# FZM 305: Kuantum Mekaniği I

## 6. HAFTA

Deniz Yılmaz

# KAYNAKLAR

Bu ders sunumu hazırlanırken aşağıdaki kaynak kullanılmıştır:


**Kuantum Mekaniği ve Atom Fiziği Ders Notları**
**Z. Zekeriya AYDIN**
**Ankara Üniversitesi**

# OLASILIĞIN KORUNUMU: OLASILIK AKIMI

Parçacık kararlıysa, yani bozunmuyor ya da başka bir şekilde yok olmuyorsa

$$\int_{tüm\ uzay} |\psi(r,t)|\, d^3 r = 1$$

ifadesi her zaman geçerli olmalıdır. Dolayısıyla toplam olasılık korunmalıdır:

$$\frac{d}{dt} \int_{tüm\ uzay} |\psi(r,t)|\, d^3 r = \int_{tüm\ uzay} \frac{\partial}{\partial t} |\psi(r,t)|\, d^3 r = 0$$

Bunu doğrulamak için, sağdaki integralin içini geliştirelim:

$$\frac{\partial P(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) = \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Schrödinger denklemi

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r,t) + V(r)\,\psi(r,t)$$

olduğundan,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[- \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi]$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{1}{-i\hbar}[- \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V \psi^*]$$

ifadelerini kolayca elde edebiliriz.

$\partial\psi/\partial t$ ve $\partial\psi^*/\partial t$ yerine Schrödinger denkleminden eşiti yazılırsa yukarıdaki ifade aşağıdaki şekle indirgenir:

$$\frac{\partial P(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\frac{i\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{.}[\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi-(\boldsymbol{\nabla}\psi^*)\psi]$$

Burada

$$J(\boldsymbol{r},t)=\text{-}i\hbar[\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi-(\boldsymbol{\nabla}\psi^*)\psi]$$

akımını tanımlayarak

$$\frac{\partial P(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{.}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=0$$

süreklilik denklemini elde ederiz.

Süreklilik denklemini tüm uzay üzerinden integre edip, sağ tarafa Gauss (ıraksama) teoremini uygulayalım:

$$\frac{d}{dt}\int_{t\ddot{u}m\ uzay} P(\boldsymbol{r},t)\,d^3\boldsymbol{r} = -\int_{t\ddot{u}m\ uzay} \nabla\,.\,J\,d^3\boldsymbol{r} = \oint_{S_\infty} \boldsymbol{J}\,.\,\boldsymbol{n}\,dS$$

Burada ***n*** yüzeye dik birim vektör olup, $S_\infty$ ise sonsuzdan geçen kapalı yüzeyi göstermektedir. $S_\infty$ üzerinde her yerde $\psi$ ve dolayısıyla ***J*** sıfır olduğundan yüzey integrali sıfırdır:

$$\oint_{S_\infty} \boldsymbol{J}\,.\,\boldsymbol{n}\,dS = 0$$

Böylece toplam olasılığın korunduğu kanıtlanmış olur.

$$\frac{d}{dt}\int_{t\ddot{u}m\ uzay} |\psi(r,t)|\,d^3 r = \int_{t\ddot{u}m\ uzay} \frac{\partial}{\partial t}|\psi(r,t)|\,d^3 r = 0$$

$$\frac{\partial P(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\nabla\,.\,\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=0$$

Bu tür süreklilik denklemiyle elektrikte ve akışkanlar mekaniğinde de karşılaşılır: $\partial\rho/\partial t + \boldsymbol{\nabla}.\,\boldsymbol{J} = 0$. Elektrikte $\rho$ ve $J$ sırasıyla, yük yoğunluğu ve yük akımı yoğunluğudur. Akışkanlarda ise bunlar madde yoğunluğu ve madde akım yoğunluğudur. Burada ise *P*' ye bulunma olasılığı yoğunluğu demiştik; dolayısıyla *J*' ye de **bulunma olasılığı akım yoğunluğu** denir.

*J* nin gerçekten de olasılık akımı olduğunu görmek için, süreklilik denkleminin sonlu bir *V* hacmi üzerinden integralini almamız yeterli olacaktır:

$$\frac{d}{dt}\int_V P(\boldsymbol{r},t)\,d^3\boldsymbol{r} = -\int_V \nabla\,.\,J\,d^3\boldsymbol{r} = \oint_S \boldsymbol{J}\,.\,\boldsymbol{n}\,dS$$

Bu bağıntıya göre, sonlu *V* hacmi içindeki, bulunma olasılığının zamanla değişmesi, bu hacmi kapatan *S* yüzeyinden geçen olasılık akımı akısıyla karşılanır. *V* hacmi içindeki toplam bulunma olasılığı zamanla azalıyorsa (ya da artıyorsa), *S* yüzeyinden dışarıya tam bu kadarlık net olasılık akısı çıkıyor (ya da giriyor) demektir.

**Öyleyse *J* gerçekten de bulunma olasılığı akımıdır.**