

Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği Bölümü

FZM207

Temel Elektronik-I

Prof. Dr. Hüseyin Sarı

2. Bölüm

Dirençli Devreler-2

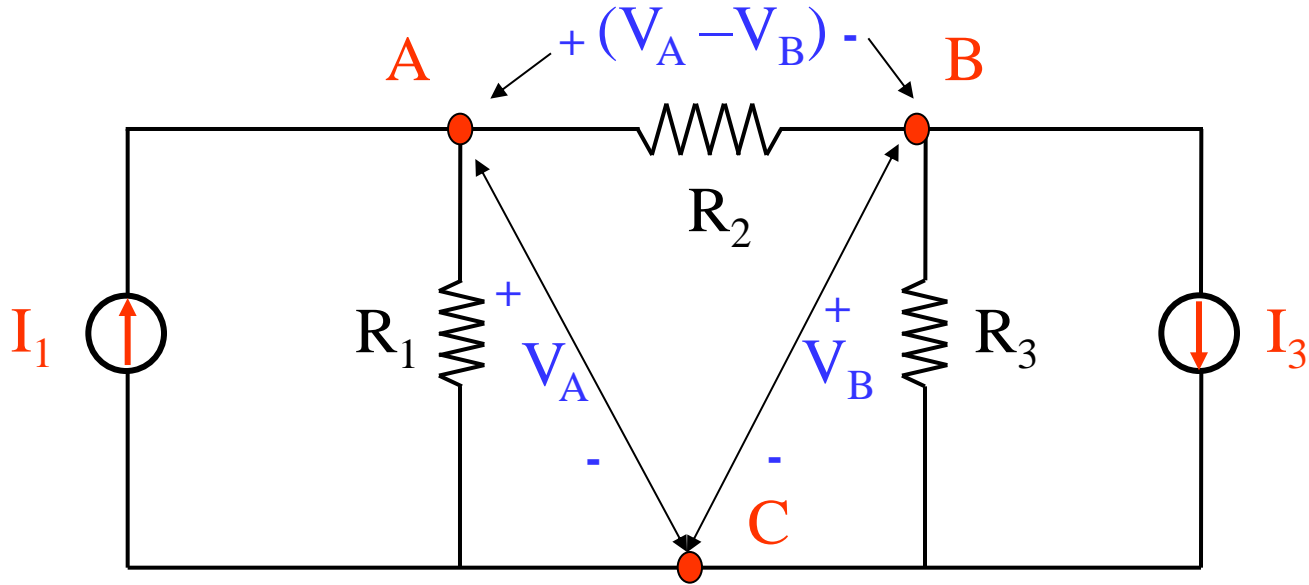
Düğüm Noktası Gerilim Yöntemi

Devre çözümünde **Düğüm Noktası Gerilim Yöntemi**, Kirchhoff Gerilim Yasası (KGY) denklemlerinin açık olmayan bir biçimde devre şeması üzerine yazılmasını ve böylece yalnız **Kirchhoff Akım Yasası (KAY)** denklemlerinin çözülmesini gerektiren bir yöntemdir. Bu yöntemde belli noktalar için gerilimler tanımlanır.

Düğüm Noktası Gerilim Yöntemi

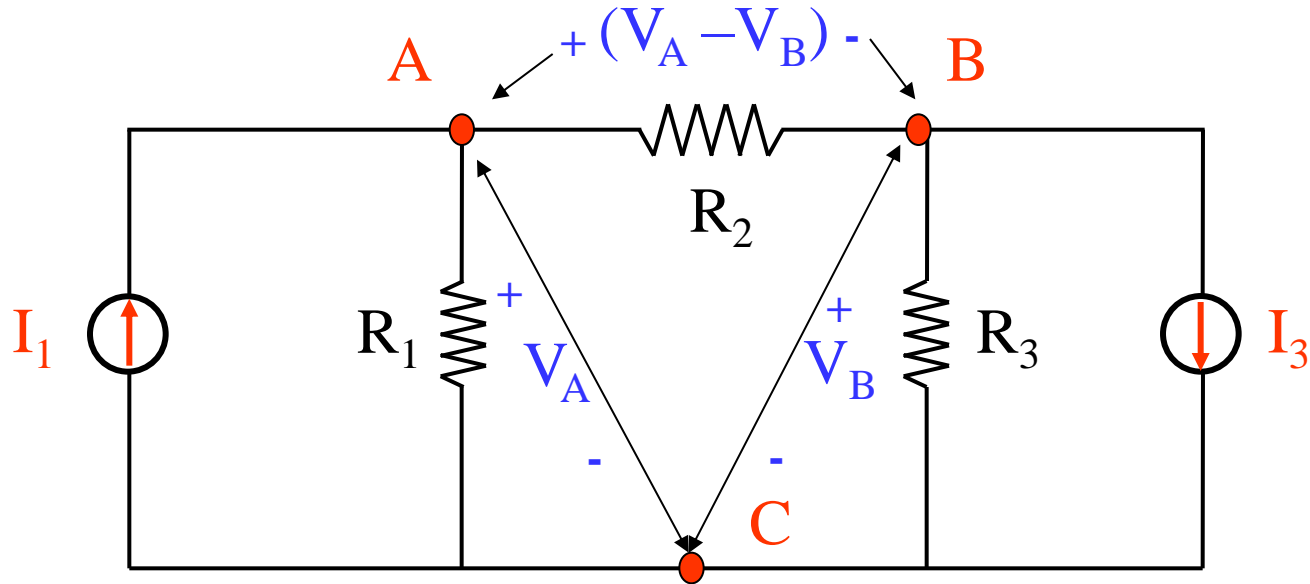
Devre çözümünde **Düğüm Noktası Gerilim Yöntemi**, Kirchhoff Gerilim Yasası (KGY) denklemlerinin açık olmayan bir biçimde devre şeması üzerine yazılmasını ve böylece yalnız **Kirchhoff Akım Yasası (KAY)** denklemlerinin çözülmesini gerektiren bir yöntemdir.

Bu yöntemde belli noktalar için gerilimler tanımlanır.

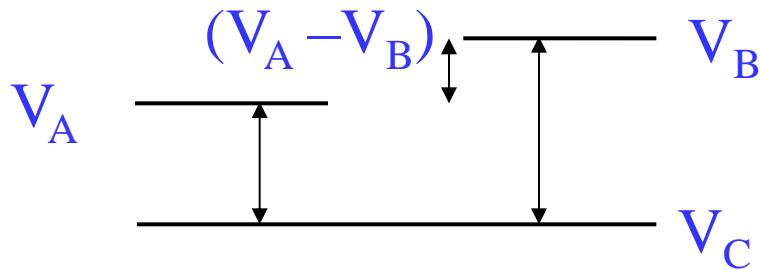


Nodal Voltage Analysis

Nodal Voltages

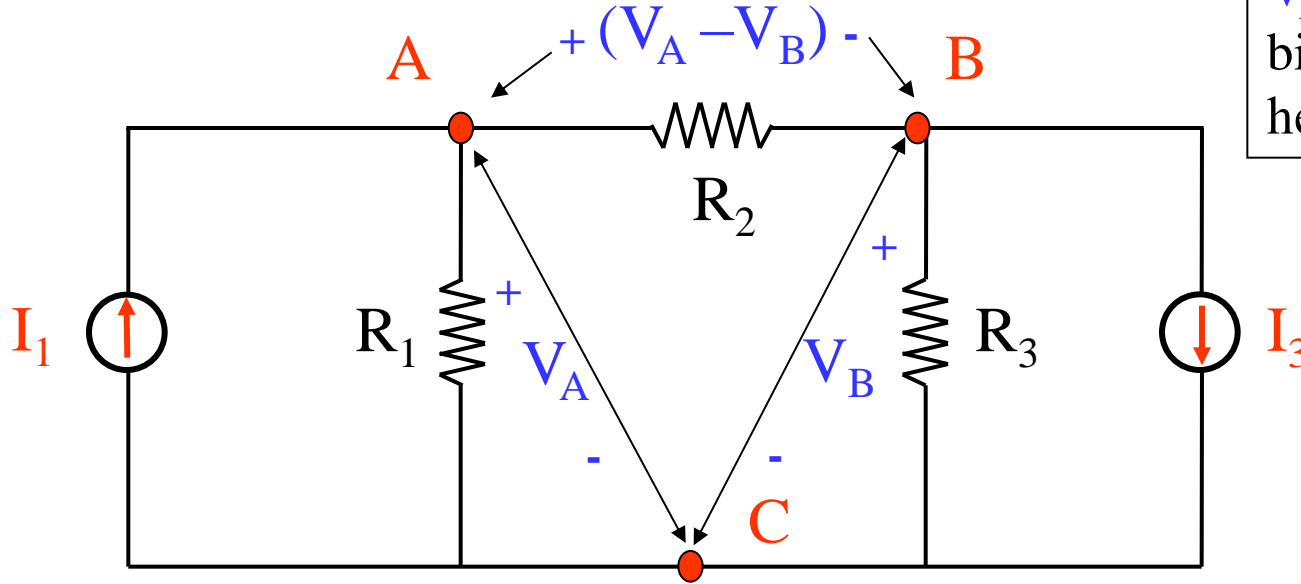


Mechanical Equivalent



Düğüm Noktası Gerilim Yöntemi

Düğüm Noktası Gerilim Yöntemi'ni anlamak için aşağıdaki örnek devreyi göz önünde bulunduralım.

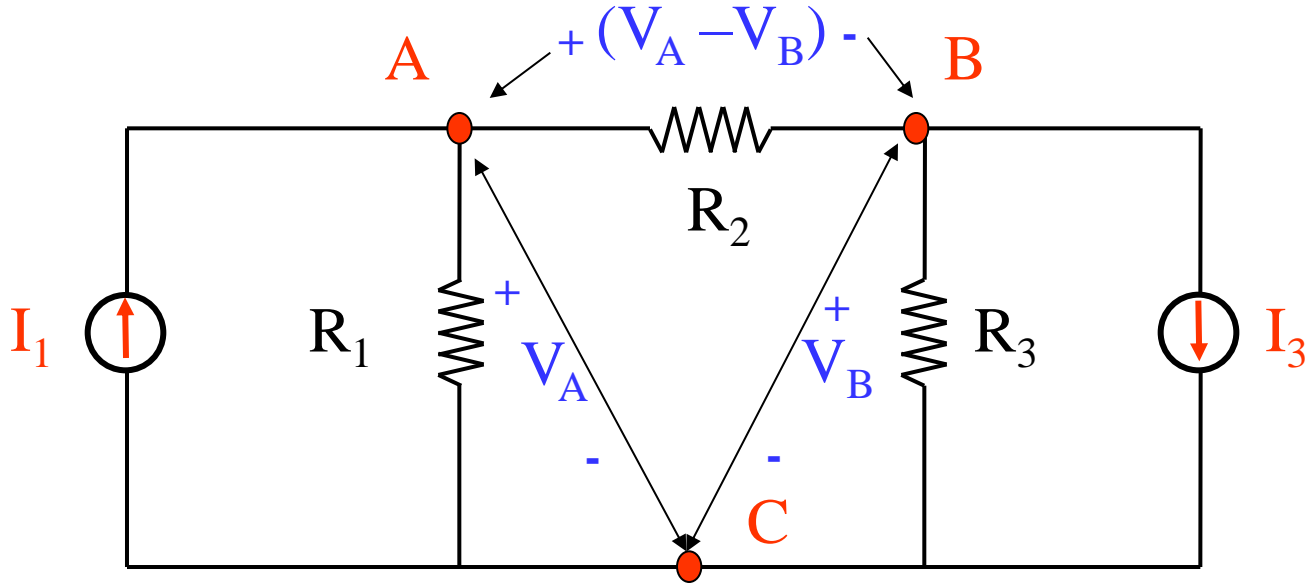


- İki bilinmeyen gerilim V_A ve V_B seçilmiştir. V_A gerilimi C düğüm noktasından A düğüm noktasına doğru bir gerilim artışı; benzer biçimde V_B , C düğüm noktasından B düğüm noktasına doğru bir gerilim artışı olarak seçilmiştir. Bilinmeyen gerilimler, C düğüm noktasından başlayarak ölçüldüğü için C noktasına referans düğüm noktası denir.

Düğüm Noktası Gerilim Yöntemi

B düğüm noktasından A düğüm noktasına doğru olan gerilim artışı devredeki bilinmeyen üçüncü gerilimdir, bu gerilim **Kirchhoff Gerilim Yasası (KGY)** denkleminde bulunur.

$$V_{AB} = V_A - V_B$$



Düğüm Noktası Gerilim Yöntemi

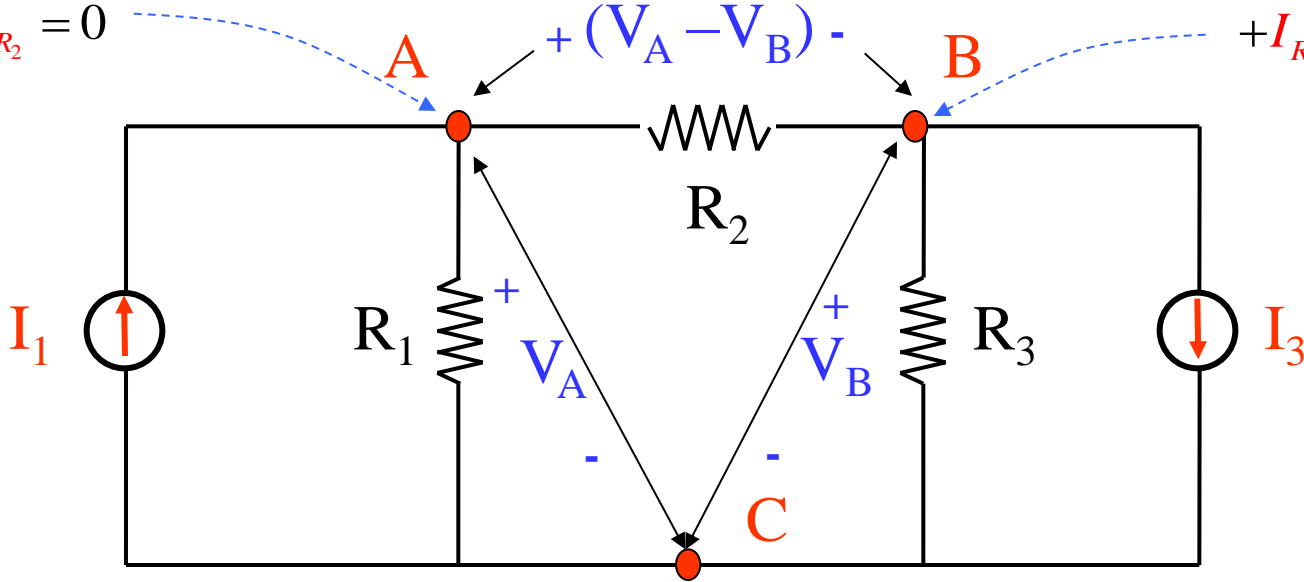
A düğüm noktası için **KAY**: $-V_A (1/R_1) - (V_A - V_B)(1/R_2) + I_1 = 0$

B düğüm noktası için **KAY**: $-V_B (1/R_3) + (V_A - V_B)(1/R_2) - I_3 = 0$

$+I_1 - I_{R_1} - I_{R_2} = 0$ $+ (V_A - V_B) -$ **B** $+I_{R_2} - I_{R_3} - I_3 = 0$

$$I_{R_1} = \frac{V_A}{R_1}$$

$$I_{R_2} = \frac{V_A - V_B}{R_2}$$



$$I_{R_2} = \frac{V_A - V_B}{R_2}$$

$$I_{R_3} = \frac{V_B}{R_3}$$

Düzenlenirse:

$$+(1/R_1 + 1/R_2)V_A - (1/R_2)V_B = I_1$$

$$-(1/R_2)V_A + (1/R_2 + 1/R_3)V_B = -I_3$$

İletkenlik $G \equiv \frac{1}{R}$ cinsinden yazılırsa:

$$+(G_1 + G_2)V_A - G_2V_B = I_1$$

$$-G_2V_A + (G_2 + G_3)V_B = -I_3$$

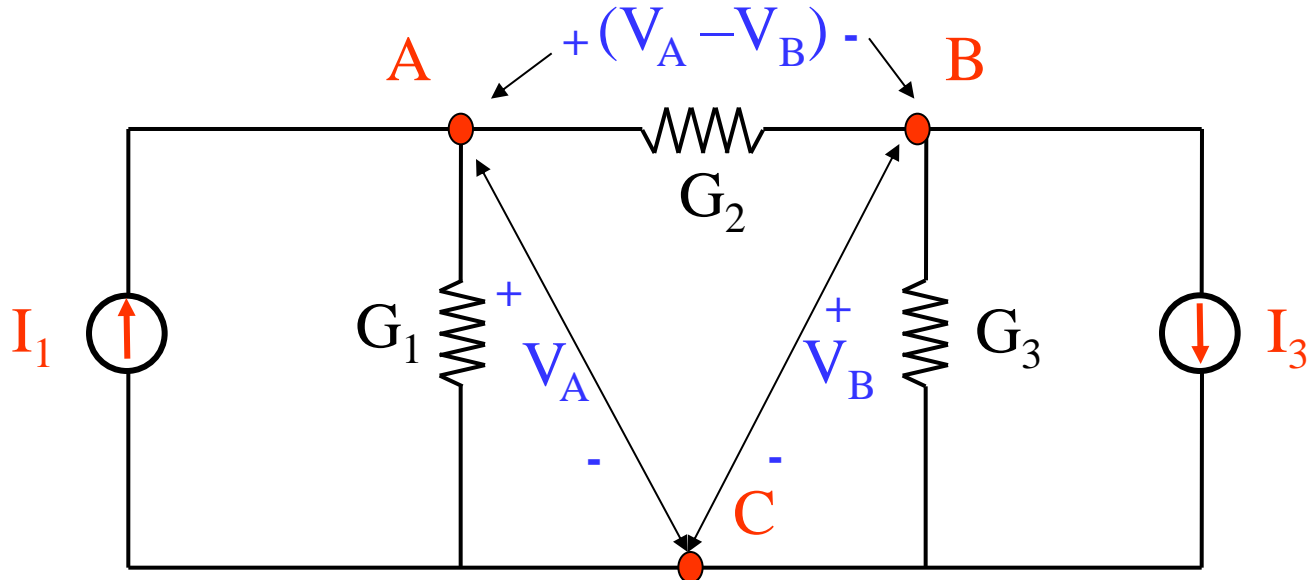
$$\text{A noktası: } +(G_1 + G_2)V_A - G_2V_B = +I_1$$

$$\text{B noktası: } -G_2V_A + (G_2 + G_3)V_B = -I_3$$

V_A 'nın katsayısı, A düğüm noktasına bağlanan iletkenlerin pozitif toplamı, V_B 'nin katsayısı A ve B düğüm noktaları arasında bağlanan iletkenlerin negatif toplamı ve eşitliğin sağ tarafı A düğüm noktasına giren akım kaynaklarının toplamıdır.

Benzer bir sistematik, B noktası için de geçerlidir.

V_B 'nin katsayısı, B düğüm noktasına bağlanan iletkenlerin pozitif toplamı, V_A 'nin katsayısı A ve B düğüm noktaları arasında bağlanan iletkenlerin negatif toplamı ve eşitliğin sağ tarafı B düğüm noktasına giren akım kaynaklarının toplamıdır.



Denklemlerdeki bu düzen, akım yasası denklemlerinden ve gerilim değişkeni seiliş biçiminden kaynaklanır. Bu kurala *Düğüm-Gerilim Yöntemi* denir.

Bu yöntemeye göre yapılacak işler sırası ile:

- 1. Adım:** Devredeki seri dirençli ideal gerilim kaynakları ile gösterilen her kaynak paralel iletkenlikli akım kaynağı gösterimine dönüştürülmeli ve devre yeni gösterime göre yeniden çizilmelidir.
- 2. Adım:** Keyfi bir referans düğüm noktası seçilir, bu nokta R (eferans) olsun. Devredeki öteki düğüm noktalarına A, B, ..., N harfleri verilir ve bilinmeyen gerilimler V_A, V_B, \dots, V_N , R noktasından A, B vs. noktalarına doğru gerilim artışları olarak seçilirler.

3. Adım: Düğüm noktası (akım-yasası) denklemleri sırasıyla A, B, ..., N düğüm noktaları için yazılırlar.

$$A: \quad +G_{AA}V_A - G_{AB}V_B - G_{AC}V_C \dots - G_{AN}V_N = I_A$$

$$B: \quad -G_{AB}V_A + G_{BB}V_B - G_{BC}V_C \dots - G_{BN}V_N = I_B$$

$$C: \quad -G_{AC}V_A - G_{BC}V_B + G_{CC}V_C \dots + G_{CN}V_N = I_C$$

.

.

$$N: \quad -G_{AN}V_A - G_{BN}V_B - G_{CN}V_C \dots + G_{NN}V_N = I_N$$

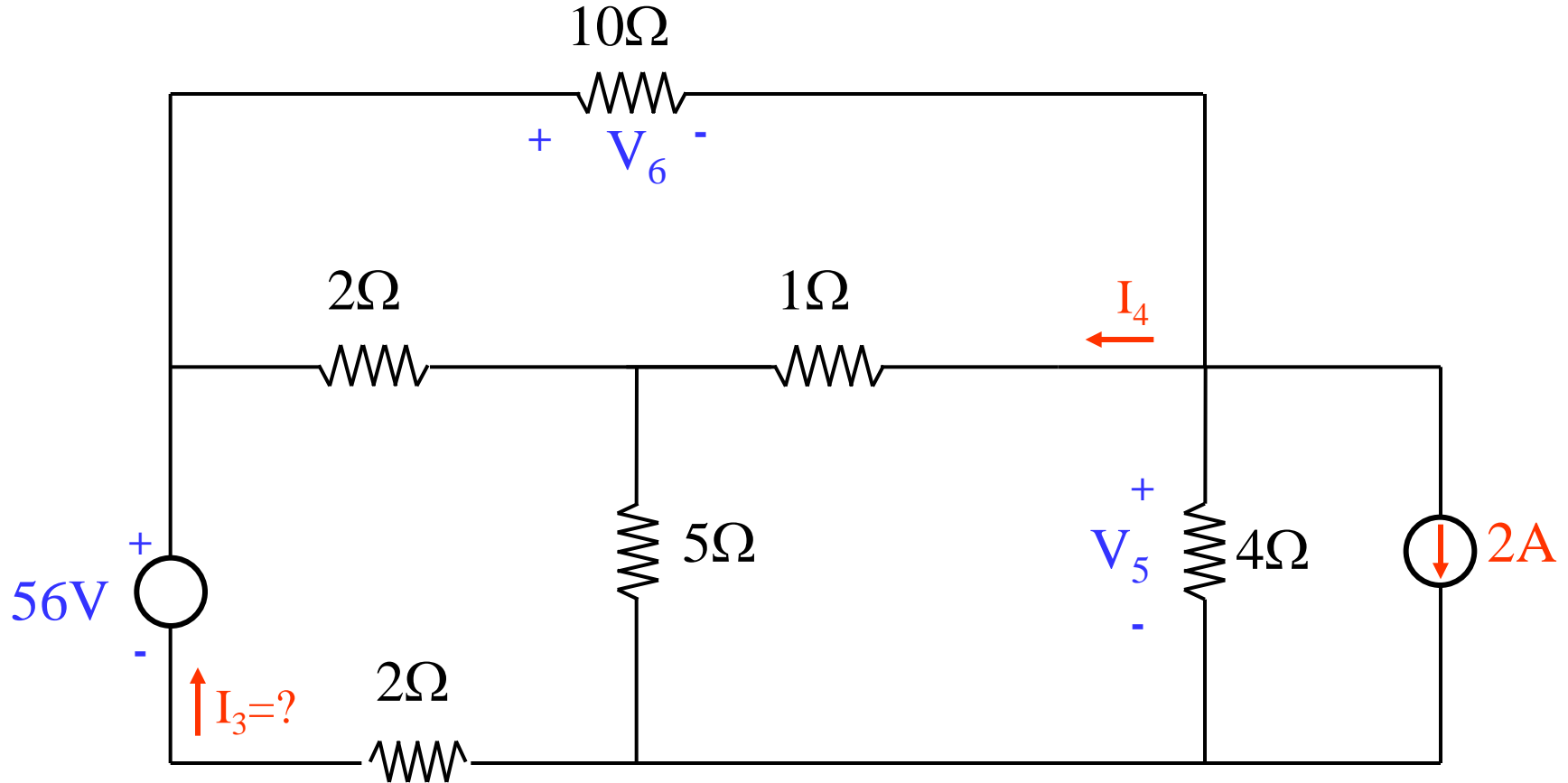
G_{XX} : X düğüm noktasına bağlanan iletkenlerin tümünün toplamı

G_{XY} : X ve Y düğüm noktaları arasında bağlanan iletkenlerin tümünün toplamı

I_X : X düğüm noktasına giren (ya da gelen) akım kaynaklarının toplamı

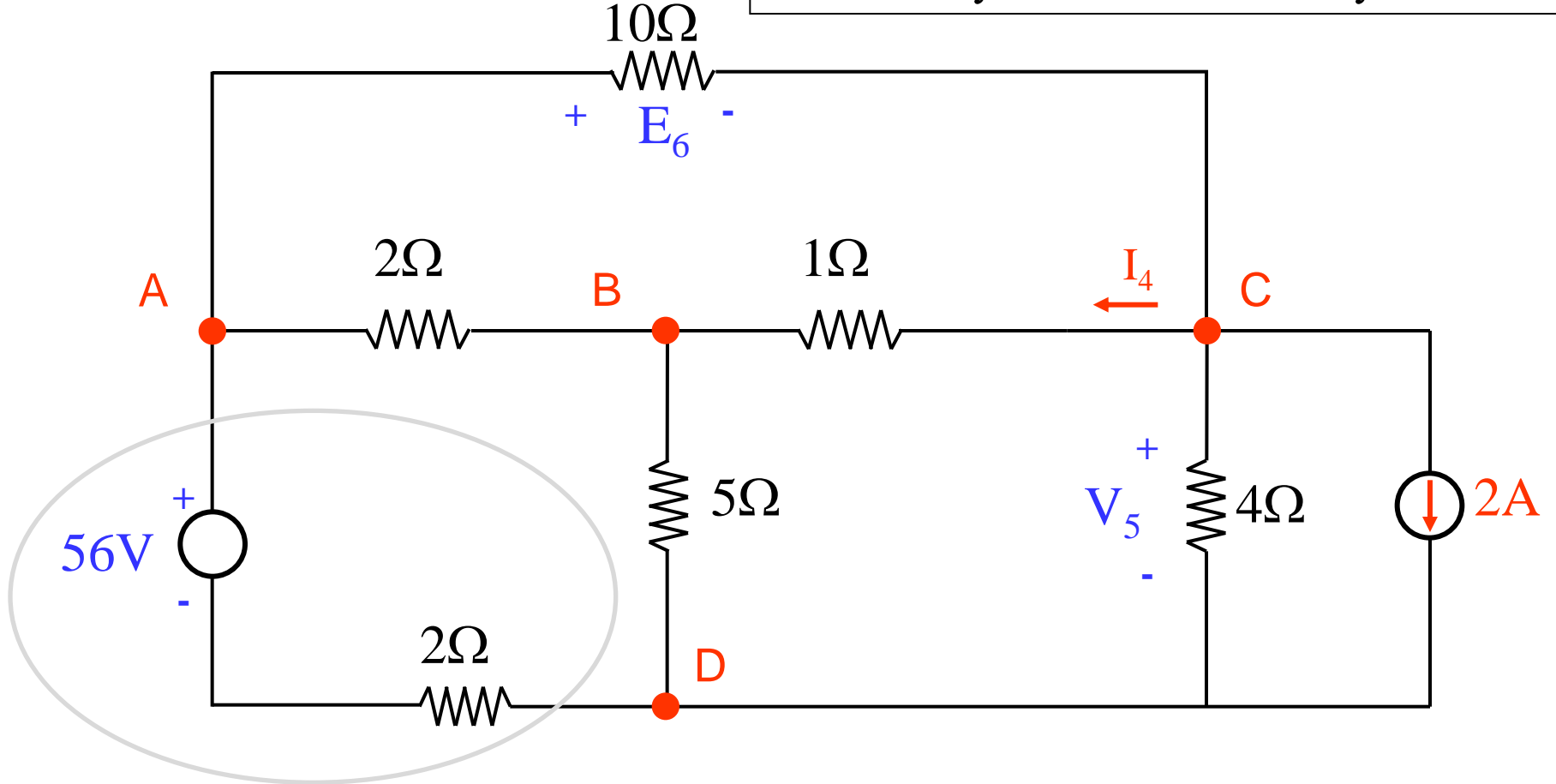
4. Adım: İstenen düğüm noktası gerilimlerini elde etmek üzere denklemler çözülür. Devredeki öteki gerilimler ve devre akımları, Kirchhoff Gerilim Yasası'nın ve Ohm Yasası'nın uygulanması ile bulunabilir. 11

Örnek 2.6: Düğüm Noktası Gerilimi Yöntemi kullanarak aşağıda verilen devredeki gerilimleri (V_5 ve V_6) bulunuz. Ayrıca I_3 akımını da hesaplayınız.



Çözüm: Önce devredeki bütün **Gerilim** kaynaklarını **Akım** kaynağına dönüştürmemiz gerekiyor.

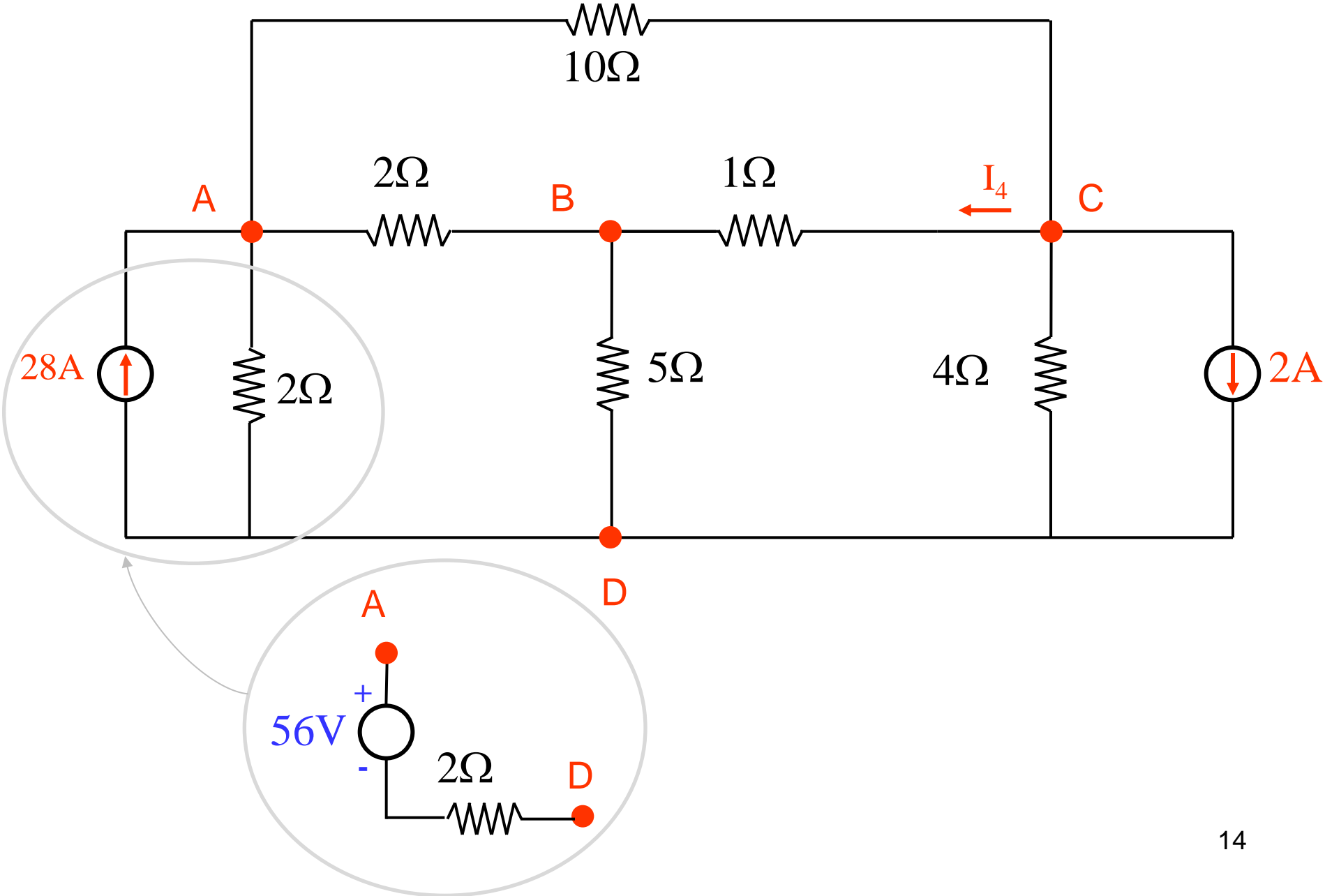
Gerilim Kaynakları => Akım Kaynaklarına



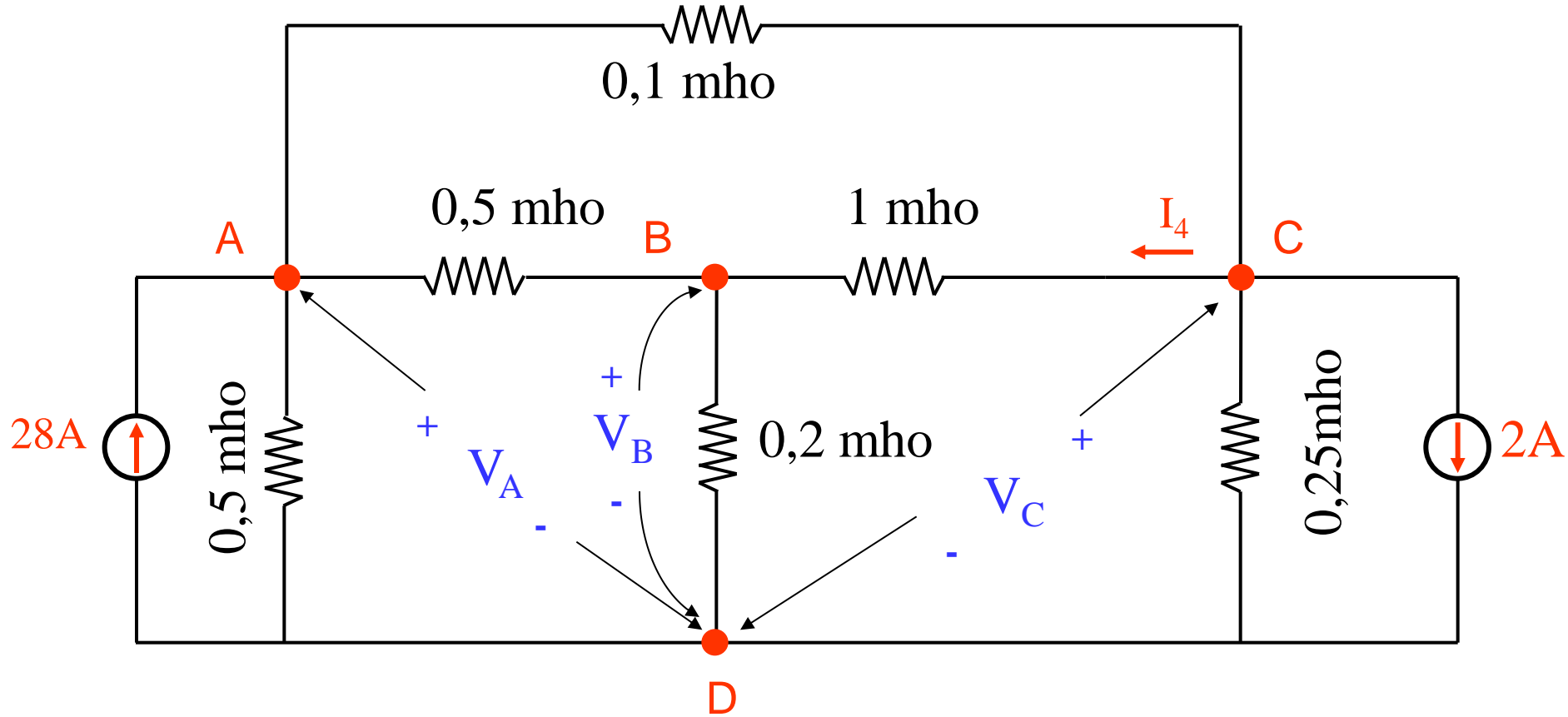
56V gerilim kaynağının eşdeğer akım kaynağını bulalım: **A** ve **D** düğüm noktaları arasına bağlanan **56V**, ve seri olan 2Ω direnci, eşdeğer bir Akım Kaynağı ve ona paralel bir dirence dönüştürerek devreyi yeniden çizmemiz gerekir.

$$I = E_o / R_o \quad R_o = 2 \Omega \quad I = 56V / 2\Omega = 28A$$

Kaynak dönüşümü yapıldıktan sonra devrenin şekli:



2. Adım: Sonraki adım olarak düğüm noktaları ve gerilimlerini (V) tanımlayalım:



Her düğüm noktası için akım ifadesi:

$$A: \quad + (\quad) V_A - (\quad) V_B - (\quad) V_C = I_A$$

$$B: \quad - (\quad) V_A + (\quad) V_B - (\quad) V_C = I_B$$

$$C: \quad - (\quad) V_A - (\quad) V_B + (\quad) V_C = I_C$$

Eşitlikler düzenlenirse:

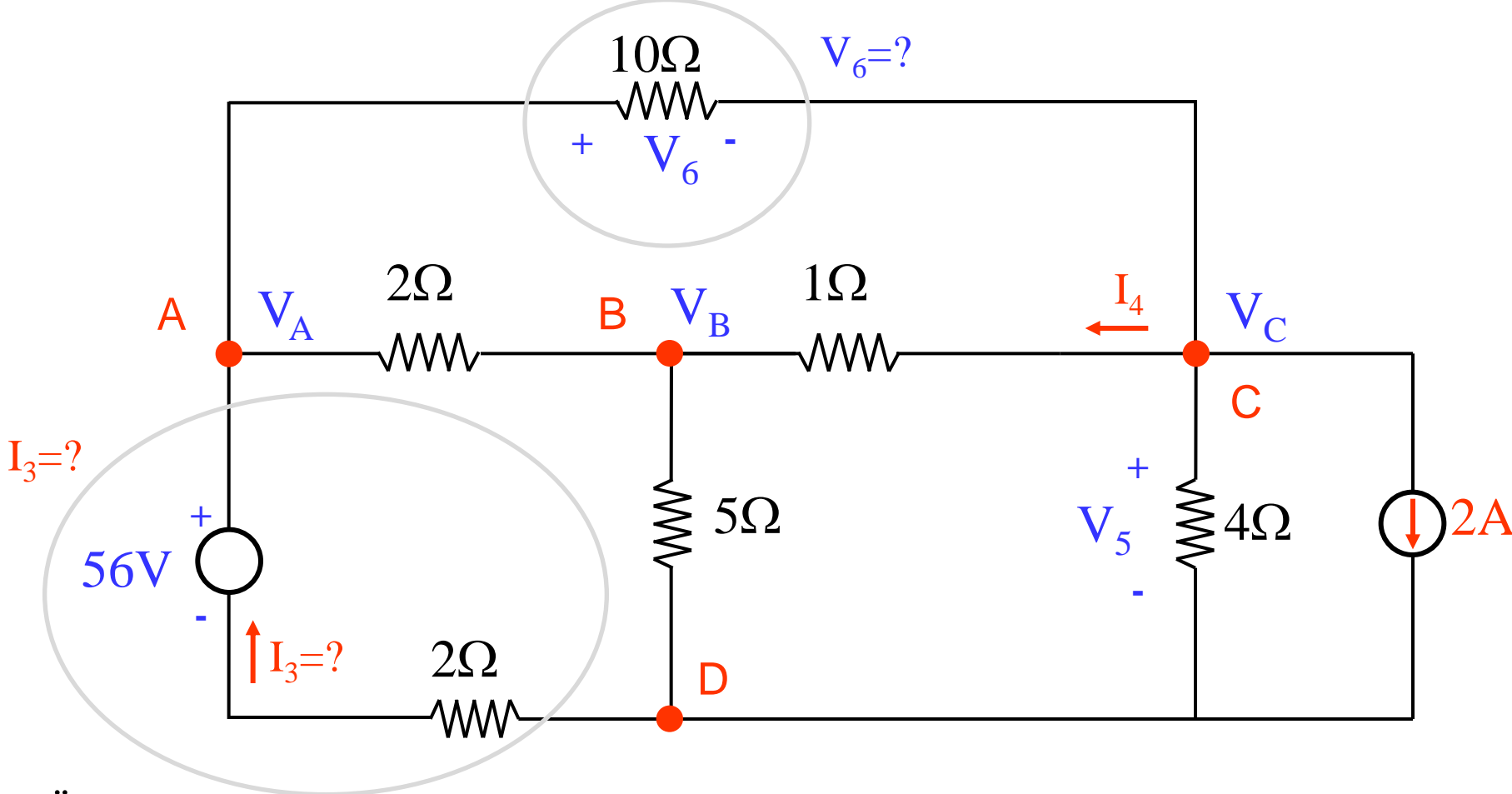
$$1,1V_A - 0,5V_B - 0,1V_C = +28$$

$$-0,5V_A + 1,7V_B - 0,1V_C = 0$$

$$0,1V_A - 1,0V_B + 1,35V_C = -2$$

Elde edilir. Bu denklem sistemi determinant yöntemi ile çözülürse:

$$V_A = 36V \quad V_B = 20V \quad V_C = 16V$$



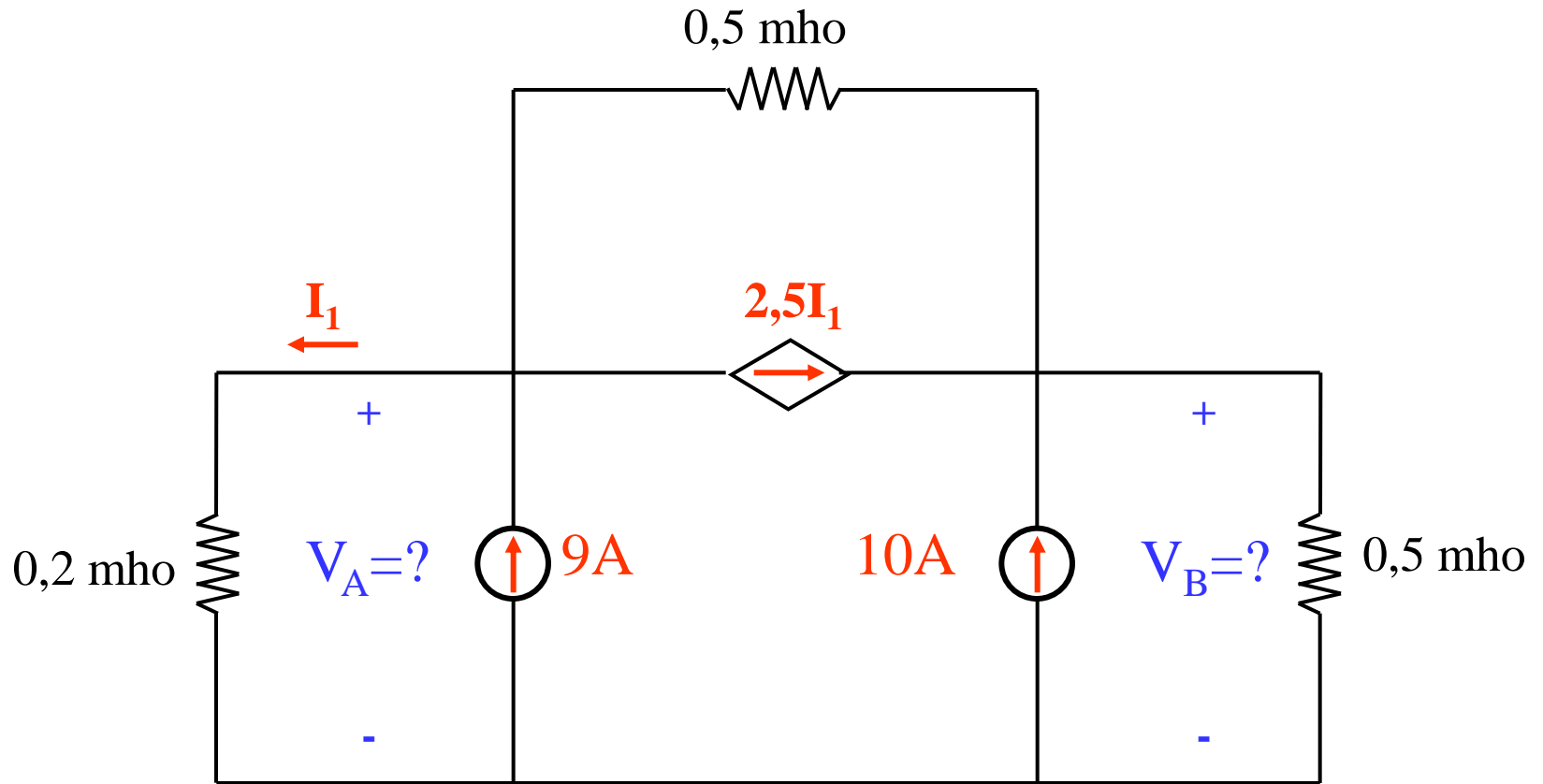
Üç düğüm noktası geriliminin bilinmesi devredeki öteki gerilimlerin ve akımların bulunmasını olanaklı kılar.

$$V_6 = V_A - V_C = 36 \text{ V} - 16 \text{ V} = 20 \text{ V}$$

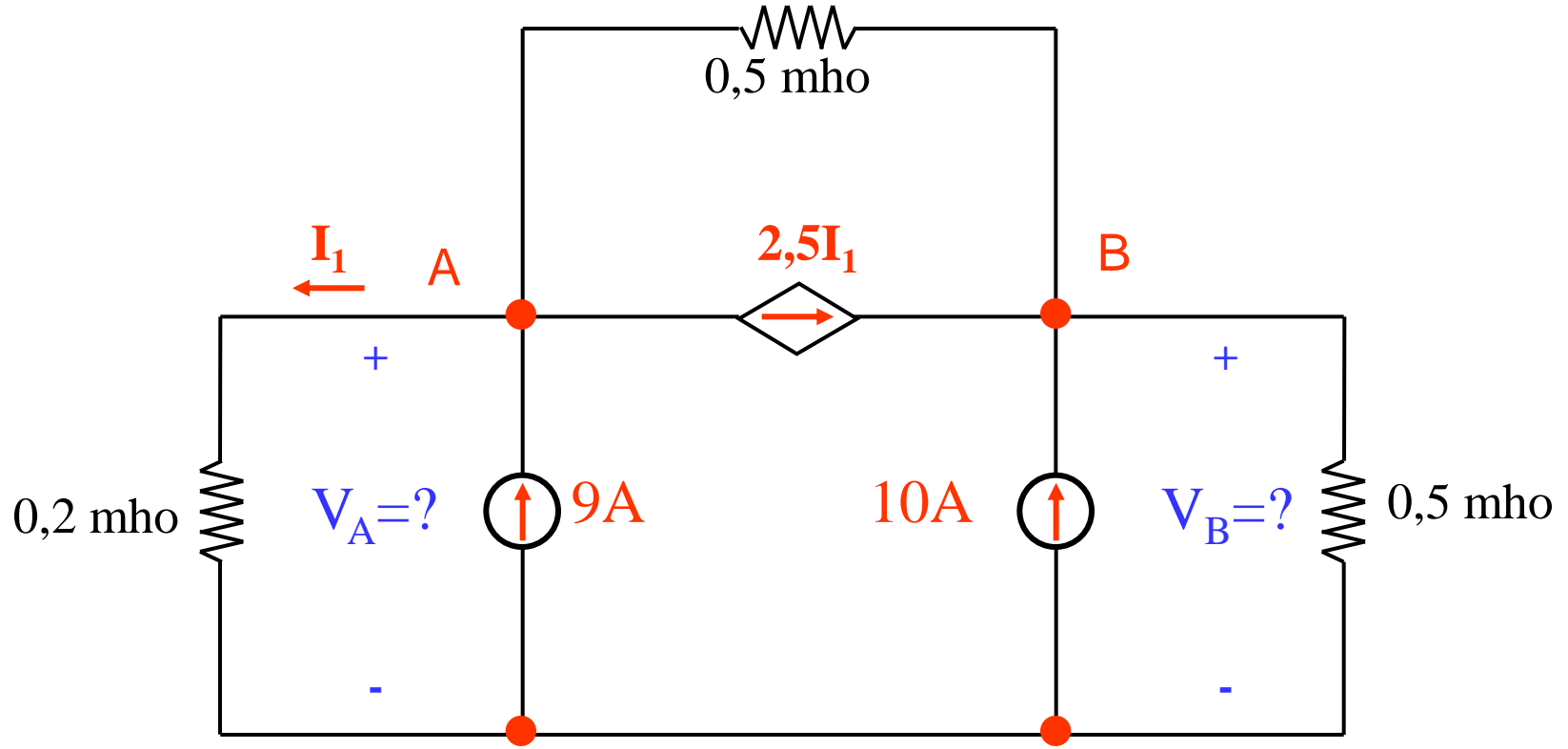
I_3 akımını, A noktasından D noktasına kadarki gerilimlerin her iki devrede de aynı olması gerektiği düşünülerek hesaplanabilir.

$$56 \text{ V} - (2\Omega)I_3 = V_A = 36 \text{ V} \Rightarrow I_3 = 10 \text{ A}$$

Örnek 2.8: Aşağıdaki devrede V_A ve V_B gerilimlerini bulunuz.



Çözüm: Düğüm Noktası Gerilimi kullanılacaktır. Bağımlı kaynak önce bağımsız kaynak gibi düşünerek KAY denklemleri yazılacak



A düğüm noktası $(0,2 + 0,5)V_A - 0,5V_B = 9 - 2,5I_1$

B düğüm noktası $-0,5V_A + (0,5 + 0,5)V_B = 10 + 2,5I_1$

Bağımlı kaynak için **bağlayıcı** denklem: $I_1 = 0,2V_A$

Eşitlikler düzenlenirse:

$$1,2V_A - 0,5V_B = 9$$

$$0,5V_A - 1,0V_B = 10$$

Denklemlerin ortak çözümünden:

$$V_A = 20 \text{ V}$$

$$V_B = 30 \text{ V}$$

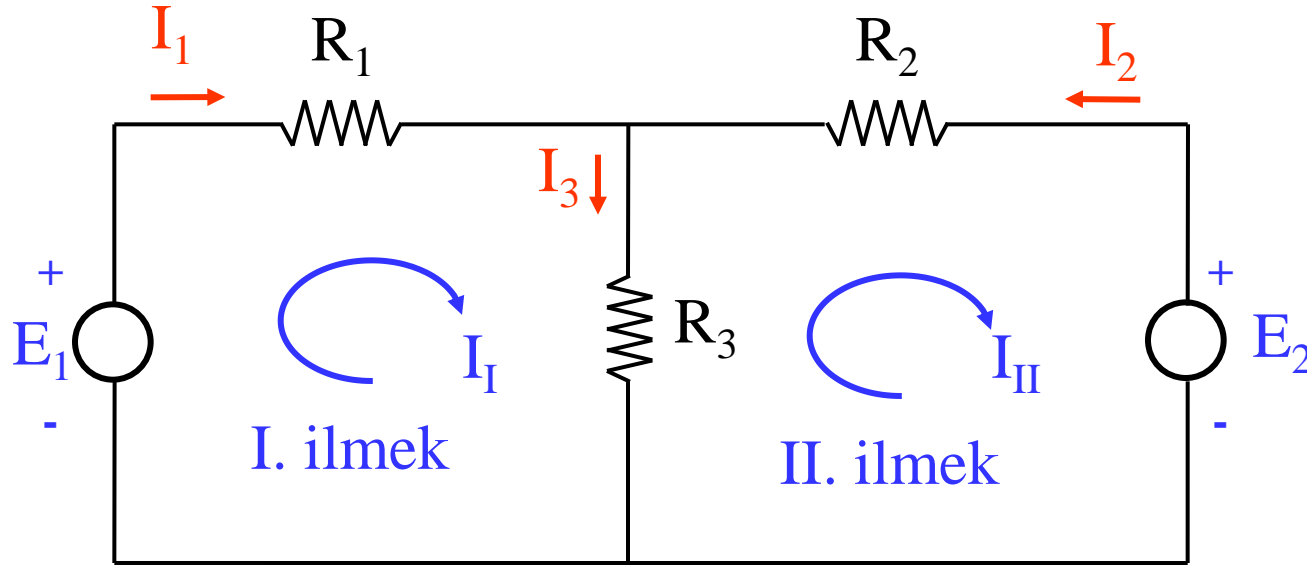
bulunur.

İlmek Akım Yöntemi

Devre çözümünde *İlmek Akım Yöntemi*, Kirchhoff Akım Yasası (KAY) denklemlerinin açık olmayan bir biçimde devre şeması üzerine yazılmasını ve böylece yalnız Kirchhoff Gerilim Yasası (KGY) denklemlerinin çözülmesini gerektiren bir yöntemdir. Bu yöntemde ilmeklerdeki akımlar tanımlanır.

İlmek Akım Yöntemi

Bu yöntemde ilmeklerde dolanan akımlar seçilir (ilmek akımları). Bu yöntemi anlamak için aşağıdaki devreyi kullanalım.



Notasyon:

İlmek akımları

Roma rakamları alt indisi ile (I_{III});

kollardaki akımlar

ise normal rakam alt indisleri (I_3) ile

gösterilecektir.

- **İlmek Akımı Yöntemi**'nde, devredeki ilmeklerde bilinmeyen akımların varlığı düşünülür. (Düğüm noktası gerilim yönteminde de bilinmeyen gerilim V_A ve V_B seçilmişti). I. ilmekteki I_I akımı ilmeği oluşturan tüm öğelerde (R_1 ve R_3 ve E_1) bulunmaktadır. benzer biçimde I_{II} akımı, II. ilmeği oluşturan tüm öğelerde (R_2 , R_3 ve E_2) vardır.

İlmek Akım Yöntemi

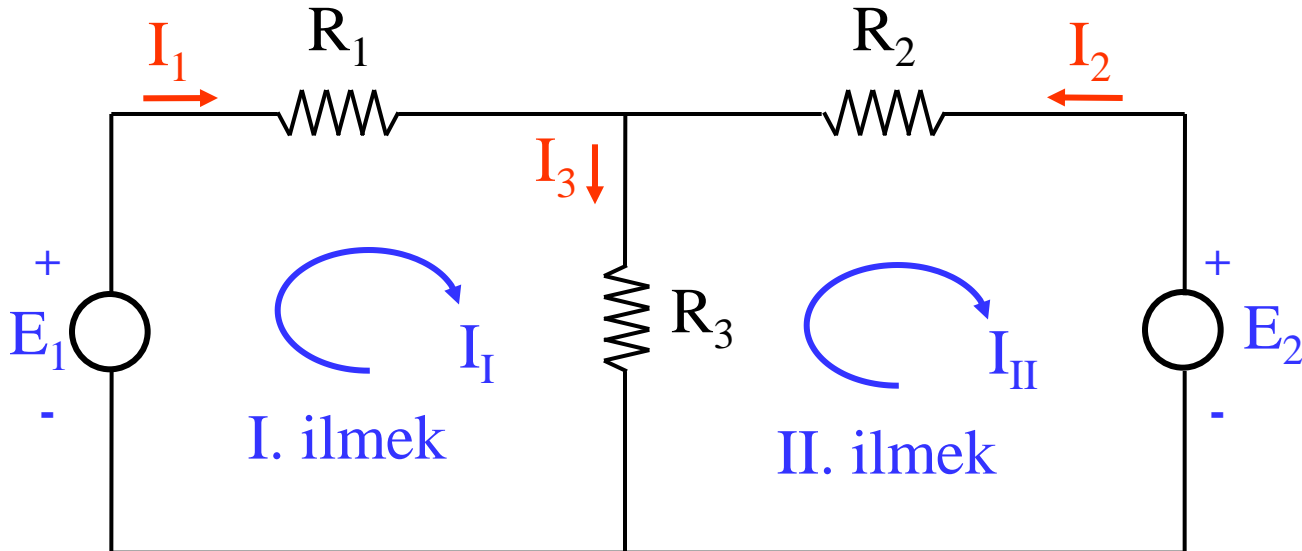
- İlmek Akımı Yönteminde, **tüm akımlar aynı yönde seçilir** (Burada saat yönü alınmıştır). Akımların aynı yönde seçilmesi elde edilen denklemlerin bir matris biçiminde kolayca yazılabilesine olanak sağlar.
- İkinci özellik ilmek akımları daha önce kullanılan öge akımları cinsinden kolayca ifade edilebilirler, örneğin

$$I_1 = I_I, \quad I_2 = -I_{II} \quad \text{ve} \quad I_3 = I_I - I_{II}$$

Eğer **Kirchhoff Gerilim Yasası (KGY)** denklemleri I ve II ilmeklerin çevresinde yazılırsa

$$-R_1 I_I - R_3 (I_I - I_{II}) + E_1 = 0 \quad \text{I. İlmek}$$

$$+R_3 (I_I - I_{II}) - R_2 I_{II} - E_2 = 0 \quad \text{II. İlmek}$$



İlmek Akım Yöntemi

Denklemler yeniden düzenlenirse:

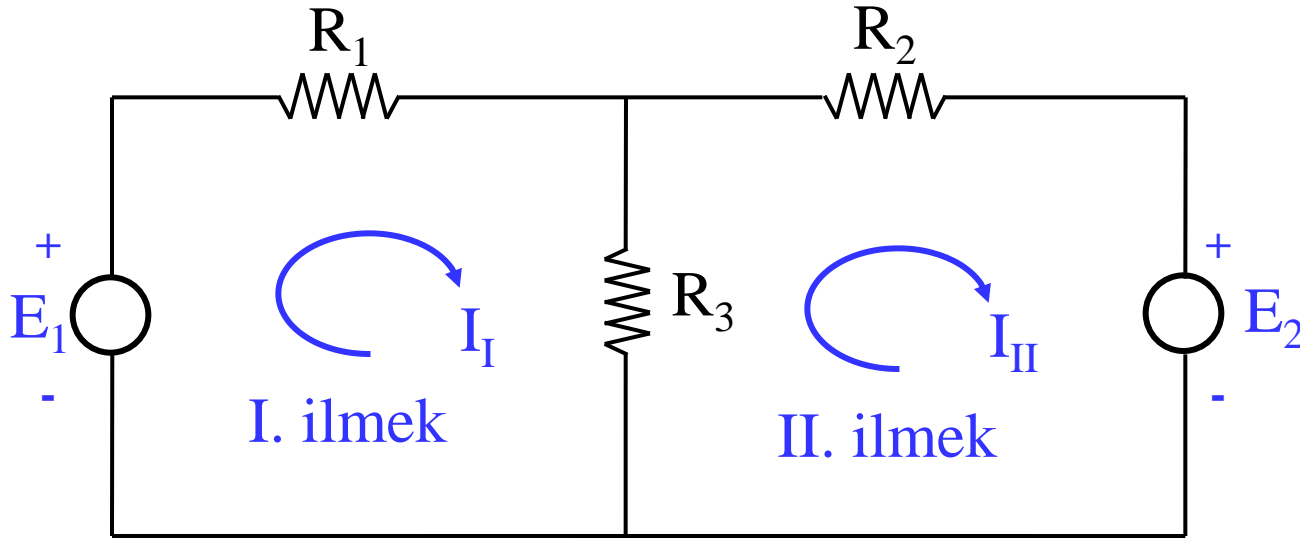
$$\text{I. İlmek} \quad +(R_1 + R_3)I_I - R_3I_{II} = E_1$$

$$\text{II. İlmek} \quad -R_3I_I + (R_2 + R_3)I_{II} = -E_2$$

Düğüm Noktası Gerilim Yöntemi:

$$+(G_1 + G_2)V_A - G_2V_B = +I_1$$

$$-G_2V_A + (G_2 + G_3)V_B = -I_3$$



Yukarıdaki denklemler, düğüm noktası gerilimi yöntemine göre yazılan denklemler gibi benzer bir düzen gösterirler. I. ilmek çevresinde yazılan I_I akımının katsayısı, I. ilmeği oluşturan dirençlerin pozitif toplamı, ikinci ilmek akımını I_{II} 'nin katsayısı ise 1. ve 2. ilmeklerinin ortak dirençlerinin negatif toplamı ve denklemin sağ tarafı devrede saat yönünde alınan gerilim kaynağı artışlarının toplamıdır. II. ilmek çevresinde yazılan denklem için benzer yorumlar yapılabilir.

Denklemlerdeki bu düzen gerilim yasası denklemlerinden ve akım değişkeni seiliş biçiminden kaynaklanır. Bu kurala **İlmek Akımı Yöntemi** denir.

Bu yönteme göre yapılacak işler sırası ile

- 1. Adım:** Devredeki paralel dirençli ideal akım kaynakları ile gösterilen her kaynak seri bağlı ideal gerilim kaynağı gösterimine dönüştürülmeli ve devre yeni gösterime göre yeniden çizilmelidir.
- 2. Adım:** İlmek seçimi, seçilen bir ilmek içerisinde başka bir ilmek bulunmayacak biçimde yapılır ve ilmek akımları saat yönünde seçilir. Bu seçim öğe akımlarının elde edilmesini sağlar, bu akımlar ya ilmek akımları ya da iki ilmek akımı arasındaki cebirsel farktan oluşur.

3. Adım: İlmek (gerilim-yasası) denklemleri sırasıyla I, II, III, ..., N ilmekleri için yazılırsa

$$I : \quad + R_{I,I} I_I - R_{I,II} I_{II} - \dots - R_{I,N} I_N = E_I$$

$$II : \quad - R_{I,II} I_I + R_{II,II} I_{II} - \dots - R_{II,N} I_N = E_{II}$$

.

.

$$N : \quad - R_{I,N} I_I - R_{II,N} I_{II} - \dots + R_{N,N} I_N = E_N$$

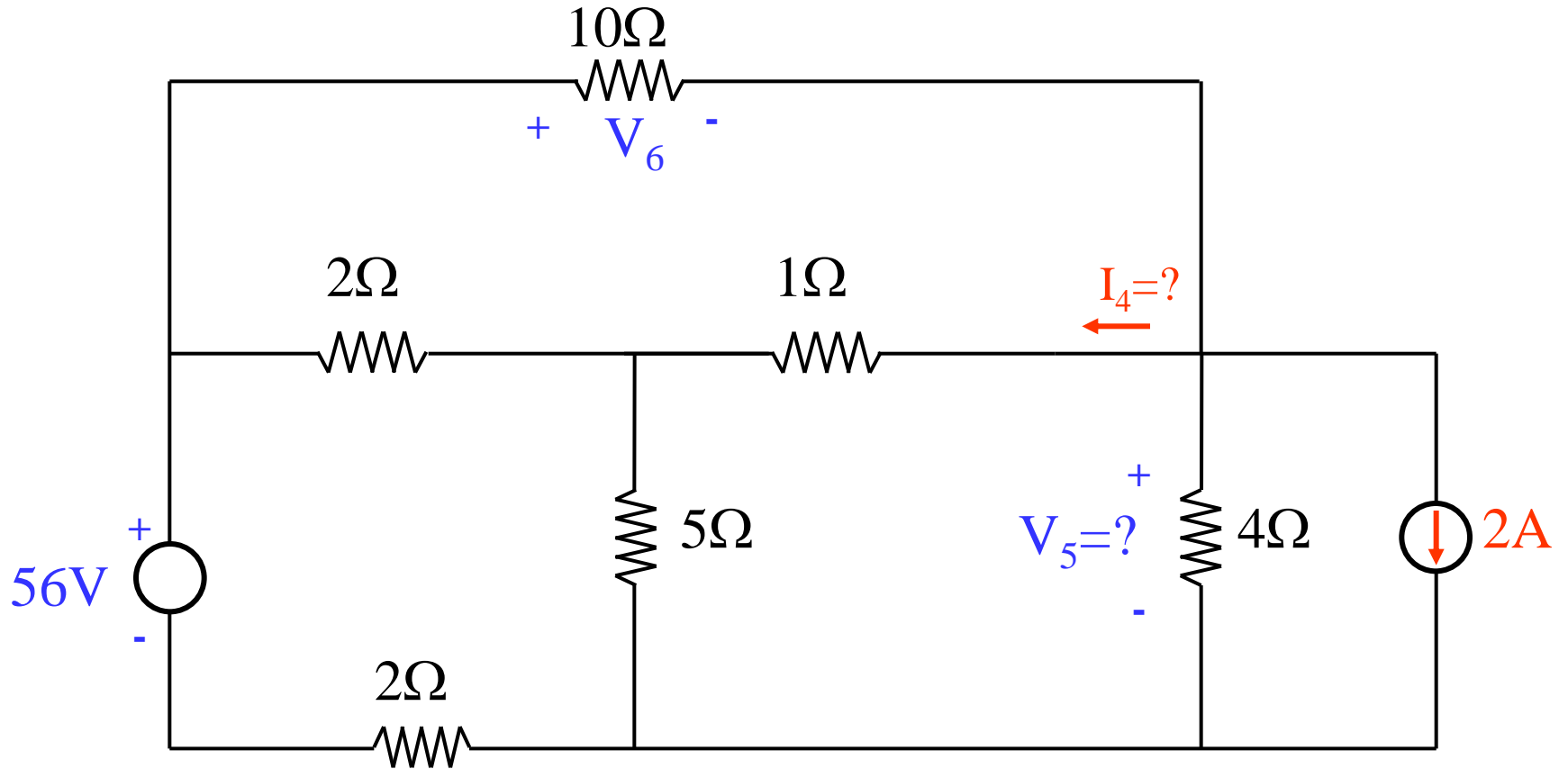
R_{XX} : X ilmeğini oluşturan tüm dirençlerin toplamı

R_{XY} : X ve Y ilmeklerinin her ikisine de ortak olan tüm dirençlerin toplamı

E_X : Saat yönünde alındığında X ilmeğindeki kaynak gerilimi artışlarının toplamı

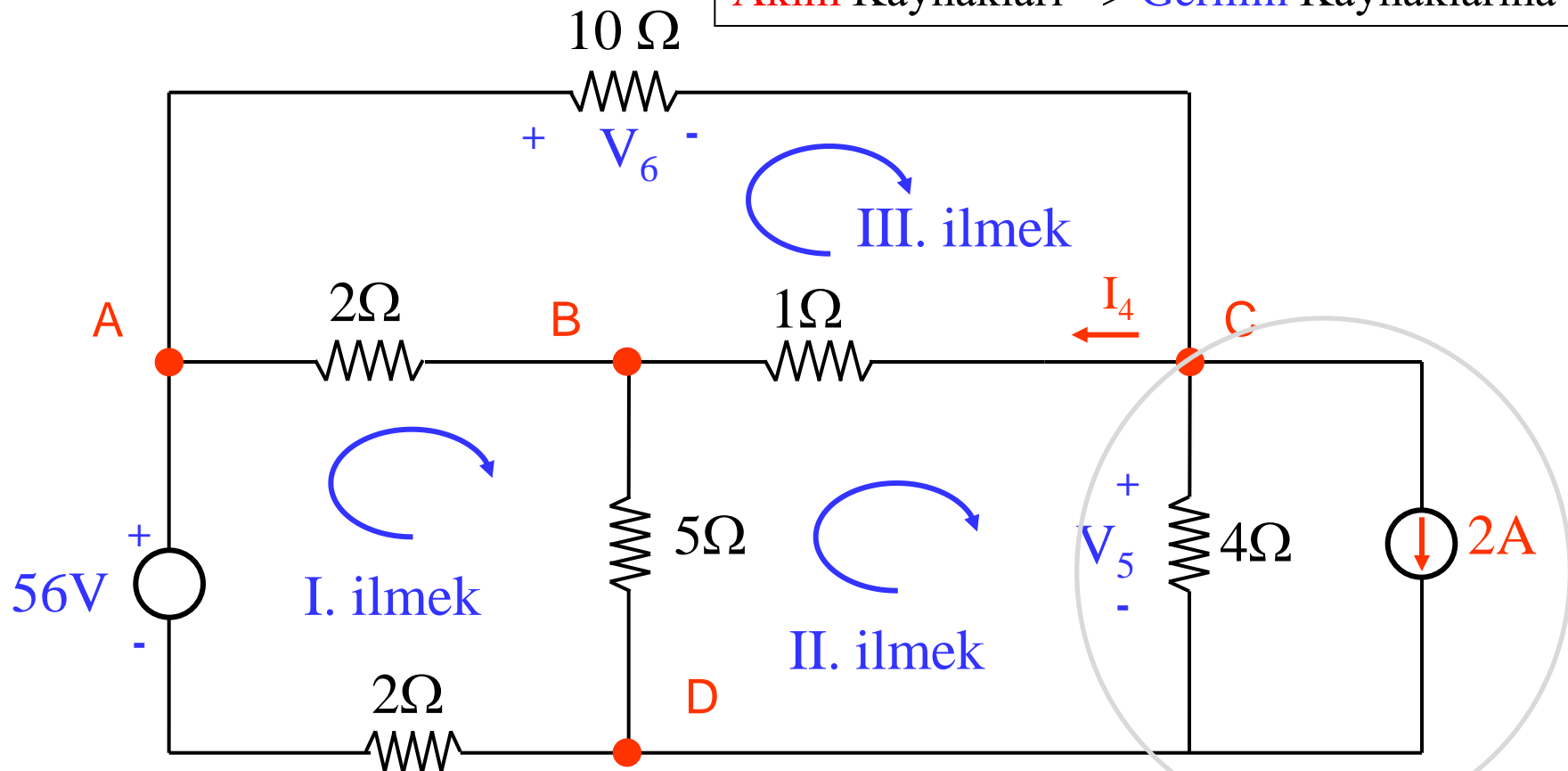
4. Adım: İstenen ilmek akımları denklemlerin ortak çözümünden bulunur. Devredeki öteki akımlar ve devre gerilimleri, Kirchhoff akım yasasının ve Ohm yasasının uygulanması ile bulunabilir.

Örnek 2.7: İlmek Akım Yöntemi kullanarak aşağıda verilen devredeki akımları (ilmek akımlarını ve 1Ω direnç kolundaki I_4 akımını) bulunuz. Ayrıca V_5 gerilimini de hesaplayınız.



Çözüm: Önce devredeki bütün akım kaynaklarını gerilim kaynağına dönüştürmemiz gerekiyor.

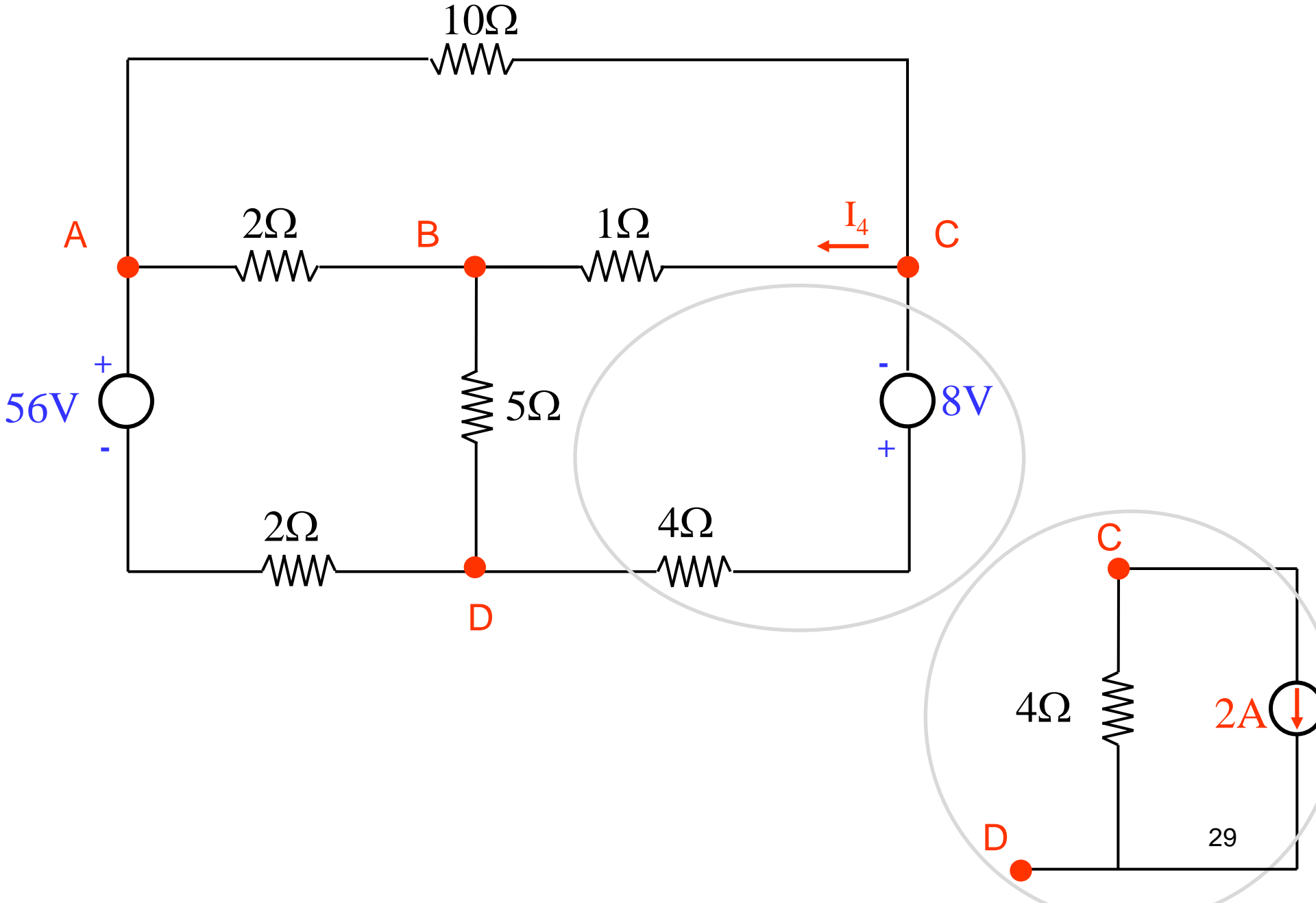
Akım Kaynakları => Gerilim Kaynaklarına



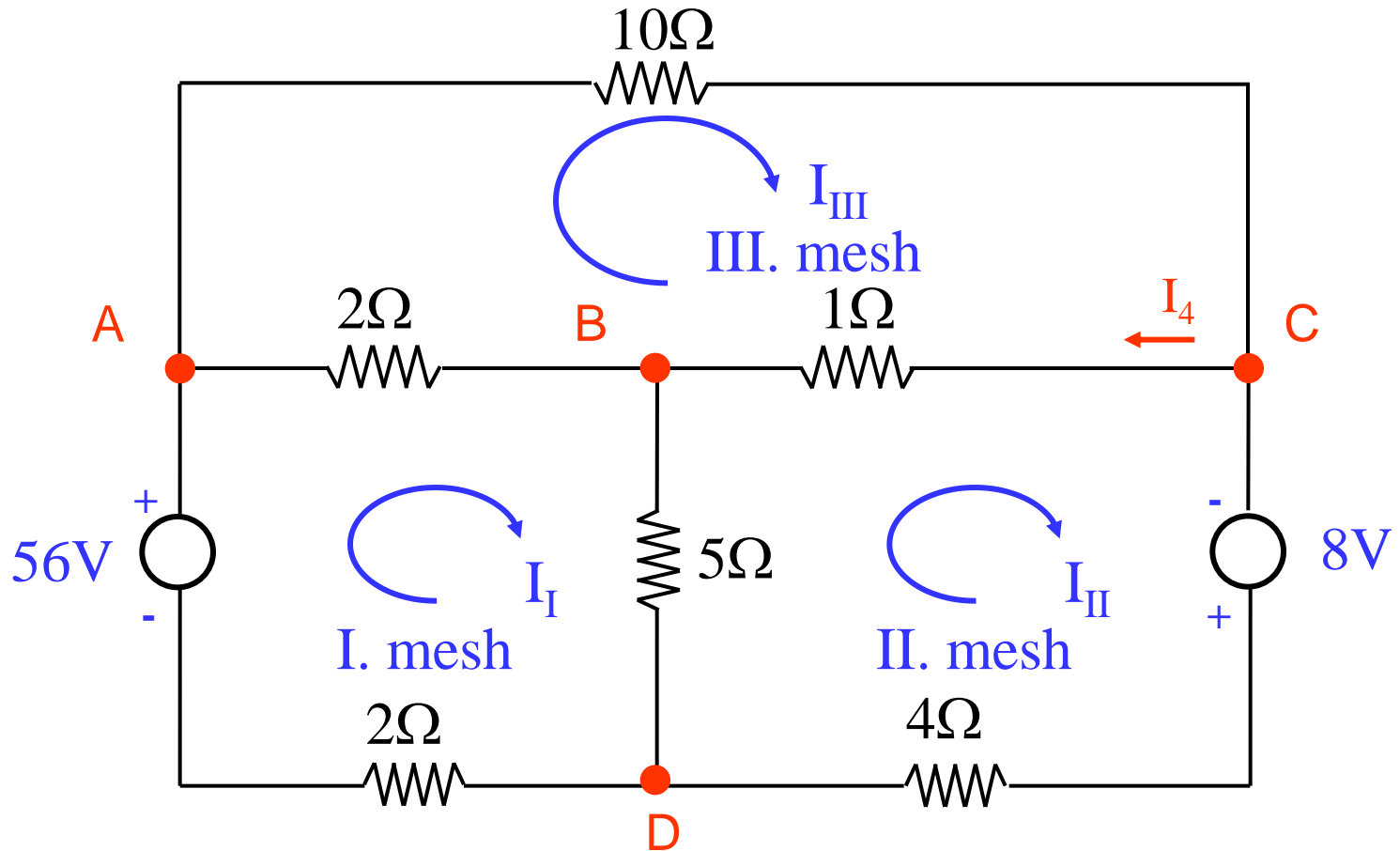
2A akım kaynağının eşdeğer gerilim kaynağını bulalım: C ve D düğüm noktaları arasına bağlanan 2A, ve paralel olan 4Ω direnci, bir Gerilim Kaynağı ve ona seri bağlı bir dirence dönüştürerek devreyi yeniden çizmemiz gerekir.

$$E_o = R_o I \quad R_o = 4 \Omega \quad E_o = (4\Omega)(2A) = 8V$$

Kaynak dönüşümü yapıldıktan sonra devrenin şekli:



Next step is to define mesh currents (\mathbf{I}) :



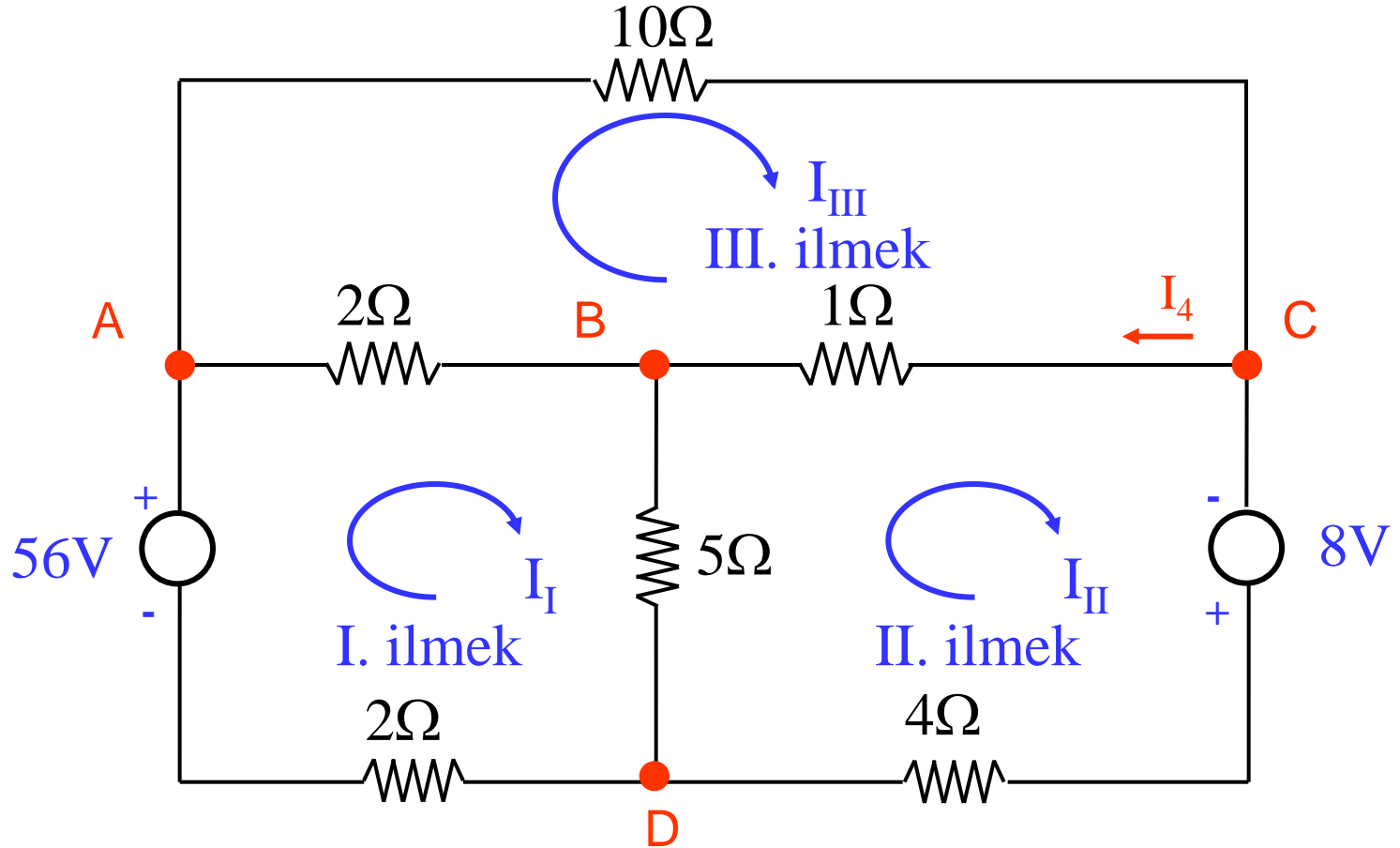
Kirchhoff's Voltage Law (KVL) for each mesh:

$$I : \quad +(\quad)I_I - (\quad)I_{II} - (\quad)I_{III} = E_I$$

$$II : \quad -(\quad)I_I + (\quad)I_{II} - (\quad)I_{III} = E_{II}$$

$$III : \quad -(\quad)I_I - (\quad)I_{II} + (\quad)I_{III} = E_{III}$$

Sonraki adım olarak ilmekleri ve ilmek akımlarını (I) tanımlayalım:



Kirchhoff Gerilim Yasası (KGY) eşitlikleri

$$I: + (2 + 5 + 2)I_I - (5)I_{II} - (2)I_{III} = 56V$$

$$II: -(5)I_I + (5 + 1 + 4)I_{II} - (1)I_{III} = 8V$$

$$III: -(2)I_I - (1)I_{II} + (2 + 1 + 10)I_{III} = 0$$

Eşitlikler düzenlenirse:

$$I : \quad 9I_I - 5I_{II} - 2I_{III} = 56$$

$$II : \quad -5I_I + 10I_{II} - I_{III} = 8$$

$$III : \quad -2I_I - I_{II} + 13I_{III} = 0$$

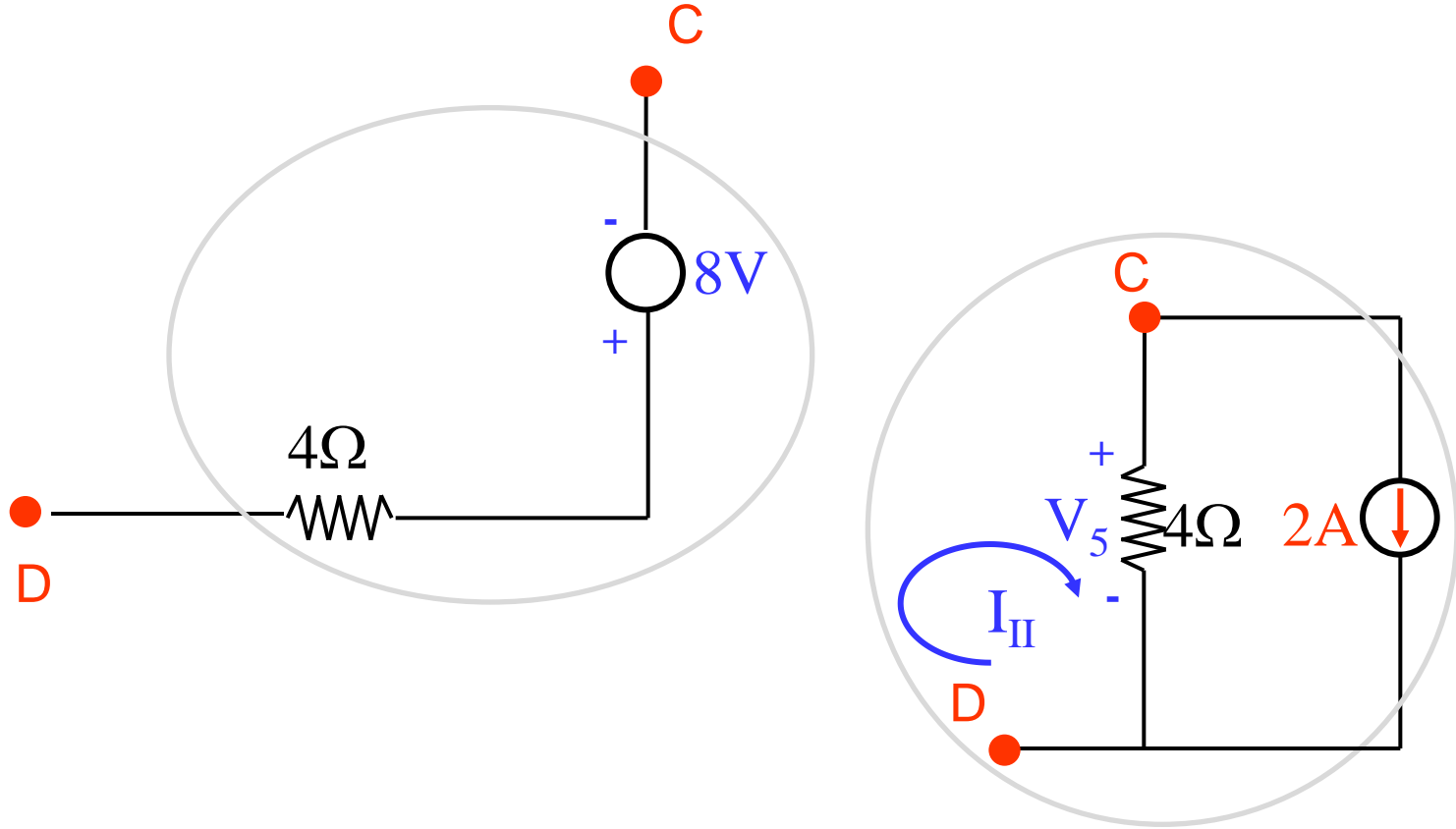
Bu üç denklemin ortak çözümü:

$$I_I = 10 \text{ A} ; I_{II} = 6 \text{ A} ; I_{III} = 2 \text{ A}$$

Üç ilmek akımının bilinmesi devredeki öteki akımların bulunmasını olanaklı kılar.

$$I_4 = I_{III} - I_{II} = 2 \text{ A} - 6 \text{ A} = -4 \text{ A}$$

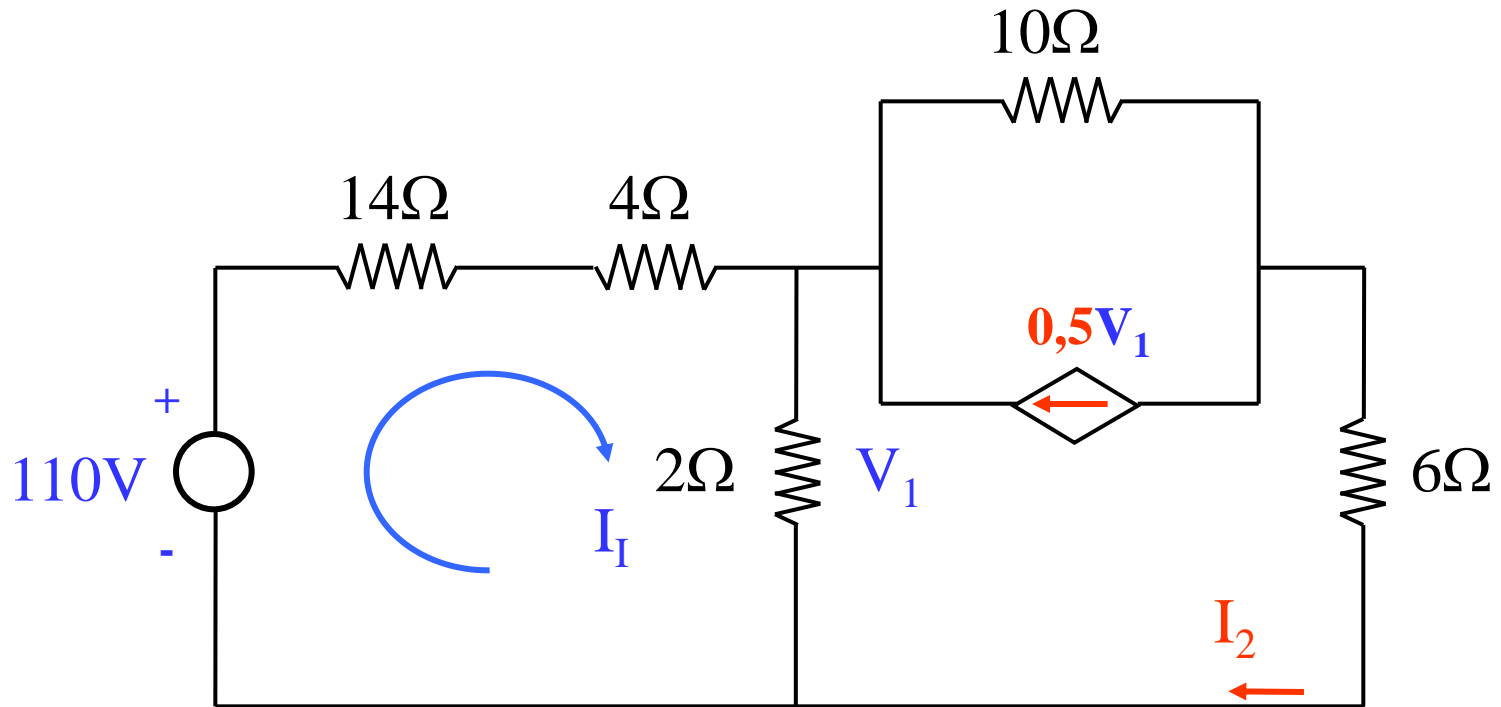
V_5 gerilimi, D düğüm noktasından C düğüm noktasına doğru ölçülen gerilim artışıdır. Bu değer:



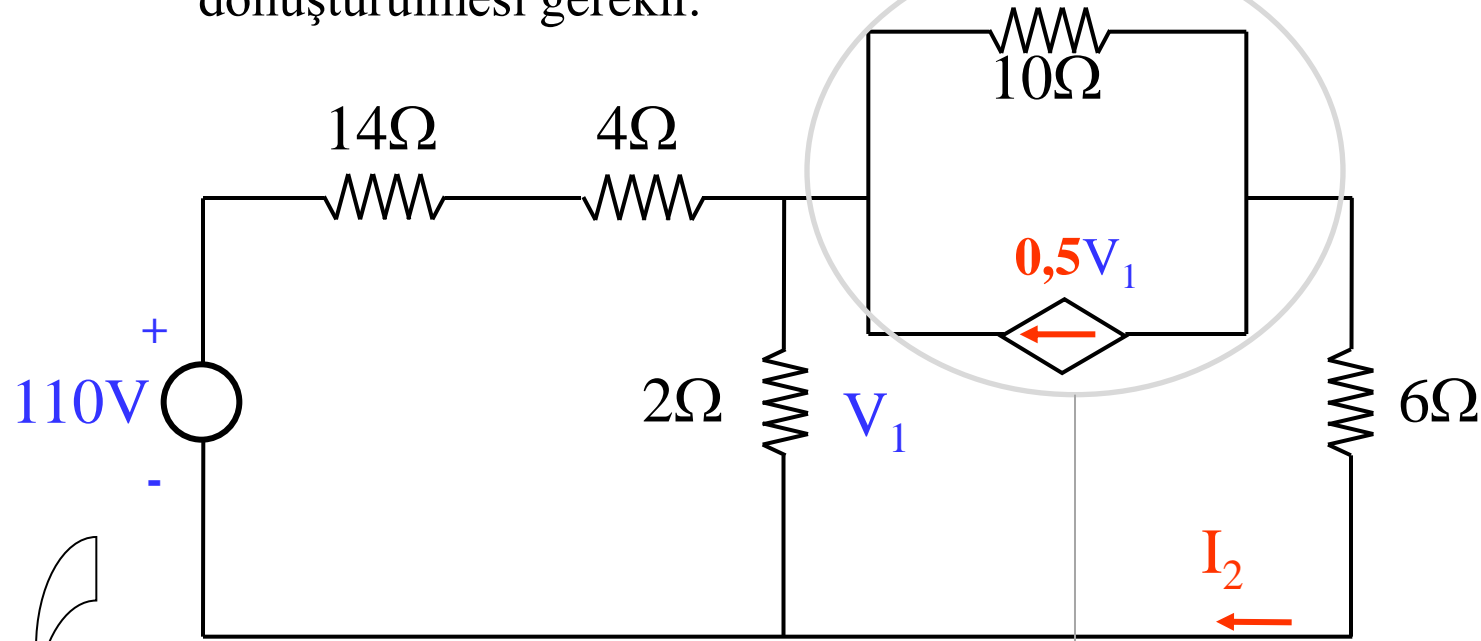
$$V_5 = (4\Omega)I_{II} - 8 = (4\Omega)(6A) - 8V = 16V$$

DC düğüm noktası arasındaki gerilim (Gerilim kaynağına dönüştükten sonra, 4 Ω luk direnç üzerindeki gerilim ve buna seri bağlı 8 V gerilim kaynağı)

Örnek 2.9: Aşağıdaki devrede I_1 ve I_2 akımlarını bulunuz.



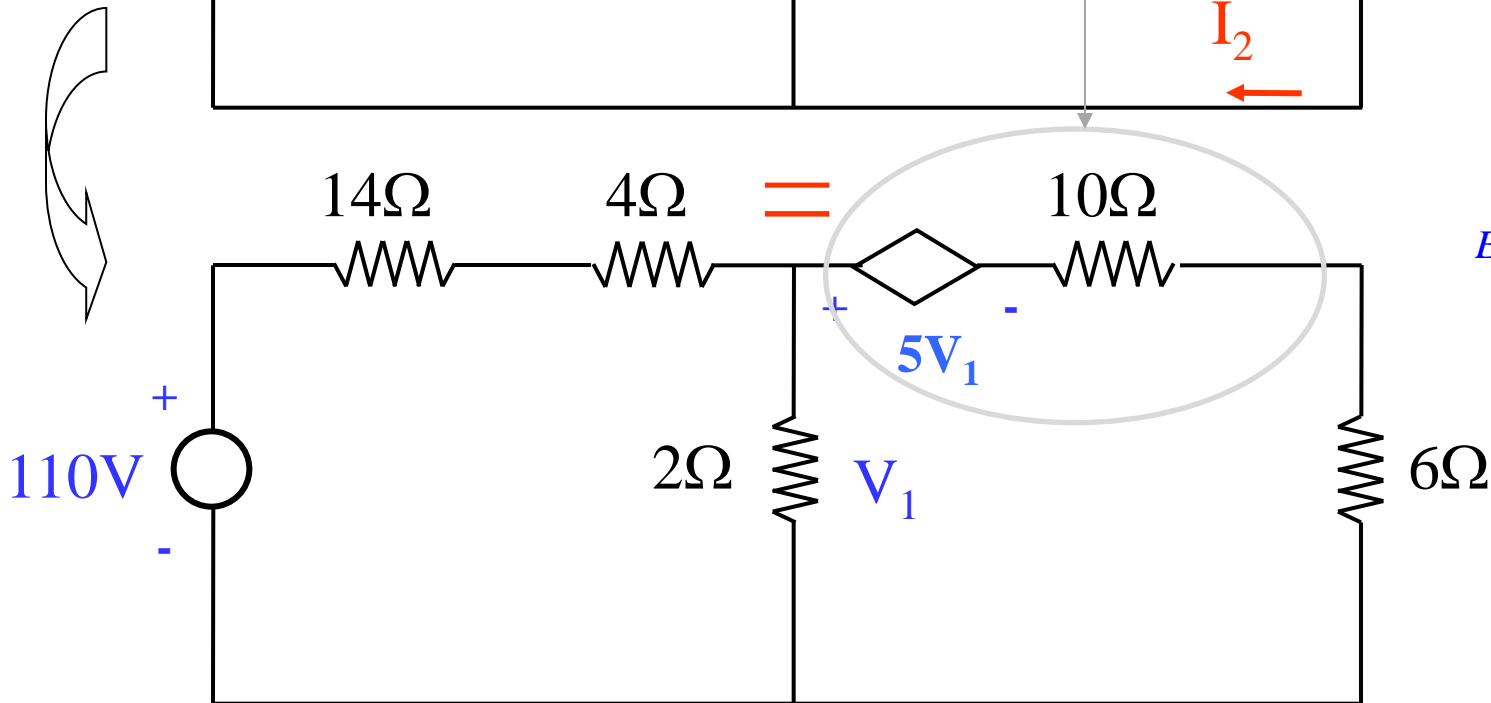
Çözüm: İlmek Akım Yöntemi kullanılacaktır. Önce gerilime bağlı akım kaynağı ve onun paralel direncinin gerilime bağlı bir gerilim kaynağı ve seri dirence dönüştürülmesi gerekir.



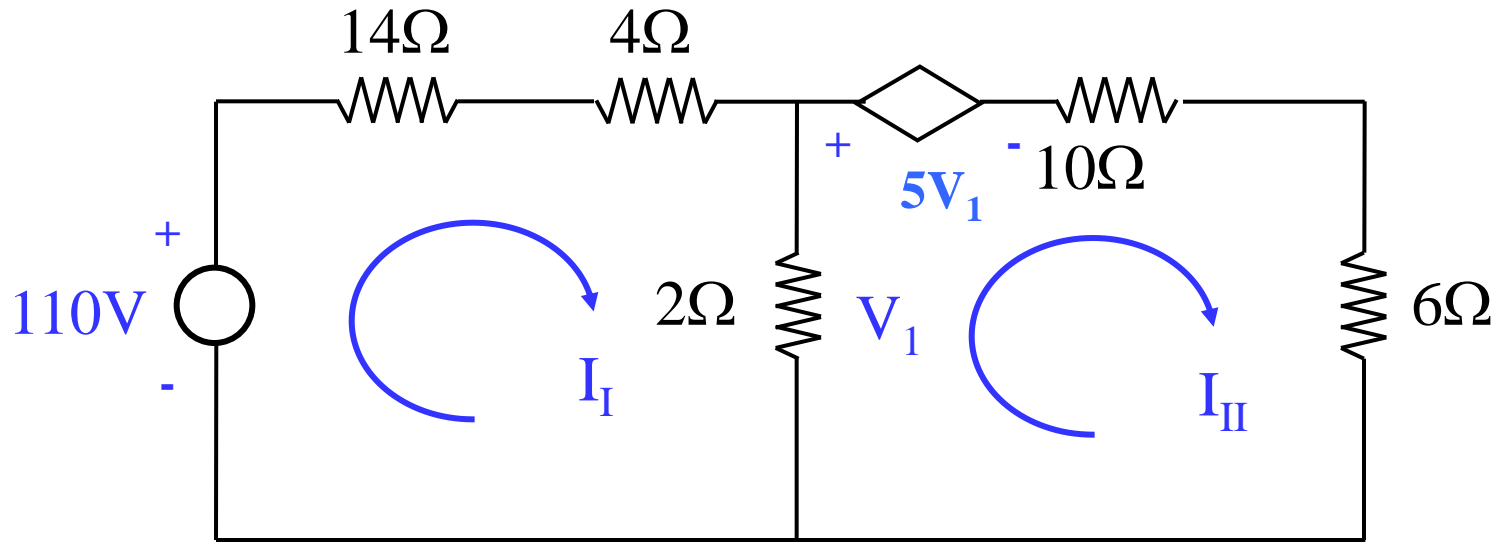
$$E_o = R_o I$$

$$R_o = 10\Omega$$

$$E_o = (10\Omega)(0.5V_1) = 5V_1$$



Çözüm: İlmekler için



1. ilmek $(14 + 4 + 2)I_I - 2I_{II} = 110$

2. ilmek $-2I_I + (2 + 10 + 6)I_{II} = -5V_1$

V_1 ile I_I ve I_{II} ilmek akımları arasındaki bağıntı $V_1 = (I_I - I_{II})(2\Omega)$

Eşitlikler düzenlenirse

$$20I_I - 2I_{II} = 110$$

$$8I_I + 8I_{II} = 0$$

Denklemlerin ortak çözümünden

$$I_I = 5 \text{ A} \quad I_{II} = -5 \text{ A} \quad \text{bulunur.}$$

I_{II} negatif olduğu için ikinci ilmekte dolanan akım seçilen yönün tersi yönüne dolaştığı anlaşılmaktadır.

