FZM 305: Kuantum Mekaniği I

13. HAFTA

Deniz Yılmaz

KAYNAKLAR

Bu ders sunumu hazırlanırken aşağıdaki kaynak kullanılmıştır:

Kuantum Mekaniği ve Atom Fiziği Ders Notları
Z. Zekeriya AYDIN
Ankara Üniversitesi

KUANTUM MEKANİĞİNİN GENEL YAPISI; Hilbert Uzayı

Kareleri integre edilebilen dalga fonksiyonlarının oluşturduğu sonsuz boyutlu çizgisel vektör uzayına **Hilbert uzayı** denir.

Schrödinger denkleminin çözümleri, fiziksel sistemimizin olası durumlarını gösterir. Denklem çizgisel olduğu için, bu çözümlerin bir çizgisel karışımı da gene bir çözümdür ve sistemin yeni bir durumuna karşı gelir. Bu özellik **üstüste gelme ilkesi** olarak adlandırılır.

Schrödinger denkleminin çözümleri olan $\psi(\mathbf{r})$, $\varphi(\mathbf{r})$, … karmal dalga fonksiyonları **çizgisel bir fonksiyon-vektör uzayı** oluştururlar. Çünkü α ve β iki keyfi karmal sayı olmak üzere, $\alpha\, \psi(\mathbf{r})+\beta\, \varphi(\mathbf{r})$ çizgisel karışımı da gene başka bir dalga fonksiyonudur. Hilbert uzayında iki fonksiyonun skaler çarpımı

$$(\psi\, ,\, \varphi\,) = \int \psi^{*}(\mathbf{r})\, \varphi(\mathbf{r})\, d^{3}r = \text{bir skaler}$$

çizgisel karışımı da gene başka bir dalga fonksiyonudur.

Bu tanım uyarınca, bir ψ fonksiyonun kendisiyle skaler çarpımı,

$$\int \psi^* A \psi \, d^3 r = N$$

gibi gerçel bir sayıdır; bu da bize dalga fonksiyonlarının 1'e boylandırma olanağını verir.

Hamilton işlemcisinin E_i enerji özdeğerlerine karşı gelen $U_i(x)$ özfonksiyonlarını bulduktan sonra, keyfi bir $\psi(x)$ fonksiyonunu bu birim boylu dik özfonksiyonların serisine açabiliriz:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i U_i(x)$$

Dolayısıyla, $U_i(x)$ özfonksiyonları, sonsuz boyutlu fonksiyon uzayını geren baz fonksiyonlarıdır.

Üç boyutlu vektör uzayı ile Hilbert uzayının karşılaştırılması:

	Üç boyutlu çizgisel vektör uzayı	Sonsuz boyutlu çizgisel fonksiyon uzayı
Elemanlar	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$	$\psi(x), \Phi(x), \dots, \alpha\psi(x)+\beta\Phi(x)$
Skaler çarpım	$\mathbf{A.B}= AB\cos\theta$	$(\psi(x), \Phi(x))=\int\psi^*(x)\,\Phi(x)dx$
Baz elemanları	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	$U_1(x), U_2(x), \dots$
Açılım	$\mathbf{A}= \sum A_i\,\mathbf{e}_i \qquad i=1, 2, 3$	$\psi(x)=\sum C_i\,U_i(x) \qquad i=1,2, \dots, \infty$
Diklik	$\mathbf{e}_i\,.\,\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$	$(U_i(x), U_j(x)) = \int U^*_i(x)\,U_j(x)\,dx =\delta_{ij}$
Bileşenler	$A_i = \mathbf{A}\,.\,\mathbf{e}_i$	$C_i= \int\psi(x)U^*_i(x)\,dx$
Skaler çarpım	$\mathbf{A.B} =\sum A_i\,B_i \qquad i=1, 2, 3$	$(\psi(x), \Phi(x))=\sum C^*_i\,D_i \qquad i=1,2, \dots, \infty$
	İşlemci, vektörü vektöre dönüştürür	İşlemci, fonksiyonu fonksiyona dönüştürür

Hermitik İşlemciler

Beklenen değerleri gerçel olan işlemcilere **Hermitik işlemciler** denir. Bir A işlemcisinin beklenen değeri $\langle A\rangle=\langle A\rangle^*$ ise, yani her keyfi ψ dalga fonksiyonu için

$$\int \psi^* A\psi \; d^3r = \int (A\psi)^* \psi \; d^3r$$

bağıntısı sağlanıyorsa, A işlemcisi **hermitiktir** denir. Herhangi bir A işlemcisinin hermitik eşleniği $A^\dagger$ ile gösterilir ve

$$\int \psi^* A^\dagger \psi \; d^3r = \int (A\psi)^* \psi \; d^3r$$

olarak tanımlanır. Hermitik eşleniği kendisine eşit olan, yani

$$A^\dagger = A$$

olan bir işlemcinin hermitik olduğu hemen anlaşılır.

Hermitik eşlenik alma ile ilgili bazı bağıntılar şöyledir:

$$(A+B)^{\dagger} = A^{\dagger}+B^{\dagger}$$

$$(A^{\dagger})^{\dagger} = A$$

$$(cA)^{\dagger} = c^{*}A^{\dagger}$$

$$(ABC)^{\dagger} = C^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}$$

PROBLEMLER

1) $(ABC)^{\dagger} = C^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}$ bağıntısını kanıtlayınız.

2) A ve B işlemcileri hermitikse, AB çarpımının da hermitik olması için, A ve B' nin yerdeğiştirmesi gerektiğini gösteriniz.

3) Herhangi bir A işlemcisi için, $A+A^{\dagger}$ ve $i(A-A^{\dagger})$ karışımları ile $AA^{\dagger}$ çarpımının hermitik olduklarını kanıtlayınız.