TEMEL MEKANİK
5

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıoğlu
Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi
Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliği Bölümü

Ders Kitapları:

- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, Elliot R. Eisenberg, 2008, Güven Yayınları, İzmir

  Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Halil Rıdvan Öz, Osman Kopmaz.
- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015, Literatür Yayıncılık, İstanbul,

  Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Osman Kopmaz.

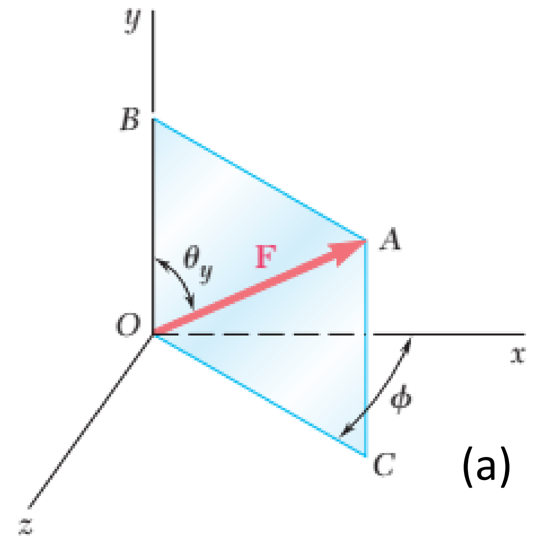
Diğer Kaynaklar:

- Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015. Vector Mechanics for Engineers 11e : Statics : SI Units, McGraw Hill, USA.
- Russell C. Hibbeler, 2016. Engineering Mechanics: Statics in SI Units (14e), Pearson Higher Ed USA.

2.4 Uzayda kuvvetlerin eklenmesi

Uzayda bir kuvvetin dik bileşenleri

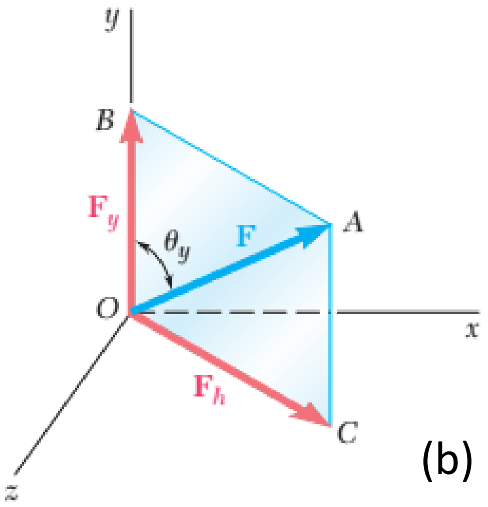
x-y-z koordinat sisteminin O orijinine etkiyen bir **F** kuvveti göz önüne alalım. Şekil (a) da gösterilen F kuvvetini içeren OBAC dik düzlemini çizelim. Bu düzlem dikey y-ekseni boyunca geçer; yönü xy düzlemiyle yaptığı ϕ açısıyla tanımlanır. Düzlem içinde **F** 'nin yönü y-eksenine göre θ_y açısıyla tanımlanır. **F** 'nin dikey bileşeni $\mathbf{F_y}$ ve yatay bileşeni $\mathbf{F_h}$ tekrar çözümlenebilir. (Şekil (b)).



(a)

Skaler bileşenler:

$$F_y = F \cos \theta_y \qquad F_h = F \sin \theta_y$$



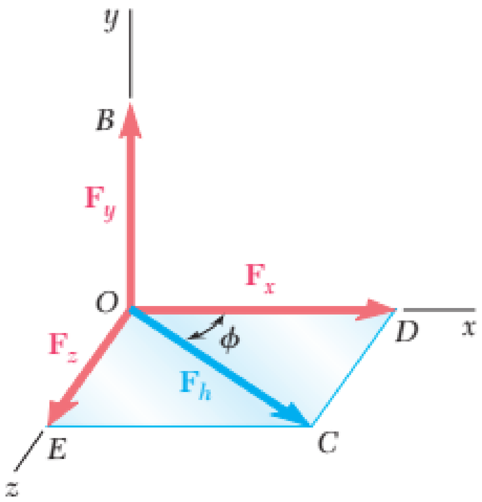
(b)

$\mathbf{F_h}$ 'ye sırasıyla x ve z eksenleri boyunca $\mathbf{F_x}$ ve $\mathbf{F_z}$ iki dik bileşen çözümlenebilir. (Şekil c)

Bu işlem şekil c deki gibi xz düzleminde yapılır.

Skaler bileşenler:

$$F_x = F_h \cos \phi = F \sin \theta_y \cos \phi$$
$$F_z = F_h \sin \phi = F \sin \theta_y \sin \phi$$



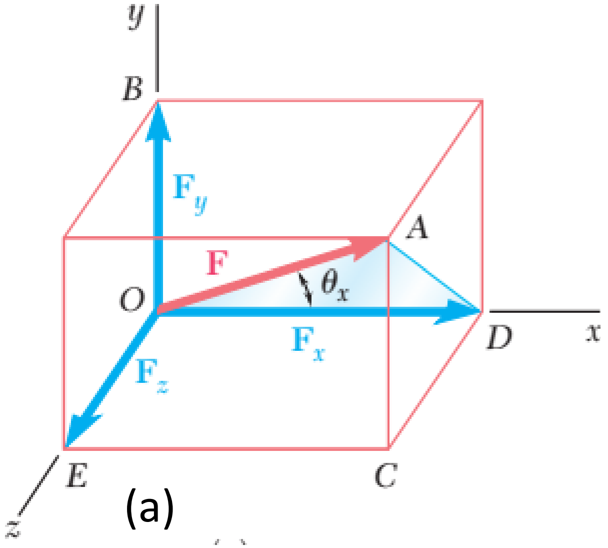
2.4 Uzayda kuvvetlerin eklenmesi

Uzayda bir kuvvetin dik bileşenleri

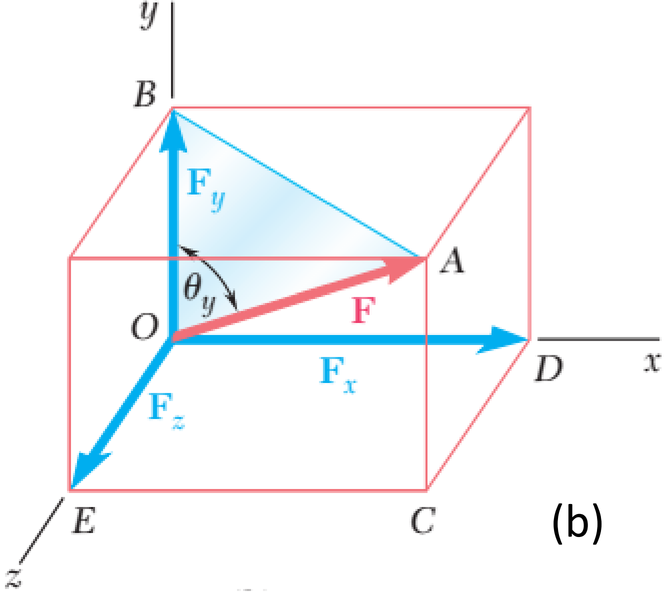
F kuvvetinin üç dik bileşeni $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ ve $\mathbf{F}_z$ çözümlenir.

OAB ve OCD üçgenlerine Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$F^2 = (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2$$
$$F_h^2 = (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2$$



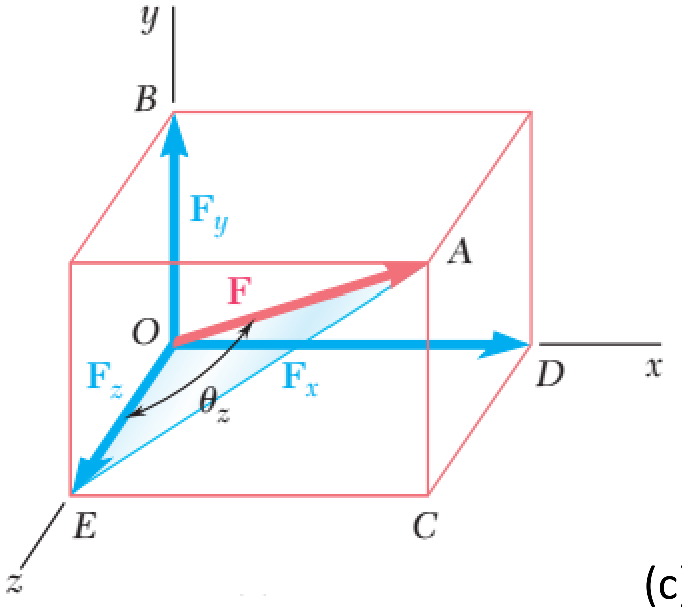
(a)



(b)

bu iki denklemden $\mathbf{F}_h$ elimine edilerek **F**'nin büyüklüğü ve skaler bileşenleri arasındaki ilişkileri elde ederiz.

Uzayda F kuvvetinin büyüklüğü: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$



(c)

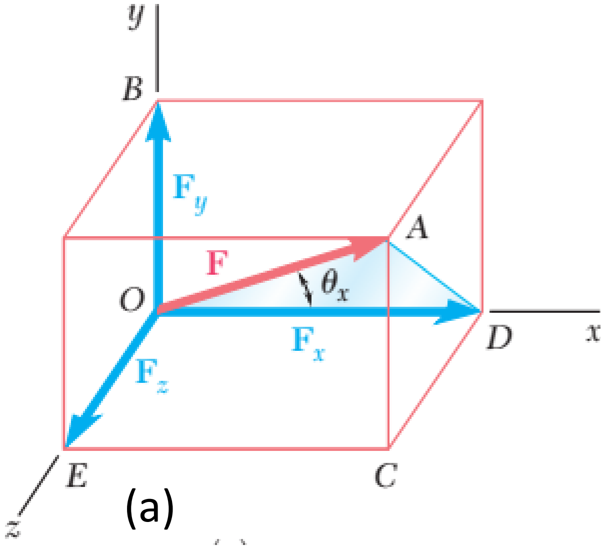
2.4 Uzayda kuvvetlerin eklenmesi

Uzayda bir kuvvetin dik bileşenleri

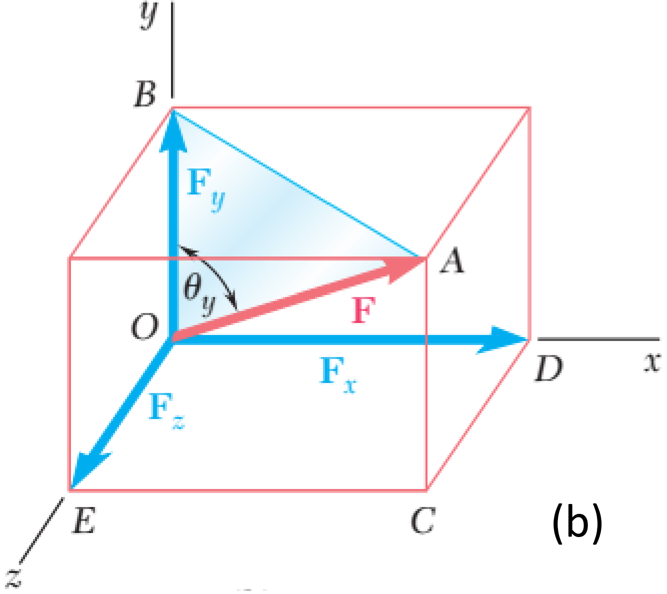
F kuvveti OA köşegeni ile gösterilir.

OAB üçgeni ile θ_y tanımlanır: $F_y = F \cos \theta_y$

OAD ve OAE üçgeninde **F** ile yaptıkları sırasıyla θ_x ve θ_z açıları gösterilebilir.



(a)



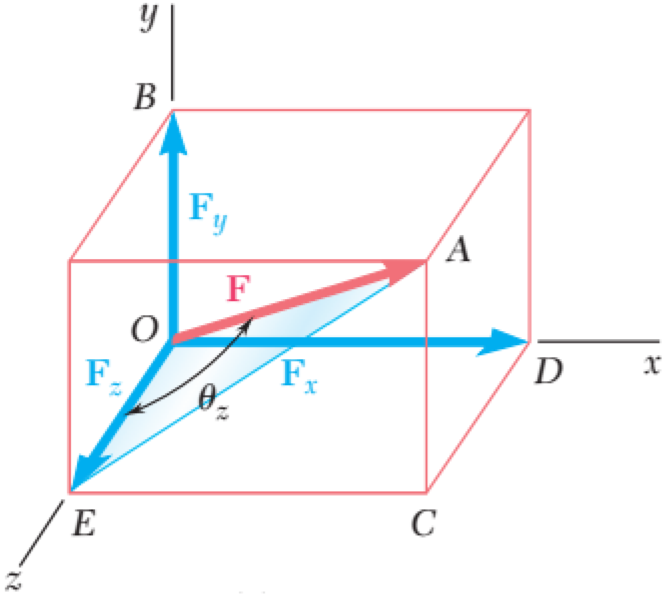
(b)

F nin skaler bileşenleri:

$$F_x = F \cos \theta_x \qquad F_y = F \cos \theta_y \qquad F_z = F \cos \theta_z$$

Bu açılar F kuvvetinin yönünün tanımlanmasında kullanılır.

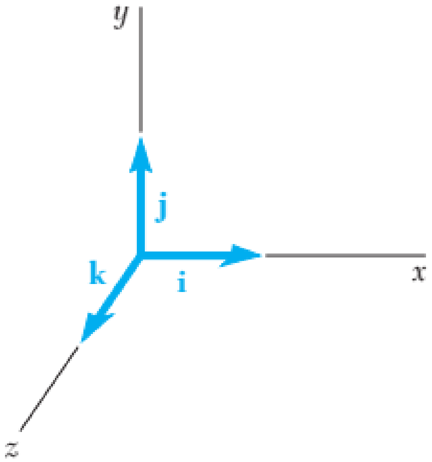
θ_x , θ_y ve θ_z açıları F kuvvetinin yön kosinüsleri olarak adlandırılır.



(c)

F kuvvetinin vektör gösterimi:

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$



x-y-z eksenleri için sırasıyla üç birim vektör **i, j, k** ile tanımlanır.

Kavramsal uygulama 2.4

500 N'luk bir kuvvet x-y- ve z eksenleriyle sırasıyla 60°, 45° ve 120° açılar oluşturmaktadır. Kuvvetin F_x, F_y ve F_z . A noktasındaki ip tarafından uygulanan kuvvetin yatay ve dikey bileşenlerini bulunuz ve birim vektör olarak kuvveti tanımlayınız

Çözüm:

F = 500 N, $\theta_x = 60°$, $\theta_y = 45°$ $\theta_z = 120°$,

$$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z$$

denklemde yerine yazılırsa,

$$F_x = (500\ \text{N})\cos 60° = +250\ \text{N}$$
$$F_y = (500\ \text{N})\cos 45° = +354\ \text{N}$$
$$F_z = (500\ \text{N})\cos 120° = -250\ \text{N}$$

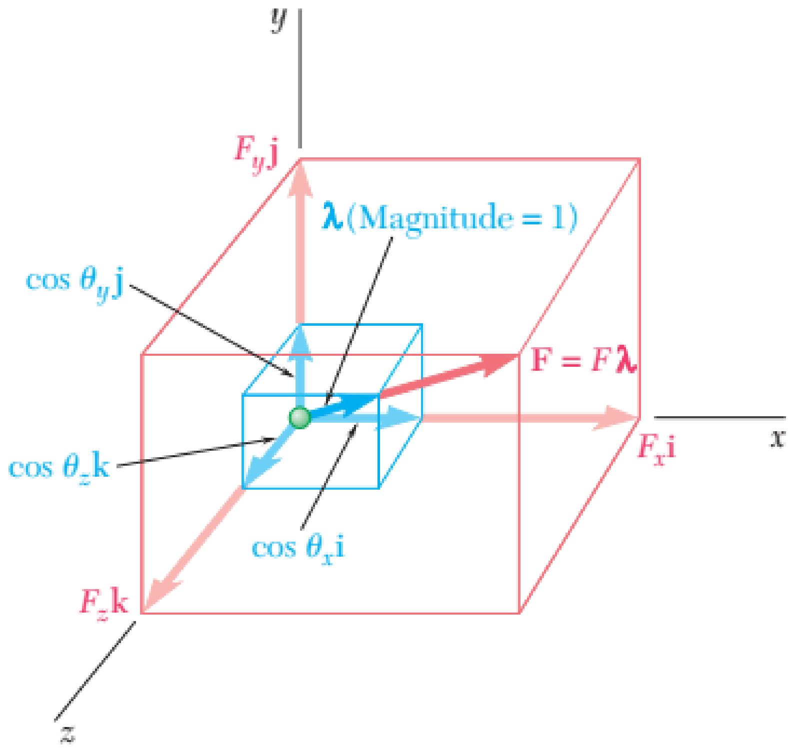
$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = (250\ \text{N})\mathbf{i} + (354\ \text{N})\mathbf{j} - (250\ \text{N})\mathbf{k}$$

- Bir F kuvvetinin bir eksenle oluşturduğu açı pozitif taraftan ölçülmeli ve her zaman 0 ile 180 ° arasında olmalıdır.
- 90 ° 'den daha küçük bir açı, pozitif x ekseniyle yz düzleminin aynı tarafta olduğunu gösterir; cos θ_x ve F_x pozitiftir.
- 90 ° 'den daha büyük bir açı , yz düzleminin diğer tarafındadır; cos θ_x ve F_x negatiftir. Sonuç olarak, F_x ve F_y pozitif, F_z negatiftir.
- F kuvveti F yönündeki birim vektörle tanımlanabilir:

$$\mathbf{F} = F(\cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k})$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}$$



- Bu **λ** vektörünün büyüklüğü «1» e eşittir; yönü **F** ile aynıdır.
- Bu, **F ‘nin etki çizgisi boyunca birim vektör** olarak adlandırılır.

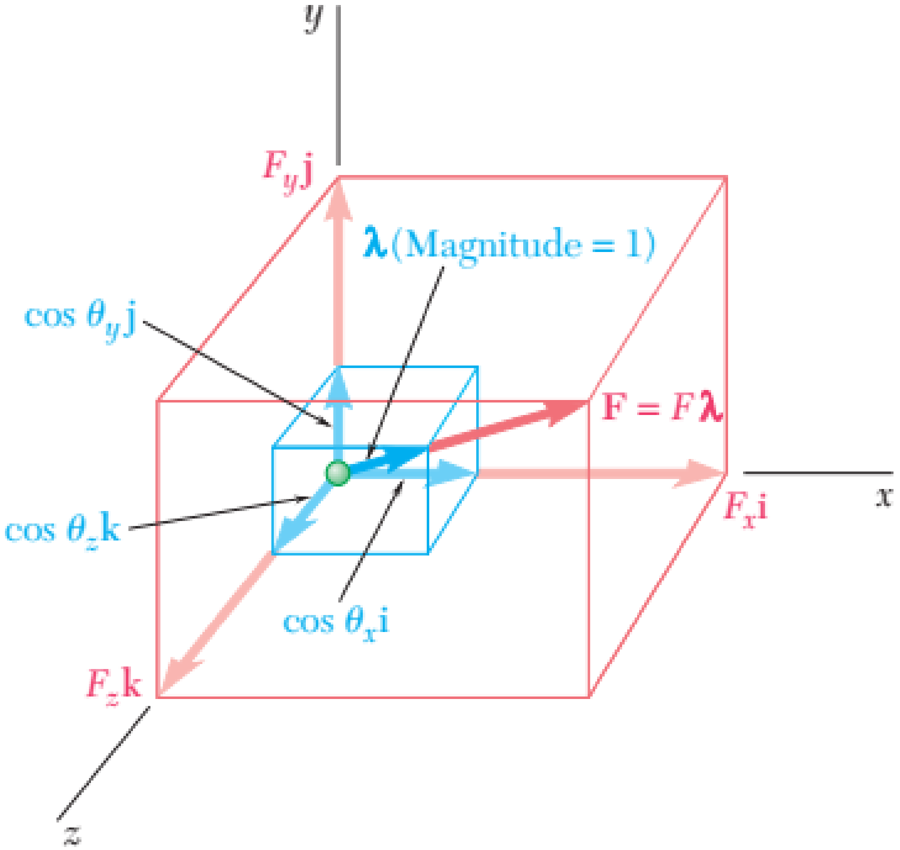
F nin yön kosinüsleri arasındaki ilişkiler:

$$\lambda_x = \cos\theta_x \qquad \lambda_y = \cos\theta_y \qquad \lambda_z = \cos\theta_z$$

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F}$$



Kavramsal uygulama 2.4

Bir F kuvveti F_x=20 N, F_y =-30 N ve F_z 60 N bileşenlere sahiptir. F nin büyüklüğünü θ_x, θ_y ve θ_z koordinat eksenleriyle yaptığı açıları bulunuz.

Çözüm:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$= \sqrt{(20)^2 + (-30)^2 + (60)^2}$$

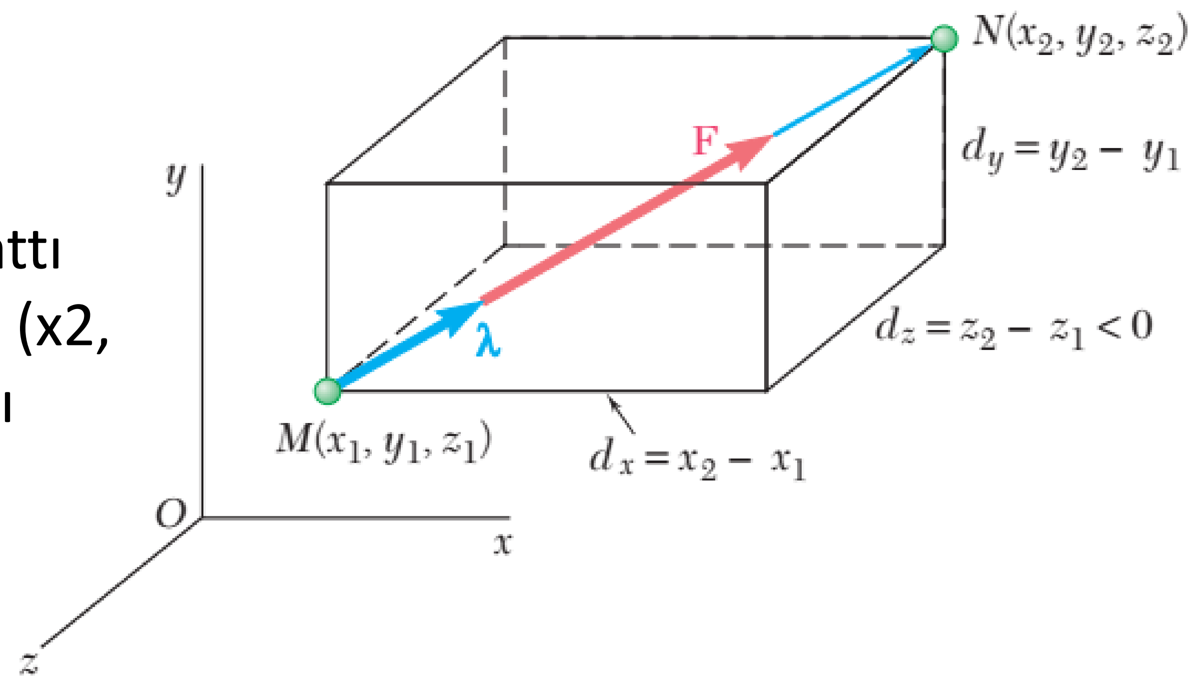
$$= \sqrt{4900} = 70\,\mathrm{N}$$

Yön kosinüsleri:

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{20}{70} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-30}{70} \qquad \cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{60}{70}$$

$$\theta_x = 73.4^\circ \qquad \theta_y = 115.4^\circ \qquad \theta_z = 31.0^\circ$$

İki nokta arasında tanımlanmış kuvvet



Bir çok uygulamada F kuvvetinin yönü etki hattı üzerinde olan iki noktanın M (x1, y1, z1) ve N (x2, y2, z2) koordinatlarıyla tanımlanır. MN arasını bağlayan **F** bir vektörü göz önüne alalım.

$$\overrightarrow{MN} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

F nin skaler bileşenleri:

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \qquad F_y = \frac{Fd_y}{d} \qquad F_z = \frac{Fd_z}{d}$$

$$d_x = x_2 - x_1 \qquad d_y = y_2 - y_1 \qquad d_z = z_2 - z_1$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

F kuvvetinin yön kosinüsleri:

$$\cos\theta_x = \frac{d_x}{d} \qquad \cos\theta_y = \frac{d_y}{d} \qquad \cos\theta_z = \frac{d_z}{d}$$

Uzayda Eşzamanlı Kuvvetlerin Eklenmesi

Uzayda iki yada daha fazla kuvvetin R bileşkesi onların dik bileşenlerini toplayarak belirleyebiliriz. Bunun için grafiksel yada trigonometrik yöntemler pratik değildir. Bu amaçla, aşağıdaki yöntemi takip edeceğiz.

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$$

$$\begin{aligned} R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} &= \Sigma\,(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) \\ &= (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Bileşkenin dik bileşenleri: $R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z$

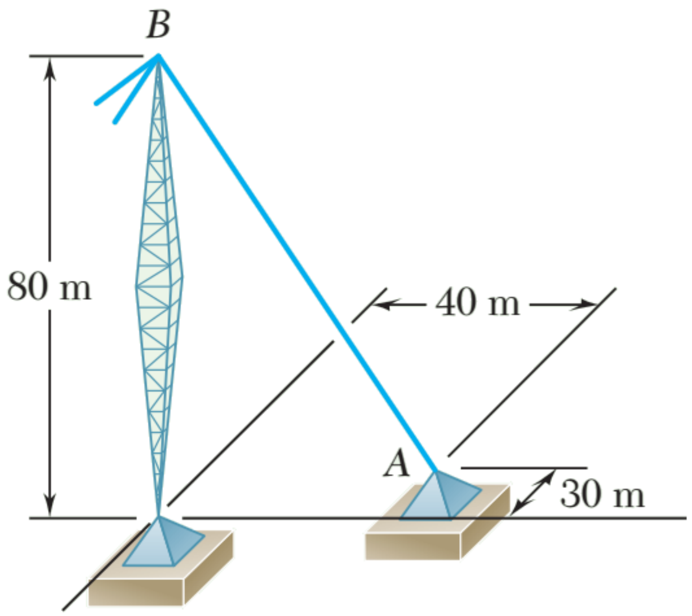
Uzayda eşzamanlı kuvvetlerin bileşkesi

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

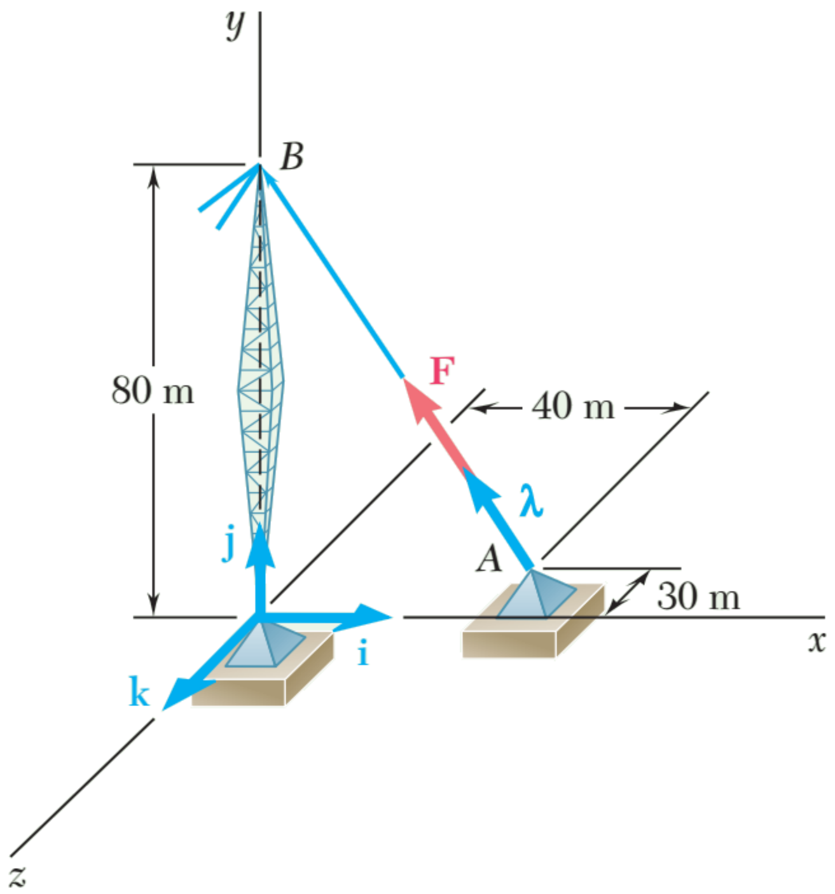
$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} \quad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos\theta_z = \frac{R_z}{R}$$

Örnek Problem 2.7:

Şekildeki kulenin destek halatı A noktasında cıvatayla bağlanmıştır. Halattaki çekme kuvveti 2500 N olduğuna göre; (a) Civataya etkiyen kuvvetin F_x, F_y ve F_z bileşenlerini,
(b) Kuvvetin doğrultusunu θ_x, θ_y ve θ_z yön açıları cinsinden bulunuz.



Örnek çözüm 2.7:



a. Kuvvetin bileşenleri. Cıvata üzerine etki eden kuvvetin etki çizgisi A ile B'den geçer ve kuvvet A'dan B'ye yönlendirilmiştir. Kuvvetle aynı yönde olan $\overrightarrow{AB}$, vektörünün bileşenleri

$$d_x = -40 \text{ m} \qquad d_y = +80 \text{ m} \qquad d_z = +30 \text{ m}$$

A'dan B'ye toplam mesafe

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

Koordinat ekseni boyunca yer alan birim vektörleri **i**, **j**, **k** ile gösterirsek

$$\overrightarrow{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

elde ederiz. Birim vektörü $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{AB}/AB$, ile ifade edersek

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}}\overrightarrow{AB}$$

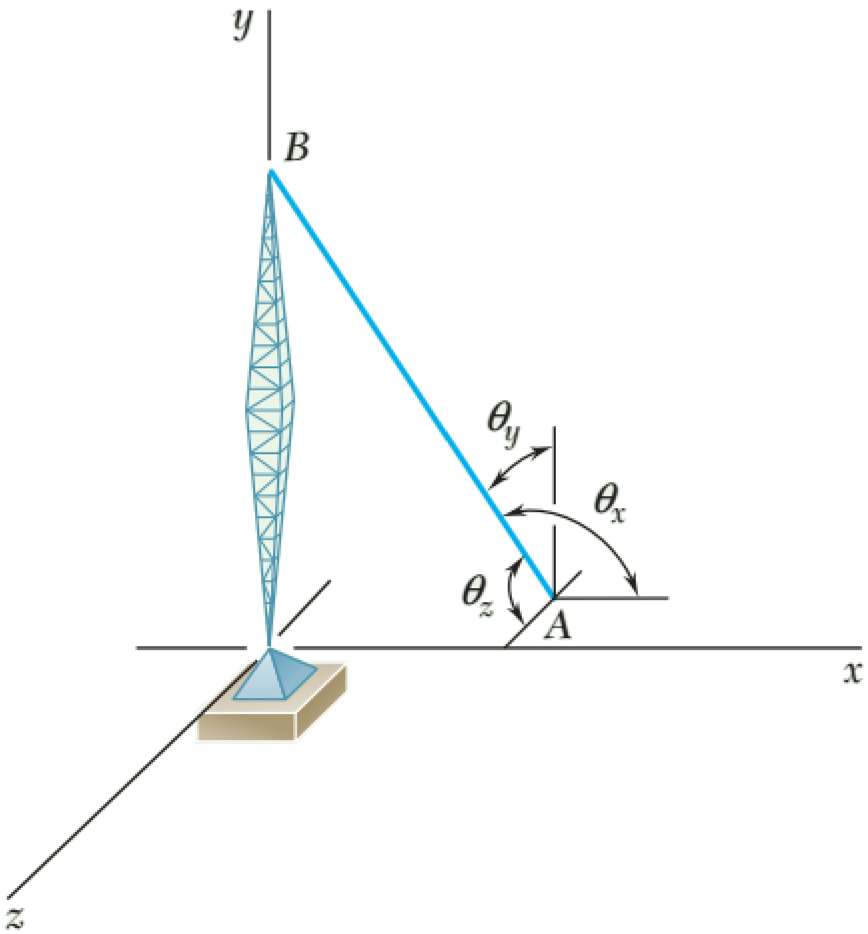
$\overrightarrow{AB}$ yerine yukarıdaki ifadeyi yerleştirirsek

$$\mathbf{F} = \frac{2500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}}[-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$
$$= -(1060 \text{ N})\mathbf{i} + (2120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

Dolayısıyla **F**'nin bileşenleri

$$F_x = -1060 \text{ N} \qquad F_y = +2120 \text{ N} \qquad F_z = +795 \text{ N}$$

Örnek çözüm 2.7:



b. Kuvvetin doğrultusu. Denk. (2.25)'i kullanarak

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1060\ \text{N}}{2500\ \text{N}} \qquad \cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2120\ \text{N}}{2500\ \text{N}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795\ \text{N}}{2500\ \text{N}}$$

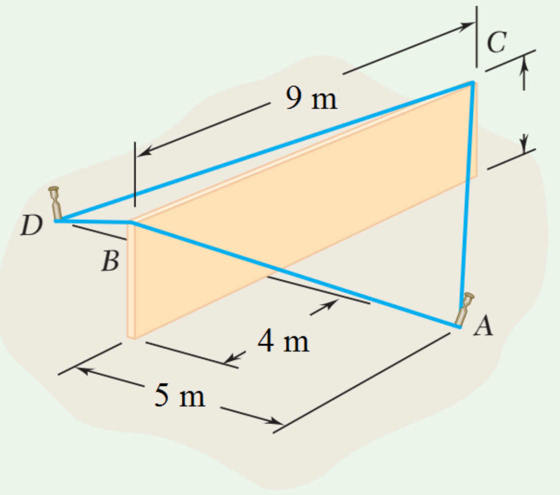
yazarız. Her bir oranı peş peşe hesaplar ve ters kosinüsünü alırsak

$$\theta_x = 115.1° \qquad \theta_y = 32.0° \qquad \theta_z = 71.5° \quad ◀$$

elde ederiz.

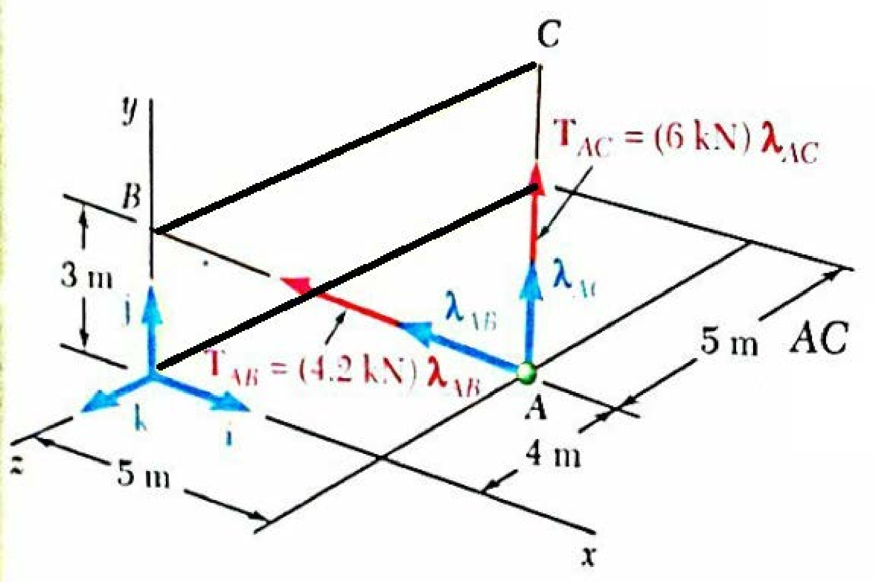
(*Not.* Bu sonuç **F** kuvveti yerine $\overrightarrow{AB}$ vektörünün bileşenleri ve büyüklüğü kullanılarak da elde edilebilir.)

Örnek Problem 2.8:



Şekildeki beton duvar A ve D noktalarındaki kazıklara çelik halatlarla sabitlenmiştir. AB ve AC halatlarındaki çekme kuvvetleri, sırasıyla 4.2 kN ve 6 kN olduğuna göre, A kazığına uygulanan kuvvetlerin bileşkesini ve doğrultusunu bulunuz.

Örnek çözüm 2.8:



Kuvvetlerin bileşenleri. Her bir kablonun A kazığı üzerinde uyguladığı kuvvet x, y ve z bileşenlerine ayrılacaktır. İlk önce $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörlerinin bileşenlerini ve büyüklüklerini A'dan duvar kesitine kadar ölçerek buluruz. Koordinat ekseni boyunca yer alan birim vektörleri **i**, **j**, **k** ile gösterirsek

$$\overrightarrow{AB} = -(5\text{ m})\mathbf{i} + (3\text{ m})\mathbf{j} + (4\text{ m})\mathbf{k} \qquad AB = 7.07\text{ m}$$
$$\overrightarrow{AC} = -(5\text{ m})\mathbf{i} + (3\text{ m})\mathbf{j} - (5\text{ m})\mathbf{k} \qquad AC = 7.68\text{ m}$$

elde ederiz. AB boyunca yer alan birim vektörü $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ ile şöyle ifade edebiliriz

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{4.2\text{ kN}}{7.07\text{ m}}\overrightarrow{AB}$$

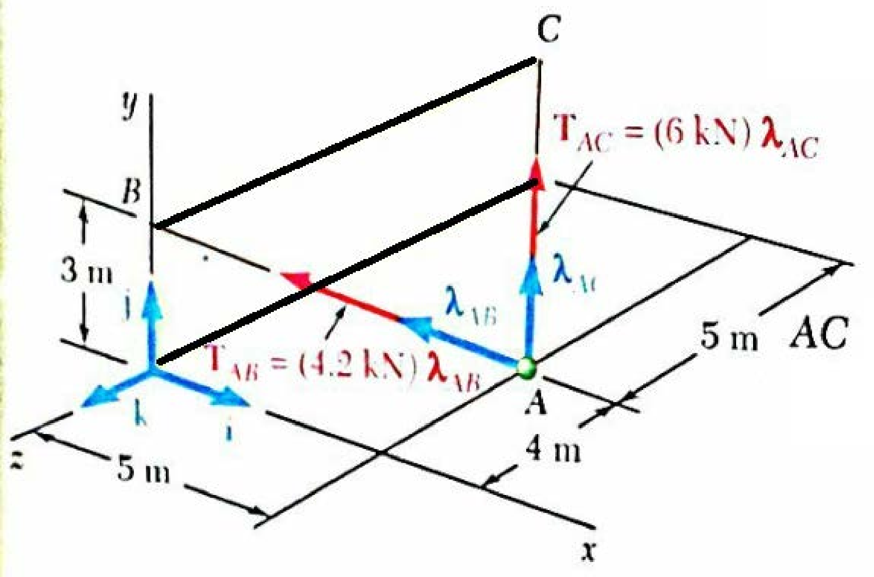
$\overrightarrow{AB}$ yerine yukarıdaki ifadeyi yerleştirirsek

$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{4.2\text{ kN}}{7.07\text{ m}}[-(5\text{ m})\mathbf{i} + (3\text{ m})\mathbf{j} + (4\text{ m})\mathbf{k}]$$
$$\mathbf{T}_{AB} = -(2.97\text{ kN})\mathbf{i} + (1.78\text{ kN})\mathbf{j} + (2.38\text{ kN})\mathbf{k}$$

AC boyunca yer alan birim vektörü $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ ile gösterip kuvveti benzer bir şekilde elde edebiliriz.

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{6\text{ kN}}{7.68\text{ m}}\overrightarrow{AC}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = -(3.91\text{ kN})\mathbf{i} + (2.34\text{ kN})\mathbf{j} - (3.91\text{ kN})\mathbf{k}$$

Örnek Çözüm 2.8:



Kuvvetlerin bileşenleri. İki kablonun uyguladığı kuvvetlerin bileşeni **R**

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(6.88 \text{ kN})\mathbf{i} + (4.12 \text{ kN})\mathbf{j} - (1.53 \text{ kN})\mathbf{k}$$

Bileşkenin büyüklüğü ve doğrultusu şöyle bulunur.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-6.88)^2 + (4.12)^2 + (-1.53)^2}$$

Denklem (2.33)'den

$$R = 8.16 \text{ kN}$$

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-6.88 \text{ kN}}{8.16 \text{ kN}} \qquad \cos\theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+4.12 \text{ kN}}{8.16 \text{ kN}}$$

$$\cos\theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-1.53 \text{ kN}}{8.16 \text{ kN}}$$

elde ederiz. Her bir oranı peş peşe hesaplar ve ters kosinüsünü alırsak

elde ederiz.

$$\theta_x = 147.5° \qquad \theta_y = 59.7° \qquad \theta_z = 100.8°$$

2.5 Uzayda Kuvvetler ve Denge

Bölüm 2.3'de verilen tanımlamalara göre, A noktasına uygulanan tüm kuvvetlerin bileşkesi sıfırsa, A parçacığı denge halindedir. Uzayda kuvvetlerin R_x , R_y ve R_z bileşenleri daha önce verilmişti:

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z$$

Bileşkenin bileşenleri sıfır olduğunu tanımlayabiliriz:

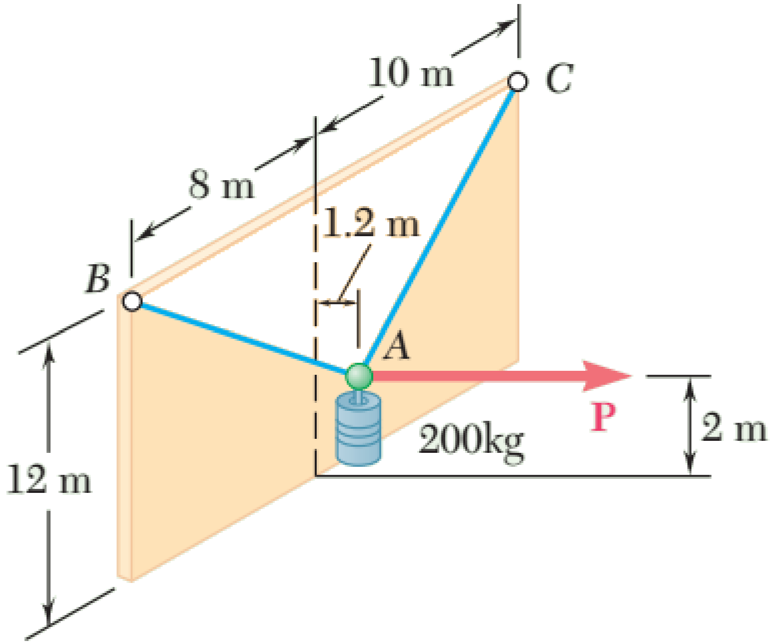
$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$

Bu denklemler uzayda bir parçacığın denge halinde olması için gerekli ve yeter koşulları gösterir.

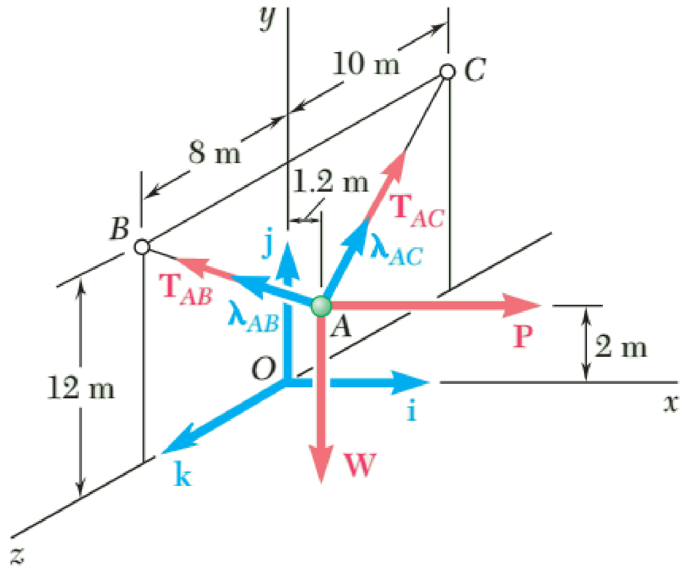
Üç boyutlu denge problemini çözmek için serbest cisim diyagramı kullanırız.

Örnek problem 2.9:

Şekildeki 200 kg'lık silindir duvarın üst tarafına bağlanmış olan AB ve AC halatlarıyla asılmıştır. Duvara dik, yatay P kuvveti silindirin duvardan 1.2 m uzakta tutulmasını sağlamaktadır. P kuvvetinin büyüklüğünü ve her halattaki çekme kuvvetini bulunuz.



Örnek çözüm 2.9:



Serbest cisim diyagramı. A noktası serbest cisim olarak seçilir. Bu noktaya dört kuvvet etki etmektedir. Üçünün büyüklüğü bilinmemektedir.

Birim vektörleri **i**, **j**, **k** ile gösterip her bir kuvveti dik bileşenlerine ayırırız.

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$
$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(1962 \text{ N})\mathbf{j} \tag{1}$$

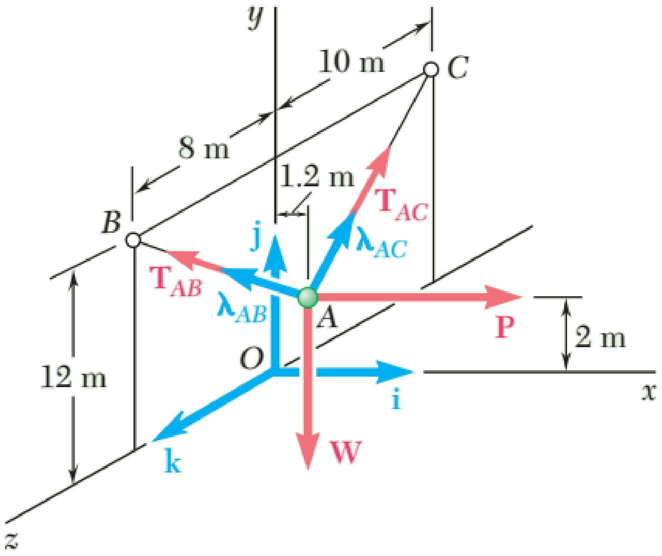
$\mathbf{T}_{AB}$ ve $\mathbf{T}_{AC}$ için öncelikle $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$. vektörlerinin bileşenlerini ve büyüklüklerini bulmak gerekir. AB boyunca yer alan birim vektörü $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$ ile gösterirsek

$$\overrightarrow{AB} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} + (8 \text{ m})\mathbf{k} \qquad AB = 12.862 \text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{12.862 \text{ m}} = -0.09330\mathbf{i} + 0.7775\mathbf{j} + 0.6220\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\boldsymbol{\lambda}_{AB} = -0.09330T_{AB}\mathbf{i} + 0.7775T_{AB}\mathbf{j} + 0.6220T_{AB}\mathbf{k} \tag{2}$$

yazarız. AB boyunca yer alan birim vektörü $\boldsymbol{\lambda}_{AC}$ ile gösterirsek benzer şekilde

$$\overrightarrow{AC} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} - (10 \text{ m})\mathbf{k} \qquad AC = 14.193 \text{ m}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{14.193 \text{ m}} = -0.08455\mathbf{i} + 0.7046\mathbf{j} - 0.7046\mathbf{k}$$
$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\boldsymbol{\lambda}_{AC} = -0.08455T_{AC}\mathbf{i} + 0.7046T_{AC}\mathbf{j} - 0.7046T_{AC}\mathbf{k} \tag{3}$$

Örnek çözüm 2.9:



Denge Şartı. A dengede olduğu için

$$\Sigma\mathbf{F} = 0: \qquad \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

olmalıdır veya kuvvetleri (1), (2), (3)'den alıp yerleştirir ve ortak parantezlere alırsak

$$(-0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P)\mathbf{i} + (0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1962\text{ N})\mathbf{j} + (0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC})\mathbf{k} = 0$$

elde ederiz. **i**, **j**, **k**'nın katsayılarını sıfıra eşitlersek üç sayısal denklem yazabiliriz. Bu denklemler kuvvetlerin sırasıyla x, y ve z bileşenlerinin sıfıra eşit olduğunu ifade edecektir.

$$(\Sigma F_x = 0:) \qquad -0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P = 0$$
$$(\Sigma F_y = 0:) \qquad +0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1962\text{ N} = 0$$
$$(\Sigma F_z = 0:) \qquad +0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC} = 0$$

Bu denklemleri çözersek

$$P = 235\text{ N} \qquad T_{AB} = 1402\text{ N} \qquad T_{AC} = 1238\text{ N}$$

elde ederiz.