklenmemiş durumda, kondansatördeki iletkenlerden herbirinin üzerindeki yük sıfırdır. Kondansatörün yükleme işlemi sırasında, elektronlar bir iletkeniden diğerine taşınır, bir iletkeneye + Q yükü ile yüklenirken, diğeri -Q yükü ile yüklenmiş olur. Pozitif yüklü iletken, negatif yüklü iletkeniden daha yüksek bir potansiyelde bir potansiyel fark yaratır. Yüklü veya yüksüz olsun, kondansatörün bir bütün olarak net yükünün sıfır olduğunu unutmayalım.

Yapılan çalışmalar, kapasitörler elektronların enerjisini plakalar üzerindeki bir elektrik yükü şeklinde depoladıkları için plakalar ne kadar büyük olursa ve bu plakaların arasındaki mesafe ne kadar küçük olursa, kapasitörün plakaları boyunca verilen herhangi bir voltaj için tuttuğu yük o kadar büyük olacağını söyler.

Kısacası, daha büyük plakalar, daha küçük mesafe, daha fazla kapasitans değeri verir.

Böylece bir kapasitörde depolanan yük (Q) miktarının, plakalar arasındaki elektrik potansiyeli farkıyla doğrusal orantılı olduğunu söyleriz ve plakalar üzerindeki yük miktarını

$$Q = C \Delta V \quad (1)$$

şeklinde veririz. Burada C sığa veya kapasitans olarak adlandırılır. Kapasitans, C değerinin daima pozitif olduğu değerleri alır, negatif birimleri yoktur. Fiziksel olarak kapasitans, ifadeden de görüleceği üzere belirli bir potansiyel fark (ΔV) için elektrik yükünü saklama kapasitesinin bir ölçüsüdür. Kapasitans (sığa) (n)'ın SI birimindeki adı farad (F) dır.

$$1F = 1 \text{ farad} = 1 \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = 1 \frac{C}{V}$$

Farad kendi başına kullanılacak çok büyük bir ölçüm birimidir, bu nedenle, genellikle Farad'ın alt katları, örneğin mili-faradlar, mikro-faradlar, nano-faradlar ve piko-faradlar kullanılır.

$$\begin{aligned} 1 \text{ Milifarad}(mF) &= 10^{-3} \text{ Farad } (F) \\ 1 \text{ Mikrofarad}(\mu F) &= 10^{-6} \text{ Farad } (F) \\ 1 \text{ Nanofarad}(nF) &= 10^{-9} \text{ Farad } (F) \\ 1 \text{ Pikofarad}(pF) &= 10^{-12} \text{ Farad } (F) \end{aligned}$$

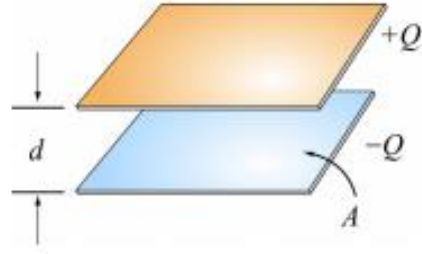


Yandaki şekil devrelerde kapasitörleri temsil etmek için kullanılan sembolü göstermektedir.

Kapasitans'ın Hesaplanması

1. Paralel Plakalı Kondansatör

Aşağıdaki şekil de gösterildiği gibi d mesafesiyle birbirinden ayrılan ve A ile gösterdiğimiz eşit alana sahip iki metal plaka düşünün. Üst plaka $+Q$ yükü, alt plaka $-Q$ yükü taşır. Plakaların yüklenmesi, potansiyel bir fark üreten bir batarya ile gerçekleştirildiğini düşünelim ve sistemin kapasitansını (sığasını) bulalım.



Şekil 5.2 Paralel Plakalı Kondansatör

Çözüm:

C kapasitansını bulmak için önce plakalar arasındaki elektrik alanını bilmemiz gerekir. Sistem düzlemsel simetriye sahiptir. Gauss yasasını kullanarak her yerde elektrik alanını hesaplayabiliriz:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{i\zeta}}{\epsilon_0} .$$

Plakalar arasındaki elektrik alan

$$EA = \frac{q_{i\zeta}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

şeklinde ifade edilir. Plakalar arasındaki potansiyel fark ise,

$$\Delta V = V_- - V_+ = - \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Ed$$

olarak yazılır.

Elektrik alan çizgileri her zaman yüksek potansiyelden daha düşük potansiyele, $V_- < V_+$ 'ye yönelir. Ayrıca, C sığasını hesaplanırken, ilgili potansiyelin büyüklüğü alınır

$$|\Delta V| = Ed.$$

Buradan sığanın tanımıyla birlikte

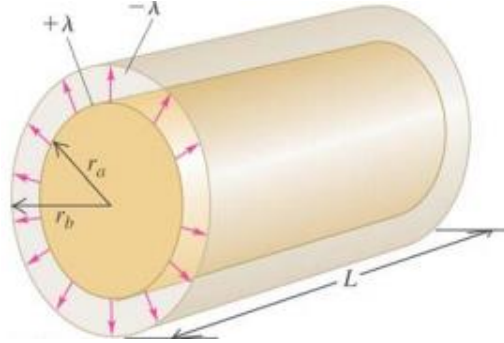
$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

olduğu görülmüştür. Sığanın sadece A ve d geometrik faktörlerine bağlı olduğuna dikkat edilmelidir. Kapasitör (C), A alanıyla doğrusal olarak artar çünkü verilen potansiyel fark ΔV için daha büyük plaka daha fazla şarj tutabileceği anlamına gelir. Öte yandan kapasitör d ile ters orantılıdır çünkü d ayırma mesafesi değeri ne kadar küçükse, sabit bir Q yükü için potansiyel farkı o kadar küçüktür.

2. Silindiriksel Kondansatör

Eş eksenli iç yarıçapı a , dış yarıçapı b olan iki katı iletken silindirik kabuk düşünelim. Her iki silindirin uzunluğu da L dir. Bu iki silindir birbirinden $b - a$ kadar mesafe ile ayrılmıştır. İç silindir $+Q$ yüküne sahip iken dış silindir $-Q$ yüküne sahiptir. **Bu durumda kapasitans (C) değeri nedir?**

C kapasitansını bulmak için önce plakalar arasındaki elektrik alanı bilmemiz gerekir. Gauss yasasını kullanarak her yerde elektrik alanı hesaplayabiliriz. Sistemimiz eş eksenli silindirik simetriye sahiptir. Diğer önemli bir nokta ise elektrik alan sadece $a < r < b$ bölgesinde sıfır değildir. Çünkü bahsedilen silindirler iletkenlerdir. $r < a$ için, iletkenin içinde elektrik alanın sıfır olduğu önceki bölümde tartışılmıştı. Yine, $r > b$ için $q_{iç} = Q - Q = \lambda L - \lambda L = 0$ olur çünkü zıt yüklü iki iletken bahsediliyor.



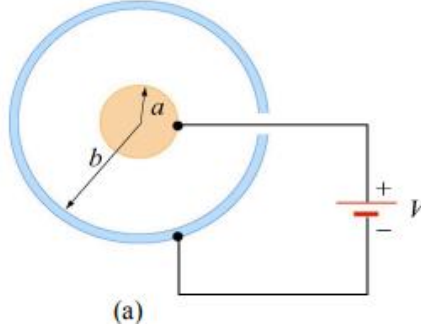
Şekil 5.3 Silindiriksel Kapasitör

$$\begin{aligned} \iint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{q_{iç}}{\epsilon_0} \\ EA &= E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \\ \Delta V &= V_b - V_a = - \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) \\ C &= \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\lambda L}{\lambda \ln(r_b/r_a)/2\pi\epsilon_0} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_b/r_a)} \end{aligned} \quad (2)$$

r_a ile r_b arasındaki bölgeden bir Gauss yüzeyi alarak, Gauss yasası uygulandı. 2 ifadesinden de görülebileceği gibi, C sığası sadece L , r_a ile r_b geometrik faktörlerine bağlıdır.

3. Küresel Kondansatör

Şekilde gösterildiği gibi a ve b yarıçaplı iki eş merkezli küresel kabuktan oluşan küresel bir kapasitör düşünelim. İç kabuğun yüzeyi üzerinde eşit olarak dağılmış bir yükü $+Q$ ve dış kabuk ise eşit fakat zıt olarak yüklenmiştir. Bu küresel kapasitörün sığasını hesaplayalım.



Şekil 5.4 a ve b eş merkezli iki küresel kabuktan oluşan küresel kapasitör

Gauss yasasını uygulayalım:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{i\zeta}}{\epsilon_0}$$
$$EA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Buradan iki küresel kabuk arasındaki potansiyel fark kolayca bulunabilir,

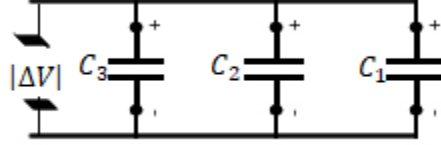
$$\Delta V = V_b - V_a = - \int_a^b E_r dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{b-a}{ab} \right).$$

Böylece, sığa değerinin sadece eş merkezli küresel kabukların yarıçaplarına bağlı olduğu görülür:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right).$$

Elektrik devresinde bir kondansatör düşünelim: kondansatör, ΔV potansiyel farkıyla tutulan bir akünün uçlarına bağlanarak şarj edilebilir.

Paralel Bağlı Kondansatör: Şekil 5.5 de görüldüğü gibi Q_1 yüklü C_1 kondansatörü, Q_2 yüklü C_2 kondansatörü ve Q_3 yüklü C_3 kondansatörü olmak üzere üç tane seri bağlı kondansatör düşünelim.



Şekil 5.5 Paralel Bağlı Kondansatör

Herbir kapasitörde $|\Delta V|$ potansiyel farkı aynıdır ve karşılık gelen sığa değerleri,

$$C_1 = \frac{Q_1}{|\Delta V|}, \quad C_2 = \frac{Q_2}{|\Delta V|}, \quad C_3 = \frac{Q_3}{|\Delta V|}$$

şeklinde yazılır. Bu sığalar toplam Q yükünü

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1|\Delta V| + C_2|\Delta V| + C_3|\Delta V| = (C_1 + C_2 + C_3)|\Delta V|$$

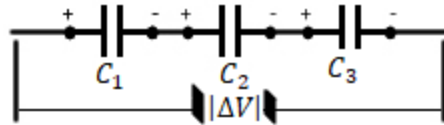
olarak paylaşır ve karşılık gelen eşdeğer sığa değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$C_{eş} = \frac{Q}{|\Delta V|} = C_1 + C_2 + C_3$$

N tane paralel bağlı kondansatör için en genel eşdeğer sığa ifadesi ise aşağıdaki gibi verilir.

$$C_{eş} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N = \sum_{i=1}^N C_i$$

Seri Bağlı Kondansatör: Seri bağlı kondansatördeki potansiyel farkı her bir kondansatörün potansiyel farkının toplamına eşittir. Şekil 5.6 da görülen bu üç kapasitör tek bir eş kapasitör ile yerdeğiştirebilir.



Şekil 5.6 Seri Bağlı Kondansatör

Karşılık gelen eşdeğer sığa değeri ise aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\frac{1}{C_{eş}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

N tane seri bağlı kondansatör için en genel eşdeğer sığa ifadesi ise aşağıdaki gibi verilir.

$$\frac{1}{C_{eş}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

Bir Kapasitörde Depolanan Enerji

Şekil 5.2 de görüldüğü gibi üst plakanın $+q$ yükü, alt plakanın $-q$ yükü ile yüklendiğini düşünelim. İki plaka arasındaki potansiyel fark $|\Delta V| = q/C$ 'dir. Üst plakaya bir $+dq$ yükü taşımak için elektrik alana karşı yapılan iş $dW = \Delta V dq$. Eğer yükleme işlemi sona erer ve $+q$ yükü üst plakada toplanan yük olursa yapılan iş;

$$W = \int_0^q dq |\Delta V| = \int_0^q dq \frac{q}{C} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

Bu sistemin elektriksel potansiyel enerjisi U_E olmak üzere

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q |\Delta V| = \frac{1}{2} C |\Delta V|^2$$

şeklinde ifade edilir.

Kapasitörde depolanan enerjinin elektrik alanın kendisinde depolanmış olduğu düşünülebilir. Yine bu durumu Şekil 5.2 de görülen paralel plakalı kondansatör örneği üzerinden açıklayalım.

Sistemin sığasının $C = \epsilon_0 A/d$ ve potansiyelinin $|\Delta V| = Ed$ olduğu bilindiğinden

$$U_E = \frac{1}{2} C |\Delta V|^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (Ad)$$

olarak ifade edilir. Burada Ad plakalar arasındaki hacimi ifade ettiğinden elektrik alanın enerji yoğunluğunun

$$u_E = \frac{U_E}{\text{hacim}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

elektrik alanın karesi ile orantılı olduğu görülür.