# FZM 305: Kuantum Mekaniği I

## 3. HAFTA

**Deniz Yılmaz**

# KAYNAKLAR

Bu ders sunumu hazırlanırken aşağıdaki kaynak kullanılmıştır:

**Kuantum Mekaniği ve Atom Fiziği Ders Notları**
**Z. Zekeriya AYDIN**
**Ankara Üniversitesi**

# DALGA PARÇACIK İKİLİ DAVRANIŞI: DALGA PAKETLERİ VE HEİSENBERG KESİNSİZLİK İLKESİ

Atomik evrendeki (~$10^{-8}$ cm boyutlu) nesnelerin hem **dalga** hem de **parçacık** olarak ikili davranış gösterdiklerini deneylerden öğrendik.

Böyle bir kuantum mekaniksel nesneyi nasıl betimleyebiliriz?

**Dalga paketi** kavramı hem biraz parçacık hem de biraz dalga özelliği gösterdiğinden, kuantum mekaniksel bir nesneyi betimlemek için uygundur:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} A(k)\, e^{i(k.x)-w(k)t}\, d^3k$$

# Fourier Serileri ve İntegralleri

Yukarıdaki dalga paketi, matematikte Fourier integrali olarak bilinir. Dolayısıyla dalga paketini anlamamız için öncelikle Fourier serilerini ve Fourier integrallerini incelememiz gerekir.

*f(x)*, *x* değişkeninin *2L* periyodlu bir periyodik fonksiyonu olsun: *f(x)=f(x+2L)*. Bu fonksiyon, *x*' in *(-L, L)* aralığında aşağıdaki harmonik serisine açılabilir:

$$f(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$A_n$ ve $B_n$ açılım katsayıları, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının diklik bağıntıları yardımıyla kolayca bulunur.

Diklik bağıntıları:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx=0$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx=\delta_{nm}$$

Burada $\delta_{nm}$ Kronecker deltası olup, $n\neq m$ ise sıfır, $n=m$ ise 1' dir.

Böylece $A_n$, $B_n$ ve $A_0$ katsayıları

$$A_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$B_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$A_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(x)\,dx$$

integralleri ile kolayca bulunur.

# Dirac Delta Fonksiyonu

Dalga paketindeki *A(k)* açılım katsayıları

$$A(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

ifadesiyle kolayca bulunur. Bu ifadeyi

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{ikx}dk$$

ifadesinde yerine yazdığımızda, tutarlı olarak sağ tarafın *A(k)* vermesi için

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik'x}e^{ikx}dx=\delta(k-k')$$

Bağıntısının var olması gerekir. *δ(k-k')* sembolüne **Dirac-delta fonksiyonu** denir.

**Dirac-delta fonksiyonunun özellikleri:**

$$k \neq k' \quad ise \quad \delta(k - k') = 0$$

$$k = k' \quad ise \quad \delta(k - k') = \infty$$

öyle ki

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(k - k')\, dk = 1 \quad veya \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(k)\, \delta(k - k')\, dk = f(k')$$

olur. Demek ki Dirac delta fonksiyonu sürekli değişkenin bir tek noktası dışında her yerde sıfırdır. Aslında bu bir fonksiyon olmayıp bir dağılımdır; öyle ki altındaki alan 1 olacak şekilde, bir noktada aniden sıfırdan sonsuza çıkıp tekrar sıfıra inen çok keskin bir eğridir.

Dirac-delta fonksiyonu bazı iyi davranışlı fonksiyonların limit halleri olarak da temsil edilebilir:

$$\left( \frac{\sin Lx}{\pi x} \right) ¿ \qquad\qquad \left( \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2} \right) ¿$$

# Dalga Paketinin Özellikleri

**Dalga paketinin dalga sayısındaki ve yerindeki yaygınlığı:**

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx} dk$$

ifadesini çeşitli *A(k)* seçimleri için geliştirebiliriz. En basit bir örnek olarak *A(k)* fonksiyonunu

$$A(k) = \begin{Bmatrix} 1, & -k_0 < k < k_0 \;\; için \\ 0, & |k| > k_0 \;\; için \end{Bmatrix}$$

olarak seçersek,

$$\psi(x) = \int_{-k_0}^{+k_0} A(k) e^{ikx} dk = \frac{2\sin(k_0 x)}{x}$$

sonucunu buluruz. Yukarıdaki ifadelerden *A(k)*' nın yarı genişliği $\Delta k = k_0$, $\psi(x)$ dalga paketinin ise $\Delta x \sim \pi / k_0$ olduğu bulunur. Bu iki genişliğin çarpımı ise sabittir: $\boldsymbol{\Delta k\, \Delta x \sim \pi}$.

## Dalga paketinin zamanla davranışı:

$e^{i(kx-wt)}$ şeklindeki tek dalgaboylu ışık dalgalarından kurulan dalga paketi

$$\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{i(kx-wt)}dk=\int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{i(kx-ct)}dk=\psi(x-ct)$$

şeklinde olacaktır. Oysa ki maddesel parçacıkları dalgalarla anlatırken $w=ck$ bağıntısı artık doğru değildir. $w$ $k$' nın bir fonksiyonudur: $w=w(k)$. $w(k)$' yı $k_0$ civarında Taylor serisine açalım ve ilk üç terimiyle yetinelim:

$$w(k)=w(k_0)+(k-k_0)\left(\frac{dw}{dk}\right)_{k=k_o}+\frac{1}{2}(k-k_0)^2\left(\frac{d^2w}{dk^2}\right)_{k=k_o}+\ldots$$

Burada $w_0=w(k_0)$, $V_g=(dw/dk)_{k=k0}$ ve $\beta=1/2(d^2w/dk^2)_{k=k0}$ kısaltmalarını yaparsak dalga paketimizi

$$\psi(x,t)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+i\beta t}}\,e^{i(k_0x-w_0t)}e^{-(x-V_gt)^2/4(\alpha+i\beta t)}$$

olarak buluruz. Bu ifadenin mutlak değeri

$$|\psi(x,t)|=\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2+\beta^2 t^2}\right)^{1/4} e^{-(x-V_g t)^2 \alpha/4(\alpha^2+\beta^2 t^2)}$$

olarak elde edilir. Bu da bir Gauss eğrisidir; maksimumu $x=V_g t'$ dedir. Demek ki eğrinin tepesi $V_g$ hızıyla ilerlemektedir. Yarı genişliğin ise

$$\Delta x=\sqrt{\frac{2(\alpha^2+\beta^2 t^2)}{\alpha}}$$

olduğu görülmektedir. $t=0$ anında $\Delta x=(2\alpha)^{1/2}$ olan genişlik zamanla artmaktadır. Yani dalga paketi zamanla şişmektedir. Dalga paketini, parçacık maddesinin uzaydaki dağılımı gibi yorumlamaya çalışırsak, paketin zamanla genişlemesi büyük bir problem yaratır. Bu güçlüğü ortadan kaldırmak için dalga paketine başka bir yorum getireceğiz.

Zaman bağlılığını da içeren en genel durumda

$$\Delta k \Delta x=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{2(\alpha^2+\beta^2 t^2)}{\alpha}}\geqslant 1$$

olduğu kolayca görülür.