# TEMEL MEKANİK
# 7

**Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıoğlu**
**Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi**
**Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliği Bölümü**

**Ders Kitapları:**

- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, Elliot R. Eisenberg, 2008, Güven Yayınları, İzmir

  Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Halil Rıdvan Öz, Osman Kopmaz.
- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015, Literatür Yayıncılık, İstanbul,

  Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Osman Kopmaz.

**Diğer Kaynaklar:**

- Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015. Vector Mechanics for Engineers 11e : Statics : SI Units, McGraw Hill, USA.
- Russell C. Hibbeler, 2016. Engineering Mechanics: Statics in SI Units (14e), Pearson Higher Ed USA.

# Bir kuvvetin momentinin dik bileşenleri

İki boyutlu problemlerde F kuvveti genellikle x-y düzleminde ele alınır Şekil (a):

$$z = 0 \text{ and } F_z = 0$$

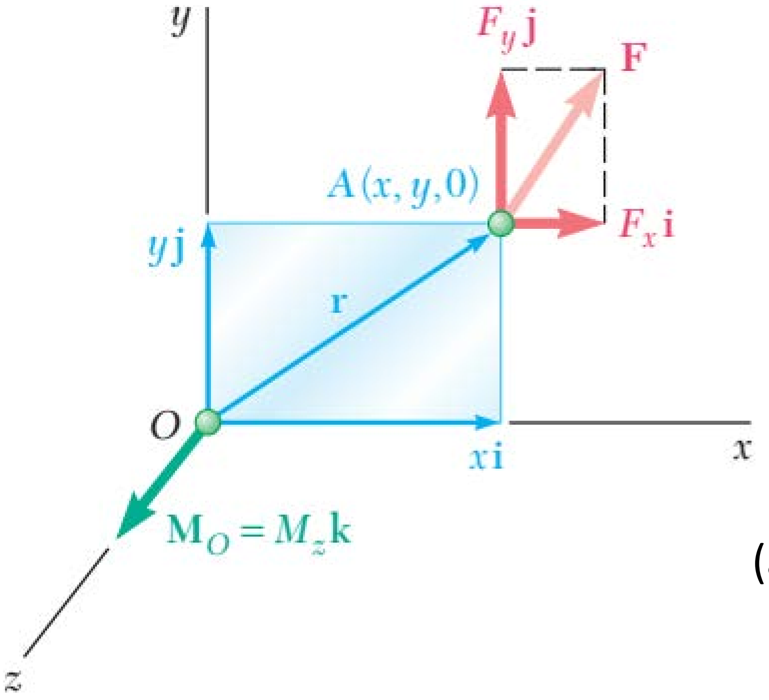
$$\mathbf{M}_O = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

O'nun etrafındaki **F** kuvvetinin geliştirdiği momentin şekilde gösterilen x-y düzlemine dik olduğunu ve skalar olarak tanımlandığını doğrulayabiliriz:

$$M_O = M_z = xF_y - yF_x$$

Daha önce ifade edildiği gibi, $M_O$ için pozitif değer $\mathbf{M}_O$ momentin kağıt düzleminden dışarı doğru (**F** kuvveti O etrafında cismi saat ters yönünde döndürme eğilimindedir.) yöneldiğini gösterir.

$M_O$ için negatif değer $\mathbf{M}_O$ momentin kağıt düzleminden içe doğru (**F** kuvveti O etrafında cismi saat yönünde döndürme eğilimindedir.) yöneldiğini gösterir.



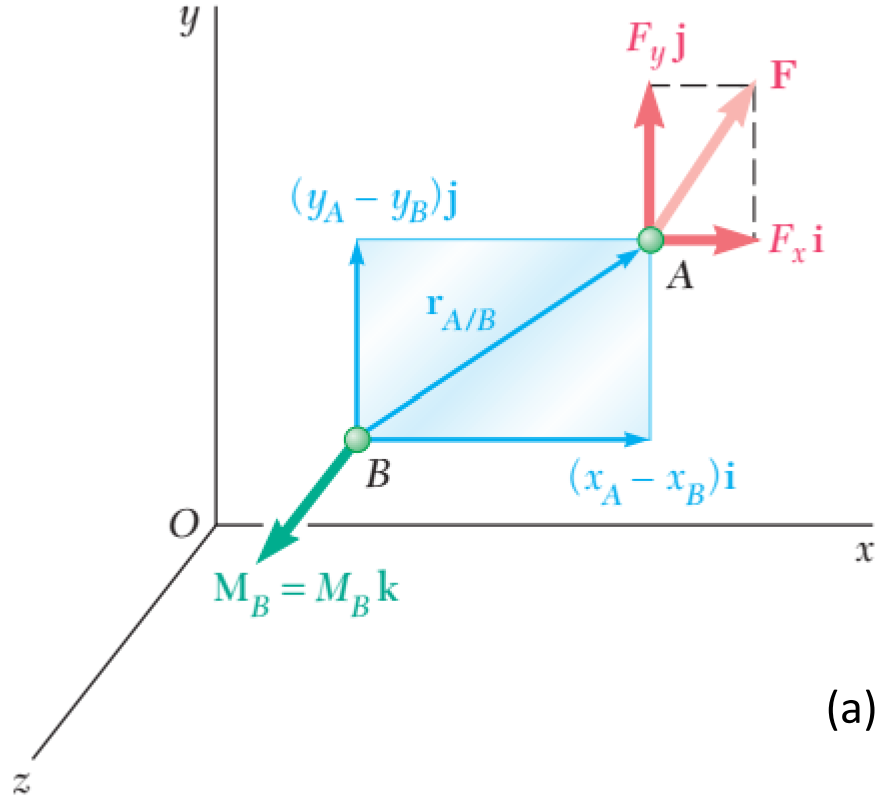
(a)

# Bir kuvvetin momentinin dik bileşenleri

xy düzleminde bulunan ve $A(x_A, y_A)$ noktasına uygulanan $B(x_B, y_B)$ etrafındaki momenti hesaplamak için, $z_{A/B} = 0$ ve $F_z = 0$ yazarız.

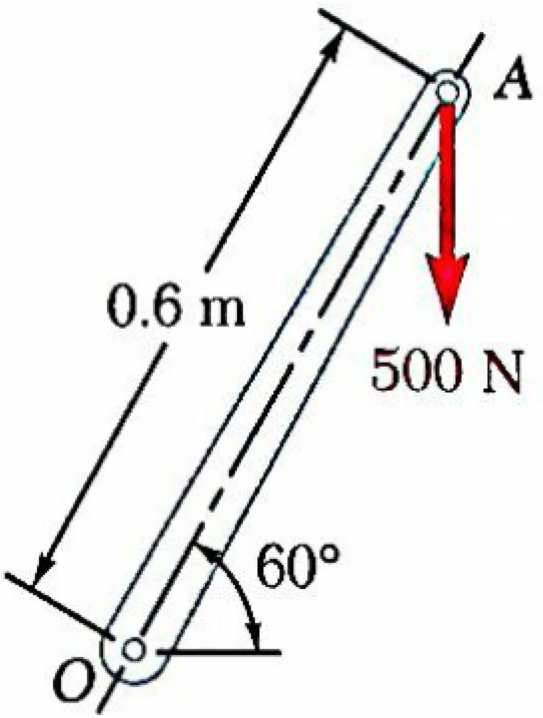
$\mathbf{M}_B$ vektörü xy düzlemine diktir ve büyüklüğü ve işareti skaler olarak yazılır:

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$$



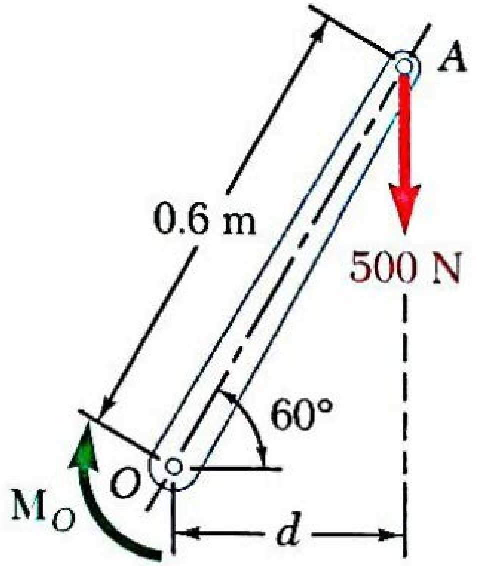

(a)

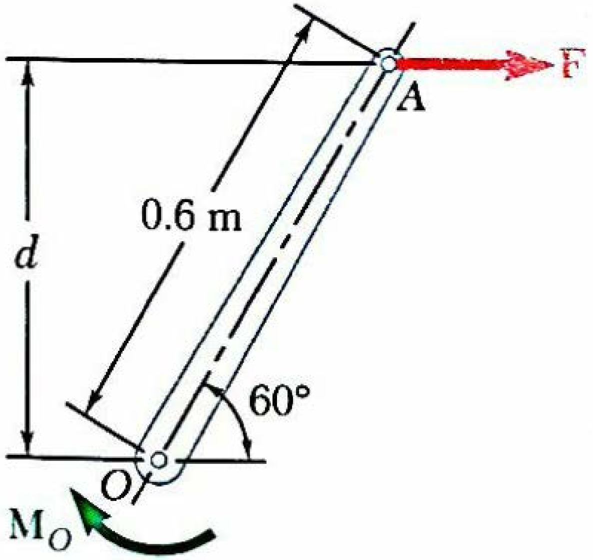
## Örnek problem 3.1:




Şekilde gösterilen O’daki mile yataklanmış bir çubuğa 500 N’luk kuvvet uygulanmaktadır. a) 500 N’luk kuvvetin O’ya göre momentini, b)A’ya yatay olarak uygulanacak ve O’ya göre aynı momenti verecek kuvveti, c) A’ya uygulanacak ve O’ya göre aynı momenti verecek en küçük kuvveti, d) O’ya göre aynı momenti verecek 1200 N’luk düşey kuvvetin milden ne kadar uzakta olması gerektiğini, e) b, c ve d şıklarında elde edilen kuvvetlerden hangilerinin asıl kuvvete denk olduğunu bulunuz.

**Örnek çözüm 3.1:**




**a) O'ya göre moment:** O'dan 500 N'luk kuvvetin etki çizgisine dik uzaklık

$$d = (0.6 \text{ m}) \cos 60° = 0.3 \text{ m}$$

500 N'luk kuvvetin O'ya göre momentinin büyüklüğü

$$M_O = Fd = (500 \text{ N})(0.3 \text{ m}) = 150 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\mathbf{M}_O = 150 \text{ N} \cdot \text{m} \circlearrowright$$ ◀

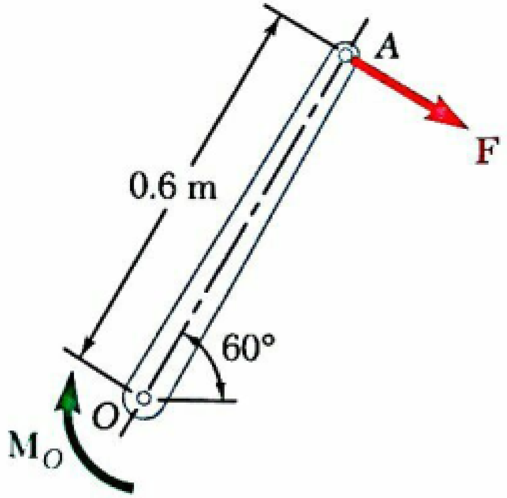
**b) Yatay kuvvet:**

$$d = (0.6 \text{ m}) \sin 60° = 0.52 \text{ m}$$

O'ya göre momentin 150 N.m olması gerektiğine göre

$$M_O = Fd$$
$$150 \text{ N} \cdot \text{m} = F(0.52 \text{ m})$$
$$F = 288.5 \text{ N} \qquad \mathbf{F} = 288.5 \text{ N} \rightarrow$$ ◀

## Örnek çözüm 3.1:




**c) En küçük kuvvet:** $M_O = Fd$ olduğu için d maksimum olduğunda $F$'nin değeri en küçük olur. Kuvveti $OA$'ya dik seçeriz ve $d$ = 0.6 m alırız,

$$M_O = Fd$$

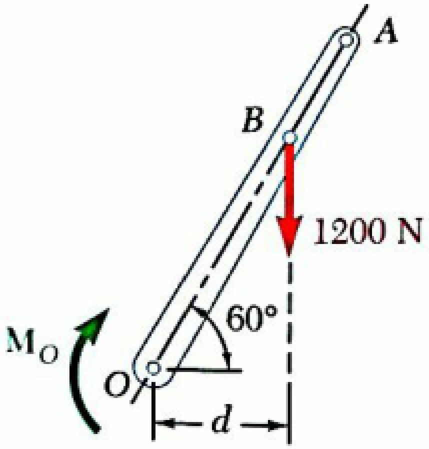
$$150 \text{ N} \cdot \text{m} = F(0.6 \text{ m})$$

$$F = 250 \text{ N} \qquad \mathbf{F} = 250 \text{ N} \measuredangle 30°$$

**d) 1200 N düşey kuvvet:** $M_O = Fd$'den

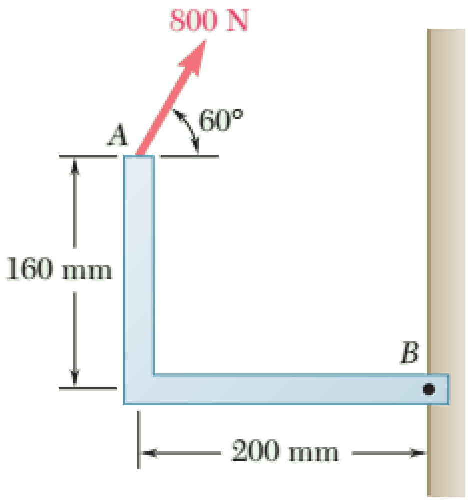
$$150 \text{ N} \cdot \text{m} = (1200 \text{ N})d \qquad d = 0.125 \text{ m}$$

$$OB \cos 60° = d \qquad OB = 0.25 \text{ m}$$



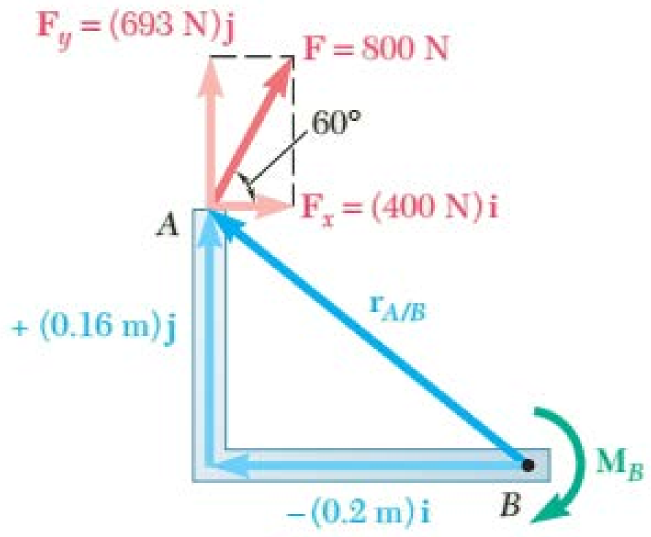

**e.** $b$, $c$, ve $d$ şıklarında ele alınan kuvvetlerin hiçbirisi 500 N'luk asıl kuvvete denk değildir. $O$'ya göre momentleri aynı olduğu halde $x$ ve $y$ bileşenleri farklıdır. Diğer bir ifadeyle, her bir kuvvet mili aynı şekilde döndürmeye eğilimli olduğu halde, mile bağlı kaldıracı farklı şekilde çekmeye çalışırlar.

**Örnek problem 3.2:**




800 N luk bir kuvvet şekilde gösterilen dirseğe etkimektedir. Kuvvetin B’ye göre momentini bulunuz.

**Örnek çözüm 3.2:**




**F** kuvvetinin $B$'ye göre momenti olan $\mathbf{M}_B$

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

vektör çarpımını oluşturarak elde edilir. $\mathbf{r}_{A/B}$ ile **F**'yi dik bileşenlerine ayırırsak

$$\mathbf{r}_{A/B} = -(0.2\ \text{m})\mathbf{i} + (0.16\ \text{m})\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F} = (800\ \text{N})\cos 60°\mathbf{i} + (800\ \text{N})\sin 60°\mathbf{j}$$
$$= (400\ \text{N})\mathbf{i} + (693\ \text{N})\mathbf{j}$$

Birim vektörlerin vektör çarpımları (Kıs. 3.5) hakkındaki (3.7) bağıntısı hatırlanırsa

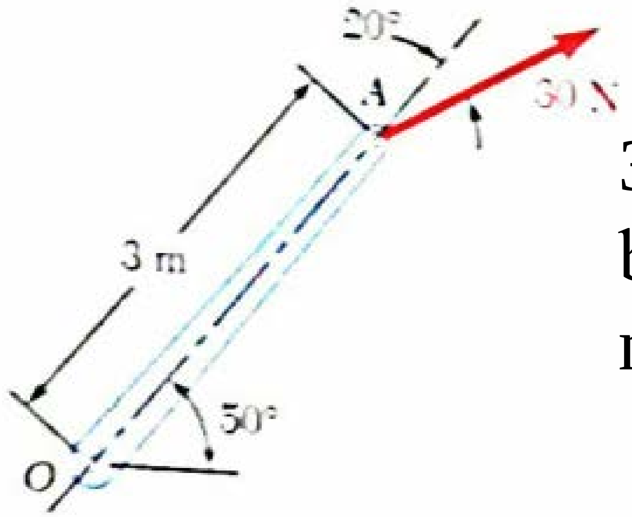
$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = [-(0.2\ \text{m})\mathbf{i} + (0.16\ \text{m})\mathbf{j}] \times [(400\ \text{N})\mathbf{i} + (693\ \text{N})\mathbf{j}]$$
$$= -(138.6\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k} - (64.0\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$
$$= -(202.6\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

$$M_B = 203\ \text{N}\cdot\text{m}\ \downarrow$$

elde edilir.

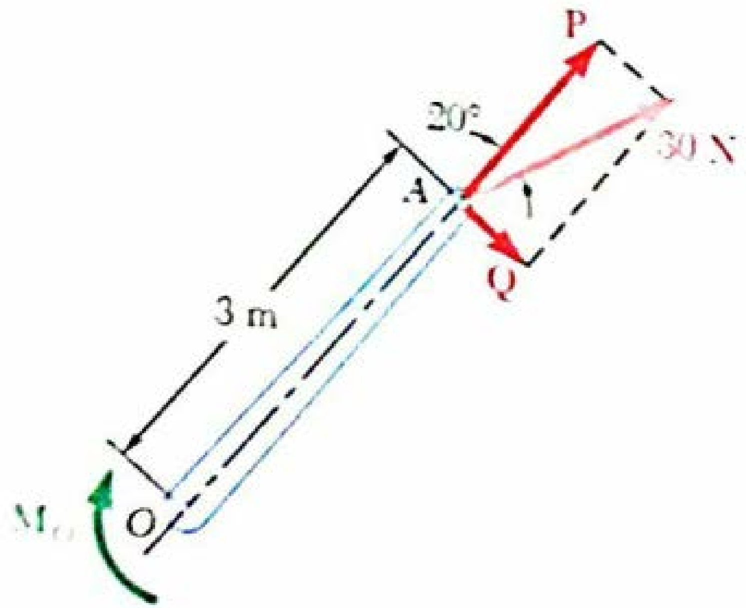
$\mathbf{M}_B$ momenti şekil düzlemine dik ve sayfanın içine doğru yönlendirilmiş bir vektördür.

**Örnek problem 3.3:**




30 N luk bir kuvvet şekilde gösterilen 3 m uzunluğundaki bir kaldıracın ucuna etkimektedir. Kuvvetin O'ya göre momentini bulunuz.

**Örnek çözüm 3.3:**



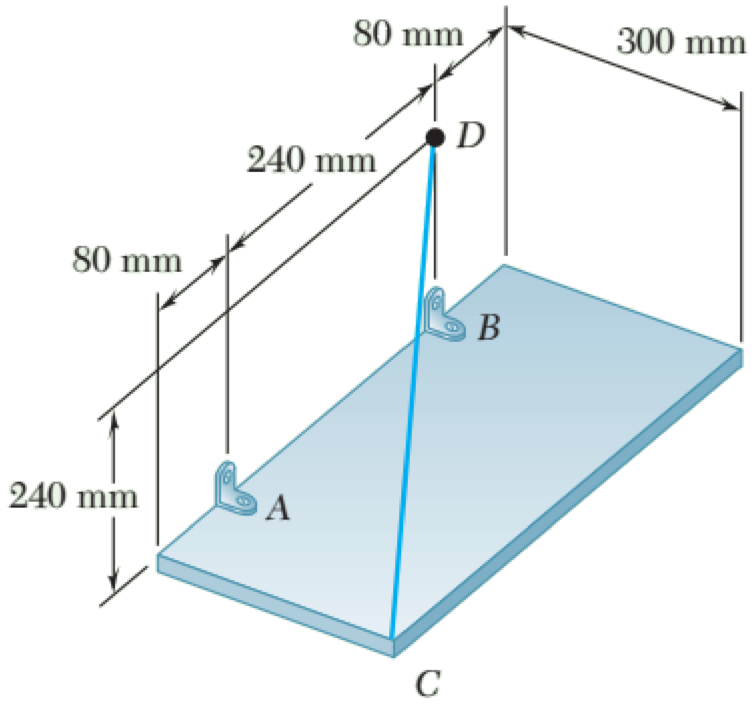

Kuvvet iki bileşenle değiştirilir. Birisi $OA$ yönünde **P**, diğeriyse $AO$'ya dik olan **Q** bileşenidir. $O$ noktası **P**'nin etki çizgisi üzerinde olduğu için **P**'nin $O$'ya göre momenti sıfırdır. 30 N'luk kuvvetin momenti saat yönünde olan **Q**'nun momentine indirgenir. Dolayısıyla negatif bir sayıyla gösterilir.

$$Q = (30\text{ N}) \sin 20° = 10.26\text{ N}$$
$$M_O = -Q(3\text{ m}) = -(10.26\text{ N})(3\text{ m}) = -30.8\text{ N}\cdot\text{m}$$

$M_O$ sayısı için elde edilen değer negatif olduğu için $\mathbf{M}_O$ momenti sayfanın içine doğru yönlendirilmiştir.

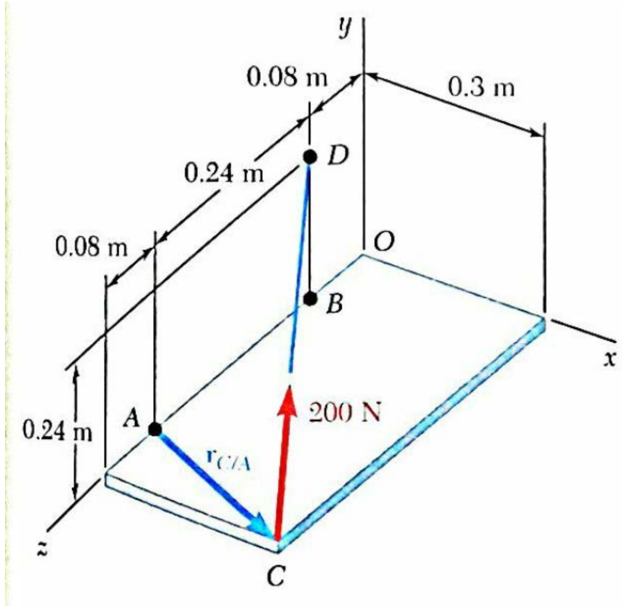
$$\mathbf{M}_O = 30.8\text{ N}\cdot\text{m}\ ↓$$

**Örnek problem 3.4:**




Dikdörtgen bir levha *A* ve *B*'den dirseklerle ve *CD* teliyle desteklenmiştir. Teldeki çekme kuvvetinin 200 N olduğu bilindiğine göre telin *C* noktasına uyguladığı kuvvetin *A*'ya göre momentini bulunuz.

**Örnek çözüm 3.4:**




Telin $C$ noktasına uyguladığı kuvvetin **F** kuvvetinin $A$'ya göre momenti $\mathbf{M}_A$ aşağıdaki vektör çarpımından bulunur.

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} \qquad (1)$$

Burada $\mathbf{r}_{C/A}$ vektörü $A$'dan $C$'ye doğru çizilen bir vektördür.

$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0.3\text{ m})\mathbf{i} + (0.08\text{ m})\mathbf{k} \qquad (2)$$

**F** ise $CD$ boyunca yönlendirilmiş olan 200 N'luk kuvvettir. $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{CD}/CD$ birim vektörünü yerleştirirsek

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = (200\text{ N})\frac{\overrightarrow{CD}}{CD} \qquad (3)$$

$\overrightarrow{CD}$ vektörünün dik bileşenlerine ayrılmasıyla

$$\overrightarrow{CD} = -(0.3\text{ m})\mathbf{i} + (0.24\text{ m})\mathbf{j} - (0.32\text{ m})\mathbf{k} \qquad CD = 0.50\text{ m}$$

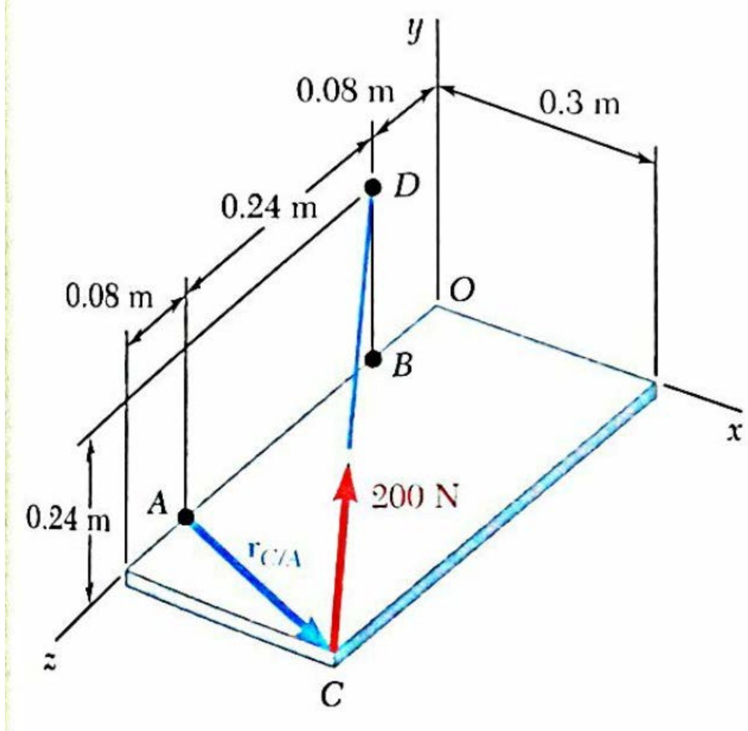
elde ederiz. Denk. (3)'e yerleştirirsek

$$\mathbf{F} = \frac{200\text{ N}}{0.50\text{ m}}[-(0.3\text{ m})\mathbf{i} + (0.24\text{ m})\mathbf{j} - (0.32\text{ m})\mathbf{k}]$$
$$= -(120\text{ N})\mathbf{i} + (96\text{ N})\mathbf{j} - (128\text{ N})\mathbf{k} \qquad (4)$$

Denk. (2) ve (4)'ten $\mathbf{r}_{C/A}$ ve **F**'yi Denk. (1)'e yerleştirir ve Kıs. 3.5'teki (3.7) bağıntılarını hatırlarsak

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = (0.3\mathbf{i} + 0.08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k})$$
$$= (0.3)(96)\mathbf{k} + (0.3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0.08)(-120)\mathbf{j} + (0.08)(96)(-\mathbf{i})$$
$$\mathbf{M}_A = -(7.68\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

**Örnek çözüm 3.4:**




**İkinci çözüm.** Kıs. 3.8'de gösterildiği üzere $\mathbf{M}_A$ momenti determinant halinde gösterilebilir:

$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

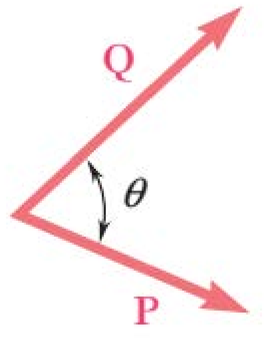
$$\mathbf{M}_A = -(7.68\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{i} + (28.8\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{j} + (28.8\,\mathrm{N\cdot m})\mathbf{k}$$

# 3.2 Bir eksen etrafındaki kuvvetin momenti

Problem çözümlerinde bir eksen etrafında oluşan moment kavramını da faydalı bir araç olarak kullanabiliriz.

## Skaler çarpımlar

**P** ve **Q** iki vektörünün skaler çarpımı, P ve Q büyüklükleri ile onların aralarında oluşan θ açının kosinüsünün çarpımı olarak tanımlanır. (Şekil (a)).




(a)

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = PQ\cos\theta$$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_1 + \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_2$$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k})\cdot(Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k})$$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1 \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0 \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0 \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$$

**Skaler çarpım**

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2$$

# 3.2 Bir eksen etrafındaki kuvvetin momenti

**Skaler çarpım uygulamaları**

**1. Verilen iki vektörün oluşturduğu açı**

Bileşenlerine göre iki vektör tanımlayalım:

(a)

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{Q} = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k}$$

İki vektörün arasındaki açıyı belirlemek için $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = PQ\cos\theta$ ve $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$ denklemlerini kullanacağız.

$$PQ\cos\theta = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

$$\cos\theta = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{PQ}$$

**2. Verilen bir eksen üzerinde bir vektörün izdüşümü**

# 3.2 Bir eksen etrafındaki kuvvetin momenti

**Skaler çarpım uygulamaları**

**2. Verilen bir eksen üzerinde bir vektörün izdüşümü**

Bir **P** vektörü ve aralarında θ açısı olan OL doğrusu göz önüne alalım. (Şekil a). P'nin OL üzerindeki izdüşümünü skaler olarak tanımlarız:

$$P_{OL} = P \cos \theta$$

$P_{OL}$ üzerindeki izdüşümü OA uzunluğuna eşittir.

OL yönünde bir **Q** vektörü göz önüne alalım. (Şekil b).

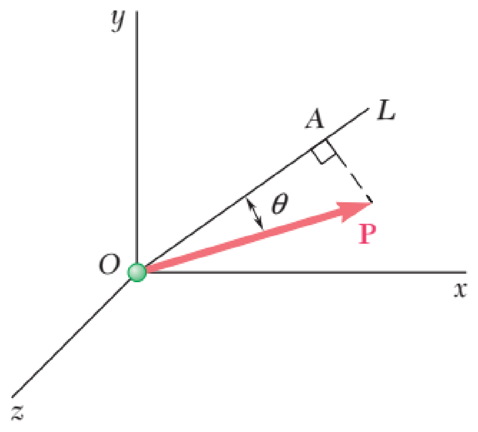
**Skaler çarpım** $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta = P_{OL} Q$

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{Q}$$

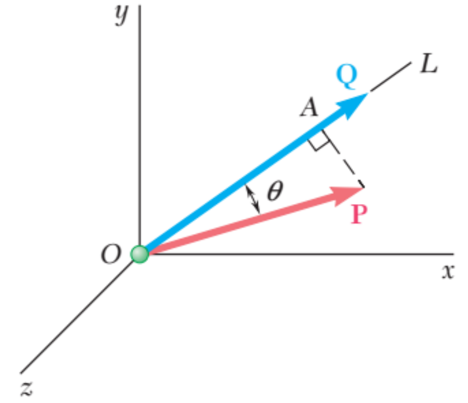
OL boyunca seçilen birim vektör λ 'dır. (Şekil c).

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

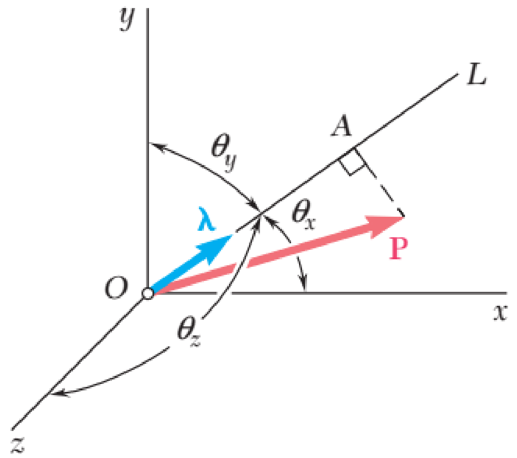
$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z$$




(a)

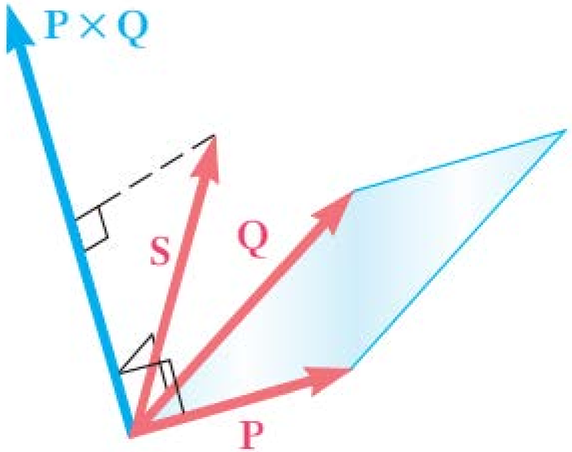



(b)




(c)

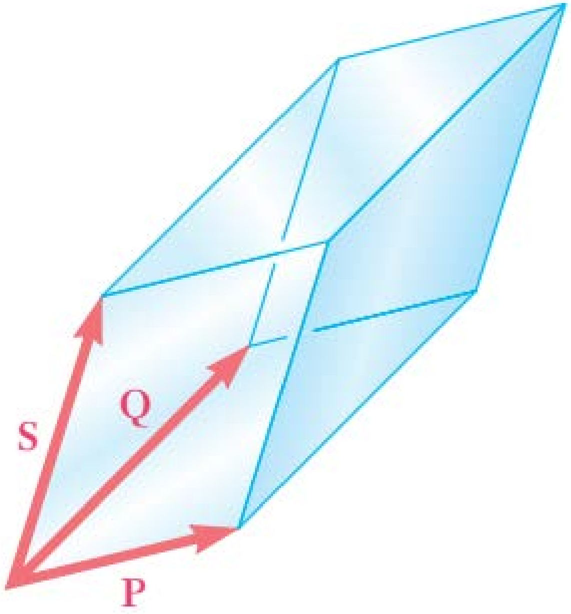
# 3.2 Bir eksen etrafındaki kuvvetin momenti



(a)

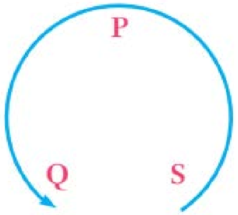
**Karışık Üçlü Çarpım**

Skaler çarpım olarak, **S**, **P** ve **Q** vektörlerini seçelim.
Karışık Üçlü Çarpım $\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})$
Üçlü vektörel çarpım $\mathbf{S}\times(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})$
**S**, **P** ve **Q**'nun karışık üçlü çarpımının basit geometrik yorumu şekil (a) da yapılmıştır.
**P** x **Q** ‘nun sonucu **P** ve **Q** ’nun bulunduğu düzleme dik ve büyüklüğü uzunlukları P ve Q olan paralel kenarın alanına eşittir.
**S**, **P** ve **Q** sonucu üç vektör tarafından oluşyurulan paralelyüzün hacmine eşittir.



(b)

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) &= \mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{S}) = \mathbf{Q}\cdot(\mathbf{S}\times\mathbf{P})\\ &= -\mathbf{S}\cdot(\mathbf{Q}\times\mathbf{P}) = -\mathbf{P}\cdot(\mathbf{S}\times\mathbf{Q}) = -\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{S})\end{aligned}$$




$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \mathbf{S}\cdot\mathbf{V} = S_xV_x + S_yV_y + S_zV_z$$

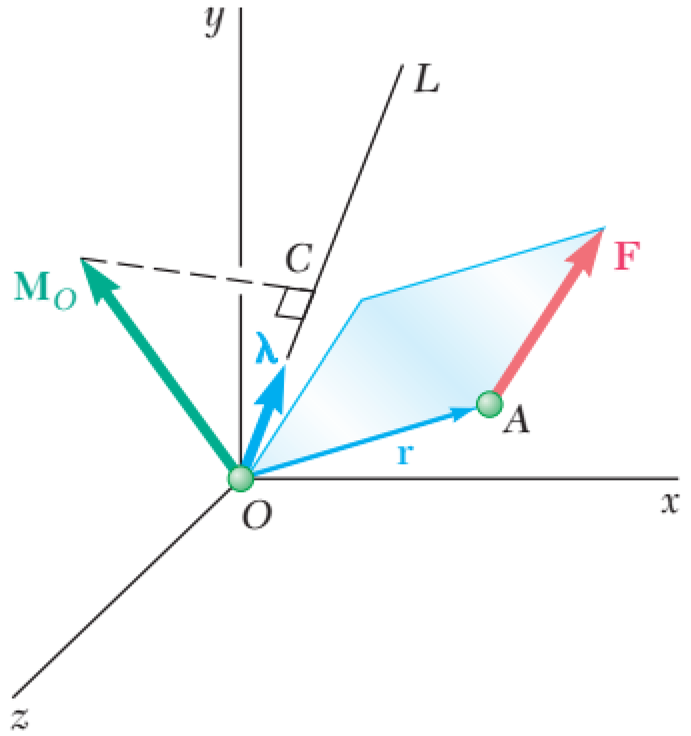
$$\begin{aligned}\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = S_x(P_yQ_z - P_zQ_y) &+ S_y(P_zQ_x - P_xQ_z)\\ &+ S_z(P_xQ_y - P_yQ_x)\end{aligned}$$

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

# 3.2 Bir eksen etrafındaki kuvvetin momenti

**Verilen bir eksen etrafındaki kuvvetin momenti**

Bir rijit cisim üzerine etkiyen **F** kuvveti ve bu kuvvetin O ekseni çevresinde oluşturduğu $\mathbf{M}_O$ momentini göz önüne alalım. Şekil (a). OL O dan geçen bir eksen olsun.




OL etrafındaki $\mathbf{M}_{OL}$ momentini OL ekseni üzerinde $\mathbf{M}_O$ OC izdüşümü olarak tanımlarız.

**Orjinden geçen bir eksen etrafındaki moment**

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z =$ OL ekseninin yön kosinüsleri

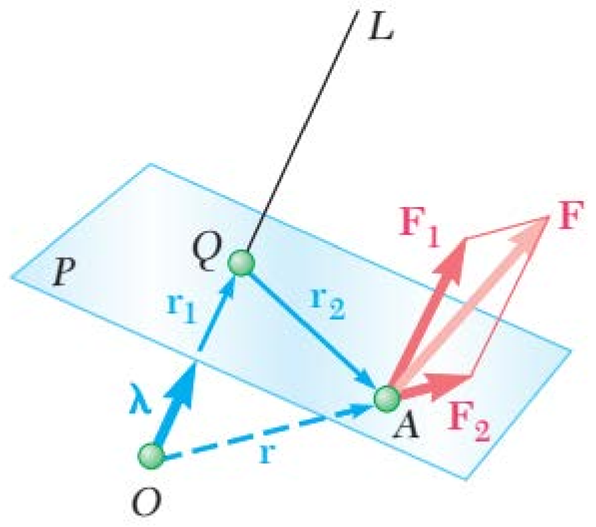
$x, y, z =$ **F** uygulama noktasının koordinatları

$F_x, F_y, F_z =$ **F** kuvvetinin bileşenleri

# 3.2 Bir eksen etrafındaki kuvvetin momenti

## Verilen bir eksen etrafındaki kuvvetin momenti

**F**'nin iki dik bileşenini, OL'ye paralel olan $\mathbf{F}_1$ ve OL'ye dik P düzleminde bulunan $\mathbf{F}_2$, tekrar çözümleyelebilirsek, sabit bir eksen etrafındaki **F** kuvvetinin $\mathbf{M}_{OL}$ mometinin fiziksel anlamını daha açık şekilde kavrayabiliriz.




$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)]$$
$$= \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2)$$

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2)$$

***OL etrafında F kuvvetinin $M_{OL}$ momenti F kuvvetinin rijit cisme OL sabit eksen etrafında bir dönüş verme eğiliminin ölçüsüdür.***

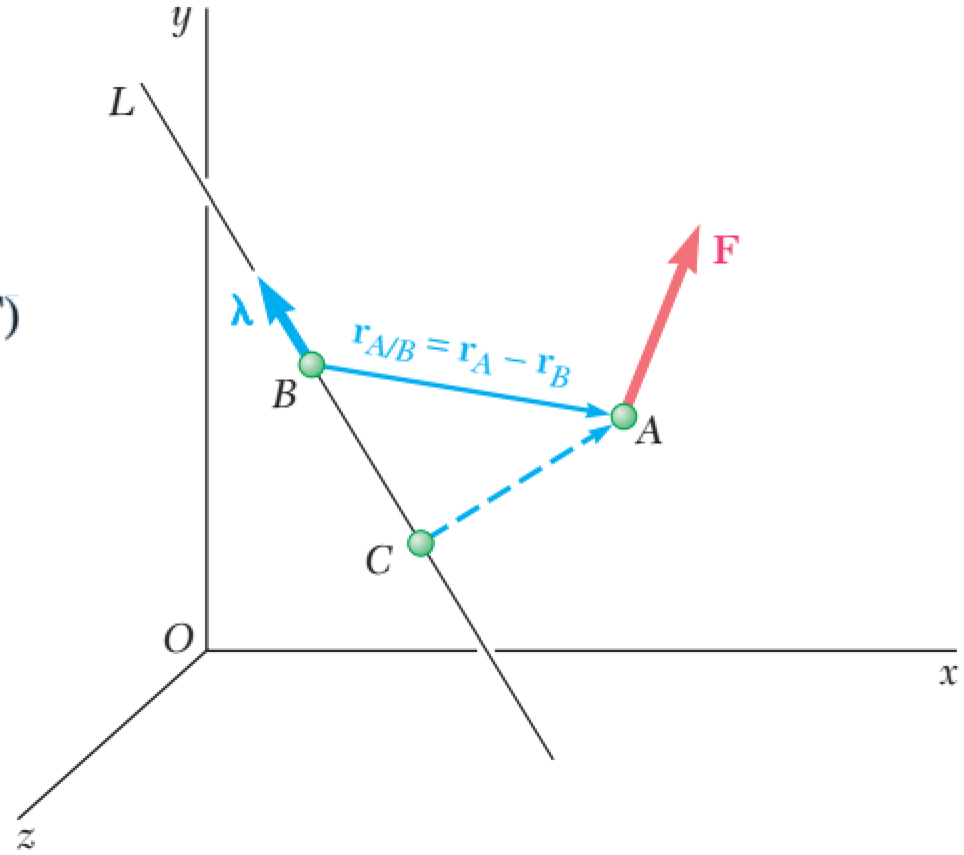
O etrafında **F**'nin $\mathbf{M}_O$ momentinin bileşenleri:

$$M_x = yF_z - zF_y$$
$$M_y = zF_x - xF_z$$
$$M_z = xF_y - yF_x$$

# 3.2 Bir eksen etrafındaki kuvvetin momenti

## Verilen bir eksen etrafındaki kuvvetin momenti

Daha genel olarak, eksen üzerinde keyfi bir B noktası seçerek, orjinden geçmeyen bir eksen etrafında uygulanan bir F kuvvetinin momentini elde edebiliriz. (Şekil). B etrafında **F**’nin $\mathbf{M}_B$ momentinin izdüşümünü belirleyebiliriz.




Keyfi bir eksen çevresindeki moment: $M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F})$

$\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ B den A ya çizilen vektörü gösterir.

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = BL ekseninin yön kosinüsleri

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

$F_x, F_y, F_z$ = **F** kuvvetinin bileşenleri

$M_{CL}$ momenti
$$M_{CL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}]$$
$$= \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \boldsymbol{\lambda} \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}]$$