Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği Bölümü

FZM207

Temel Elektronik-I

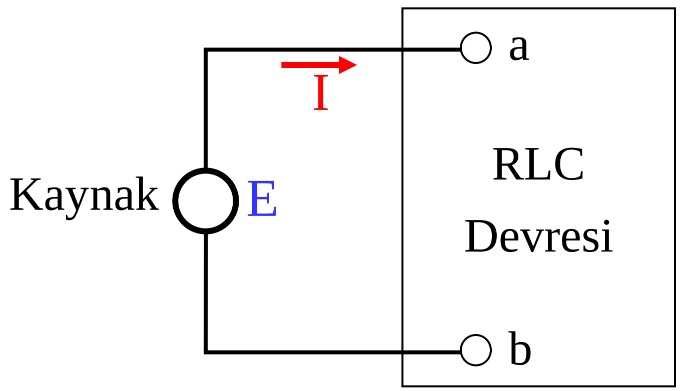
Prof. Dr. Hüseyin Sarı

5. Bölüm

Kararlı Durum A. A. Devreleri-3

Devre İndirgenmesi

Dirençli devreler gibi karmaşık a.a devreleri de eşdeğer dirençli devrelere indirgenebilir. Bunun için aşağıdaki devreyi düşünelim. a-b noktaları arasından bakıldığında devrenin eşdeğer impedansı:



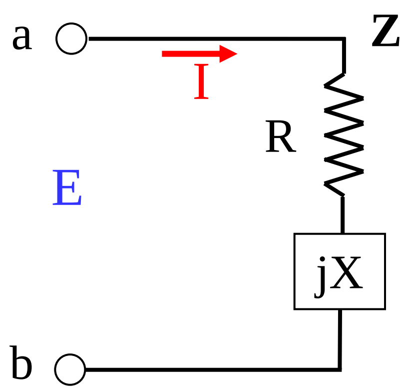
$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{I}} \qquad \mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{E}} = \frac{1}{\mathbf{Z}}$$

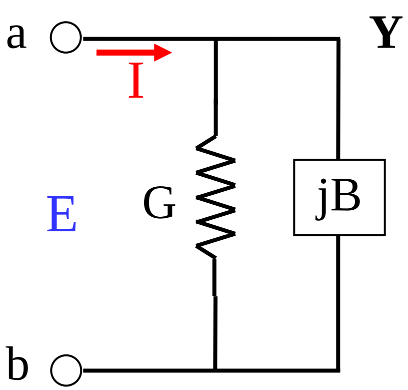
$$\mathbf{Z} = R + jX$$

$$\mathbf{Y} = G + jB$$

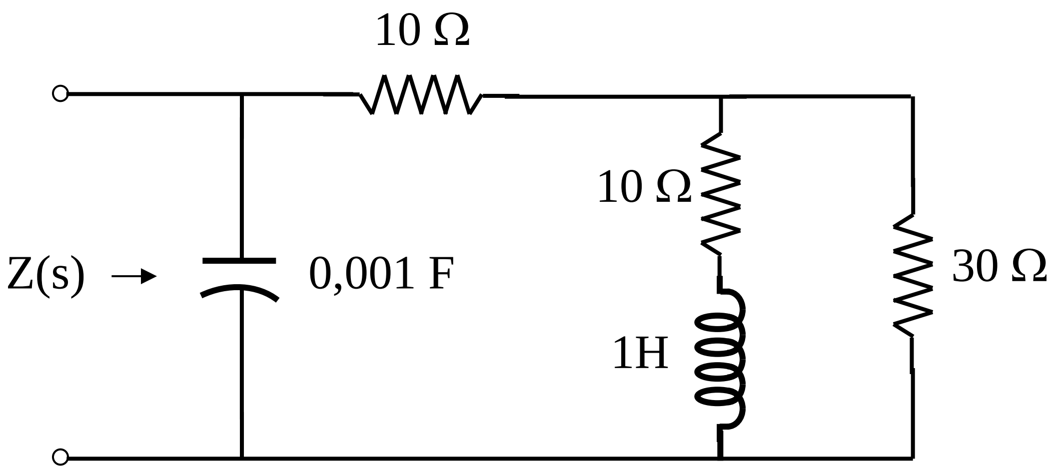
$$\mathbf{I} = \mathbf{E}\mathbf{Y} = G\mathbf{E} + jB\mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}\mathbf{Z} = R\mathbf{I} + jX\mathbf{I}$$

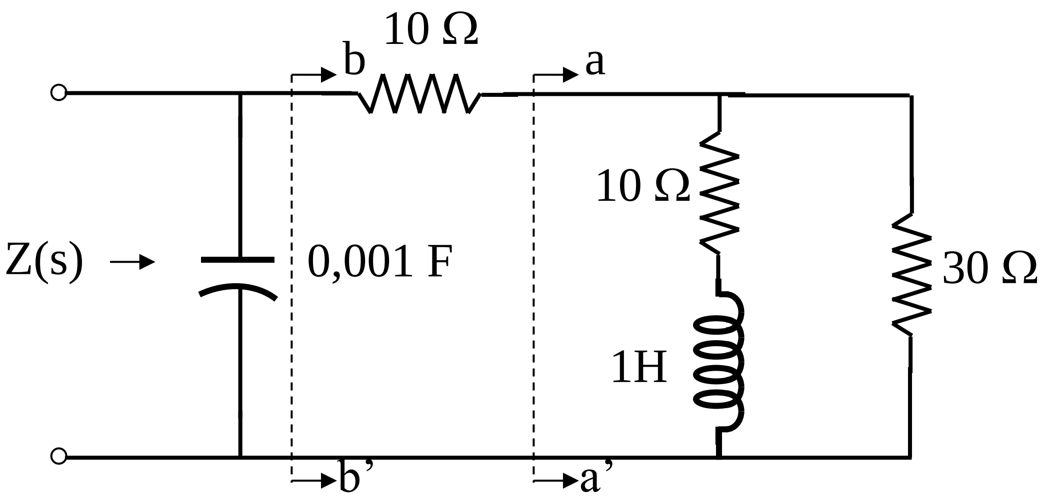




Örnek 5.4: Sürme fonksiyonunun açısal frekansı 10 rad/s olduğuna göre aşağıdaki devrenin giriş impedansını bulunuz.



Çözüm 5.4:



aa’ doğrusunun sağındaki, 30 Ω’luk direnç, 10 Ω’luk direnç ve 1H’lik bobinin seri dizilişi ile paraleldir. Seri kısmın impedansı:

$$\omega = 10\ rad/s \qquad 10 + j\omega 1{,}0 = 10 + j10 = 14{,}14\angle 45^o$$

$$\text{Edmitas:} \qquad \frac{1}{14{,}14\angle 45^o} = 0{,}05 - j0{,}05$$

aa’ doğrusunun sağında kalan devre elemanlarının toplam edmitansı ise

$$Y_a = 0{,}05 - j0{,}05 + \frac{1}{30\Omega} = 0{,}0833 - j0{,}05 = 0{,}0970\angle -31^o$$

bb’ doğrusunun sağ tarafının impedansı

$$Z_b = 10 + \frac{1}{\mathbf{Y_a}} = 10 + \frac{1}{0,0970\angle -31^o} \quad \Rightarrow \quad Z_b = 18,83 + j5,30 = 19,60\angle 15,7^o$$

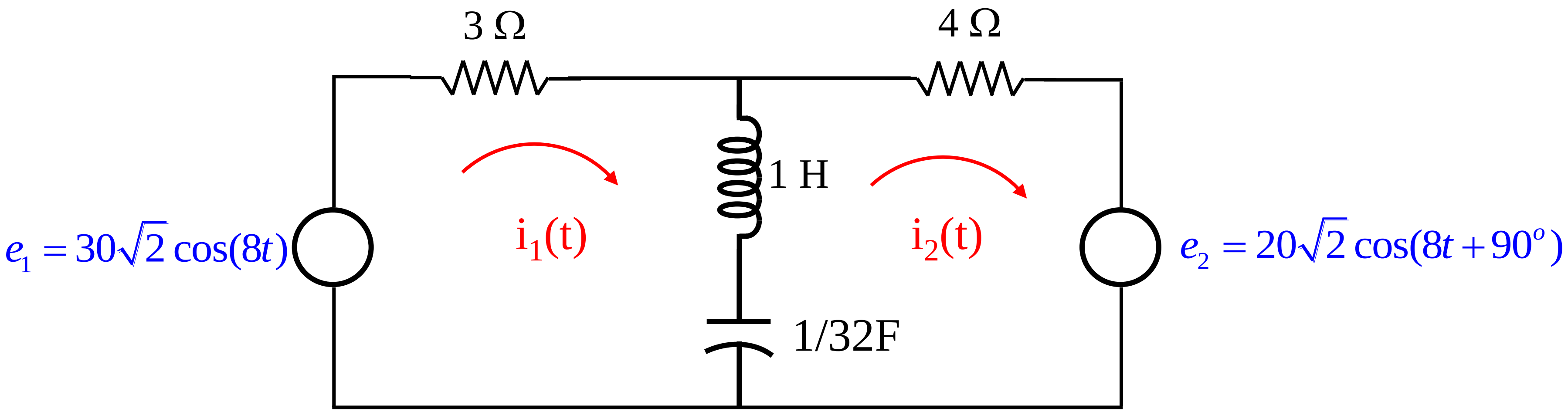
Sığanın edmitansı $\quad Y_C = j\omega(0,00) = j0,01$

Giriş edmitansı $\quad \mathbf{Y} = j0,01 + \frac{1}{\mathbf{Z_b}} = j0,01 + \frac{1}{19,60\angle 15,7^o} = 0,0492 + j0,0038$

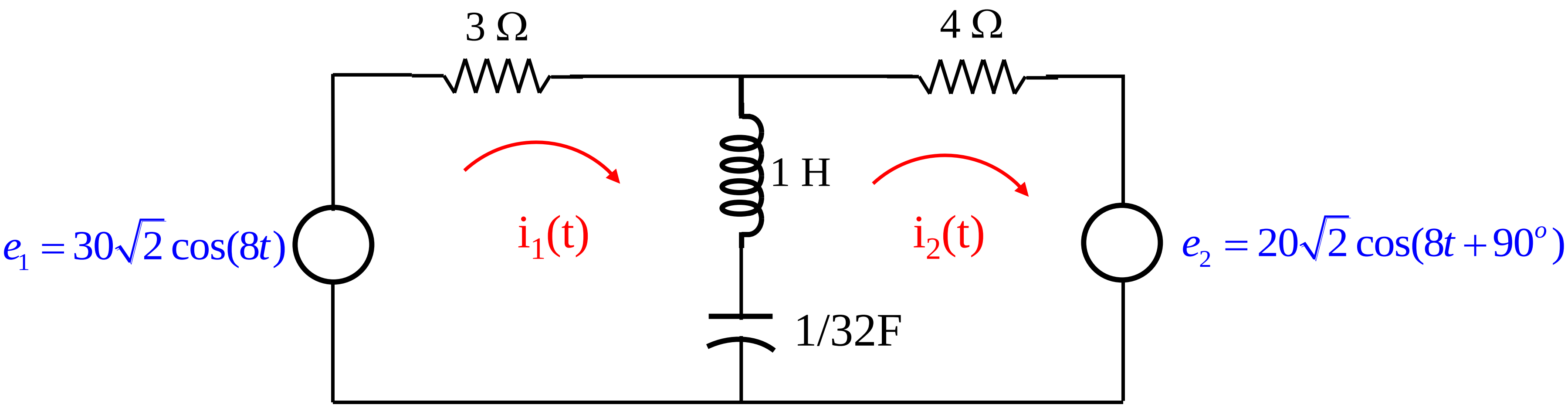
$$\mathbf{Y} = 0,0492 + j0,0038 = 0,0493\angle -4,4^o$$

Giriş impedansı $\quad \mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}} = \frac{1}{0,0493\angle -4,4^o} = 20,2\angle 4,4^o$

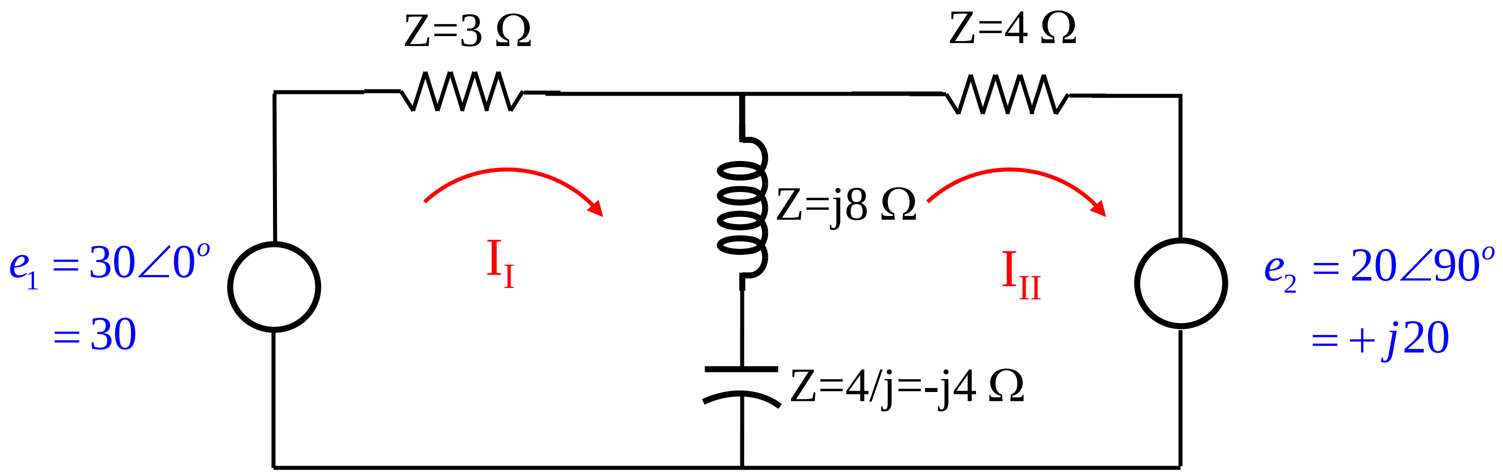
Örnek 5.5: Aşağıdaki devrenin kararlı durum akımını $i_1(t)$ bulunuz.



Çözüm 5.5:



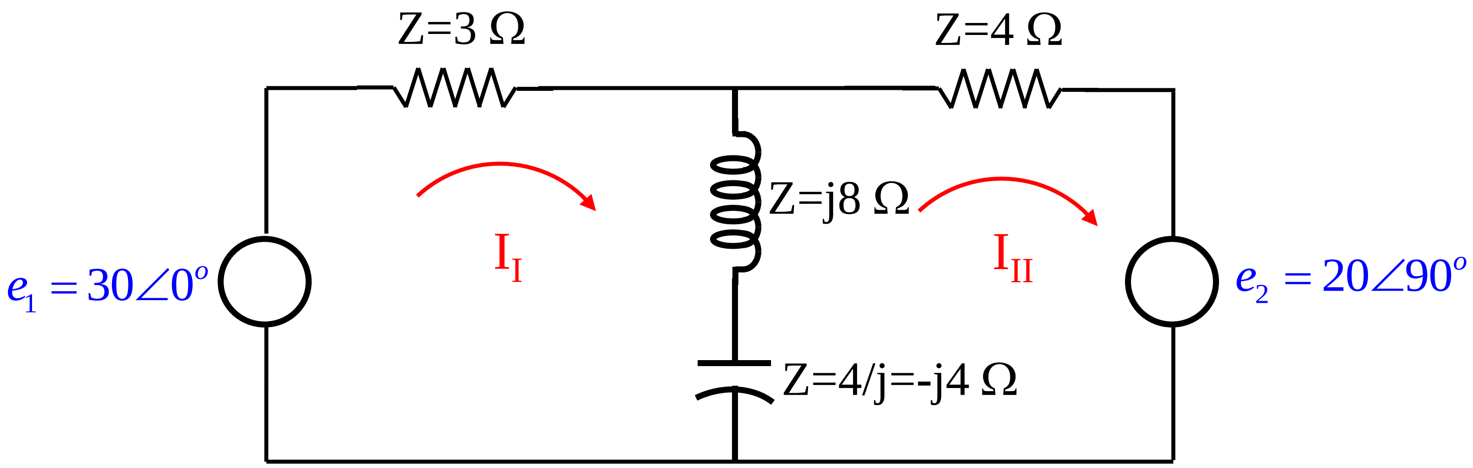
Frekans uzayına dönüştürülmüş devre:



İlmek akımı eşitlikleri:

$$(3 + j8 - j4)\mathbf{I}_I - (j8 - j4)\mathbf{I}_{II} = 30$$

$$-(j8 - j4)\mathbf{I}_I + (4 + j8 - j4)\mathbf{I}_{II} = -j20$$



İlmek akımı eşitlikleri:

$$(3+j8-j4)\mathbf{I}_I - (j8-j4)\mathbf{I}_{II} = 30$$
$$-(j8-j4)\mathbf{I}_I + (4+j8-j4)\mathbf{I}_{II} = -j20$$

Eşitlikler basitleştirilirse:

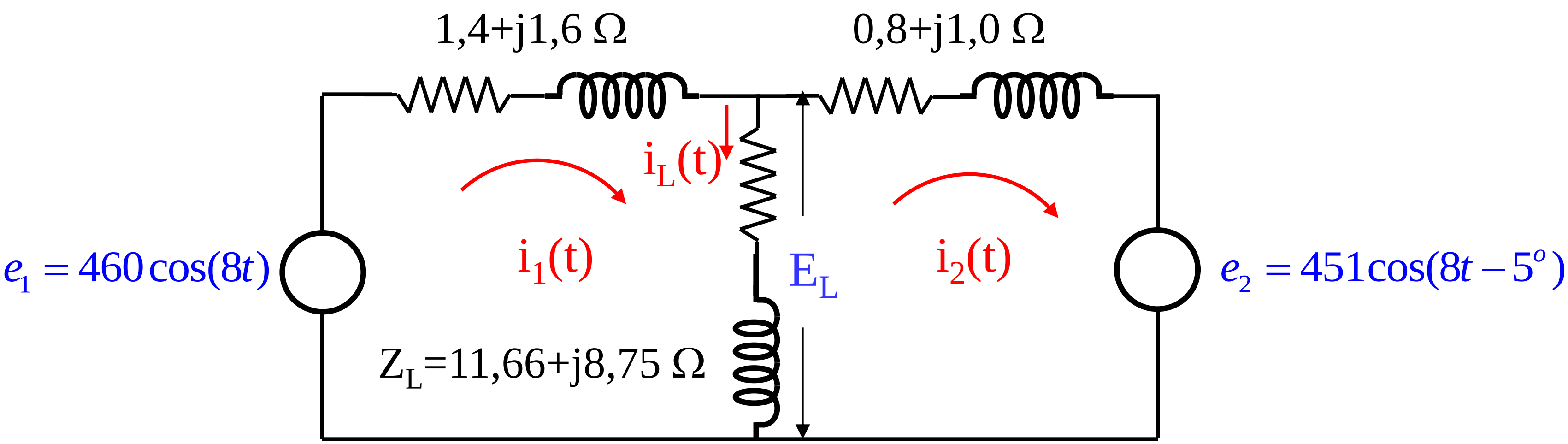
$$(3+j4)\mathbf{I}_I - j4\mathbf{I}_{II} = 30$$
$$-j4\mathbf{I}_I + (4+j4)\mathbf{I}_{II} = -j20$$

$\mathbf{I}_1$ akımı $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_I = 7,65\angle -35,8^o$

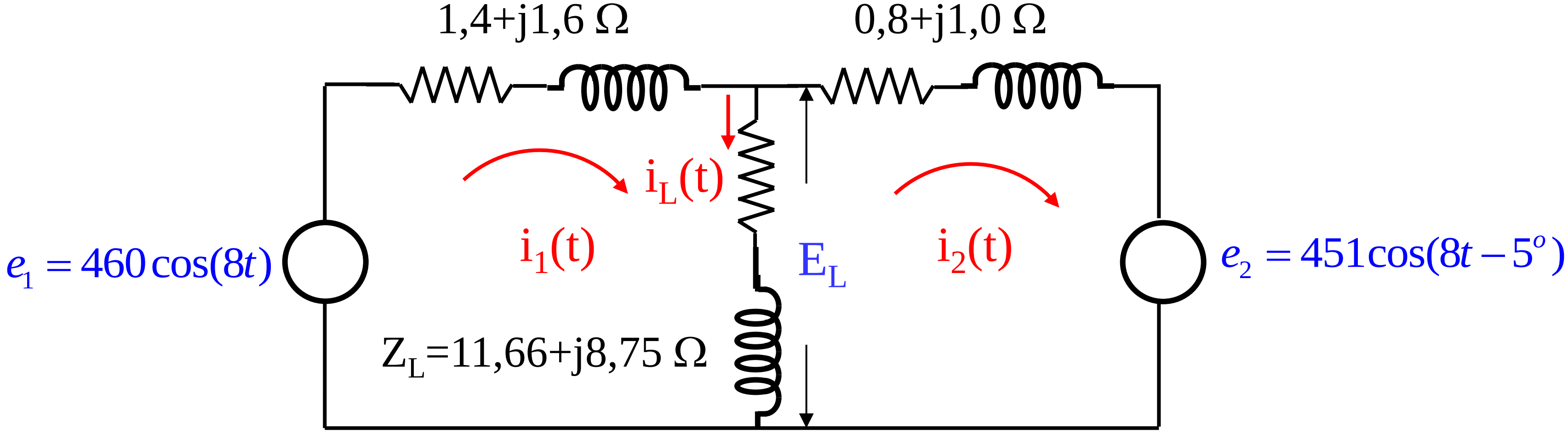
Zamana bağlı akım fonksiyonu

$$i_1(t) = 7,65\sqrt{2}\cos(8t - 35,8^o)$$

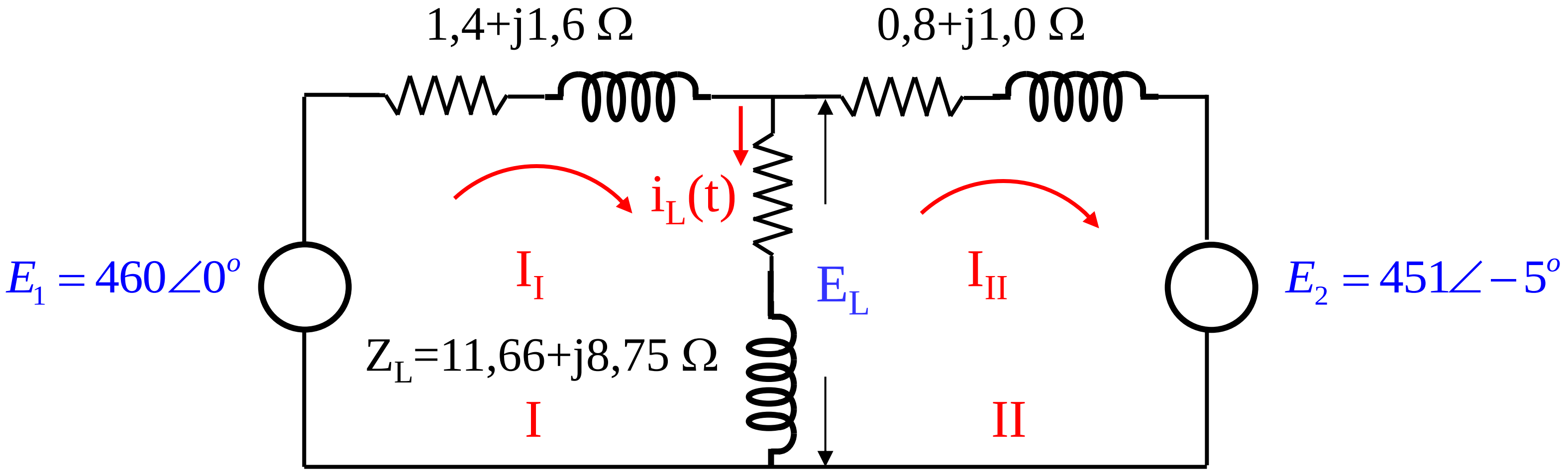
Örnek 5.6: Aşağıdaki devre iki kaynaktan beslenen bir yükün eşdeğer devresidir. Kaynak üreteçleri ideal gerilim kaynakları olarak düşünülmektedir, yük ve besleyici impedansları şekilde verilmiştir. 1. ve 2. kaynakların kutup gerilimleri sırasıyla 460 ve 451 V'dur. 2 numaralı üretecin gerilimi 1 numaralı gerilimi 5^o geriden izlemektedir. *İlmek-Akım Yöntemini* kullanarak yük gerilimini, yük akımını ve her bir üreteç tarafından sağlanan akımı bulunuz.



Çözüm 5.6:



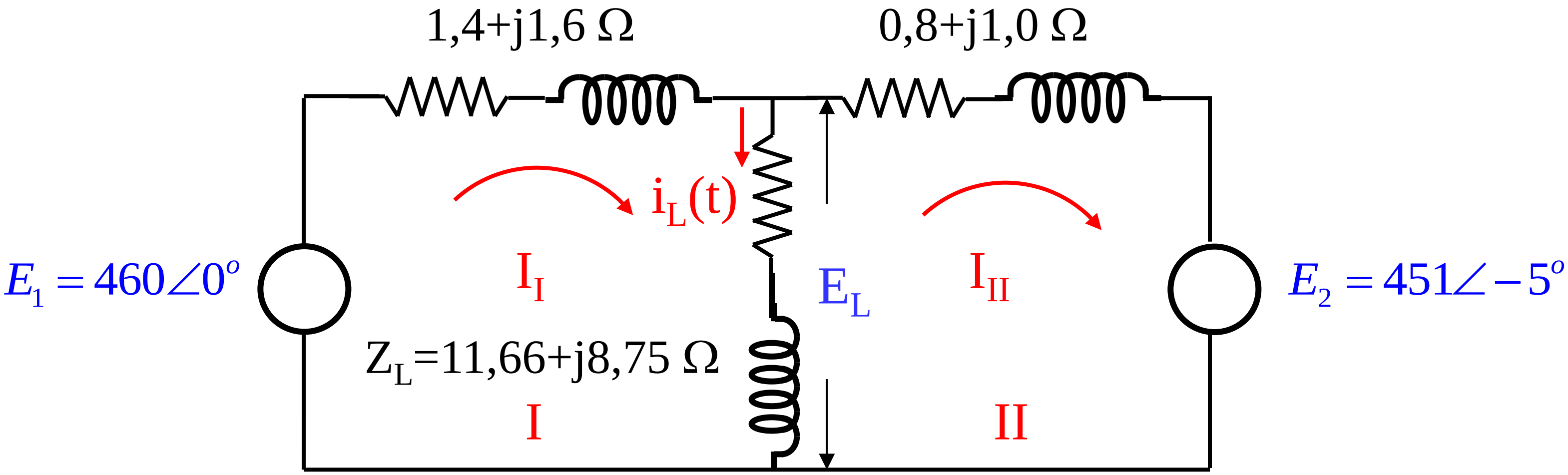
Frekans uzayına dönüştürülmüş devre:



İlmek akımı eşitlikleri:

I. İlmek $$[(1,4 + j1,6) + (11,6 + j8,75)]\mathbf{I}_I - (11,66 + j8,75)\mathbf{I}_{II} = 460\angle 0^o$$

II. İlmek $$-(11,66 + j8,75)\mathbf{I}_I + [(11,6 + j8,75) + (0,8 + j1,0)]\mathbf{I}_{II} = -451\angle -5^o$$



Eşitlikler basitleştirilirse

$$(13,6 + j10,35)\mathbf{I}_I - (11,66 + j8,75)\mathbf{I}_{II} = 460\angle 0^o$$
$$-(11,66 + j8,75)\mathbf{I}_I + (12,46 + j9,75)\mathbf{I}_{II} = -451\angle -5^o$$

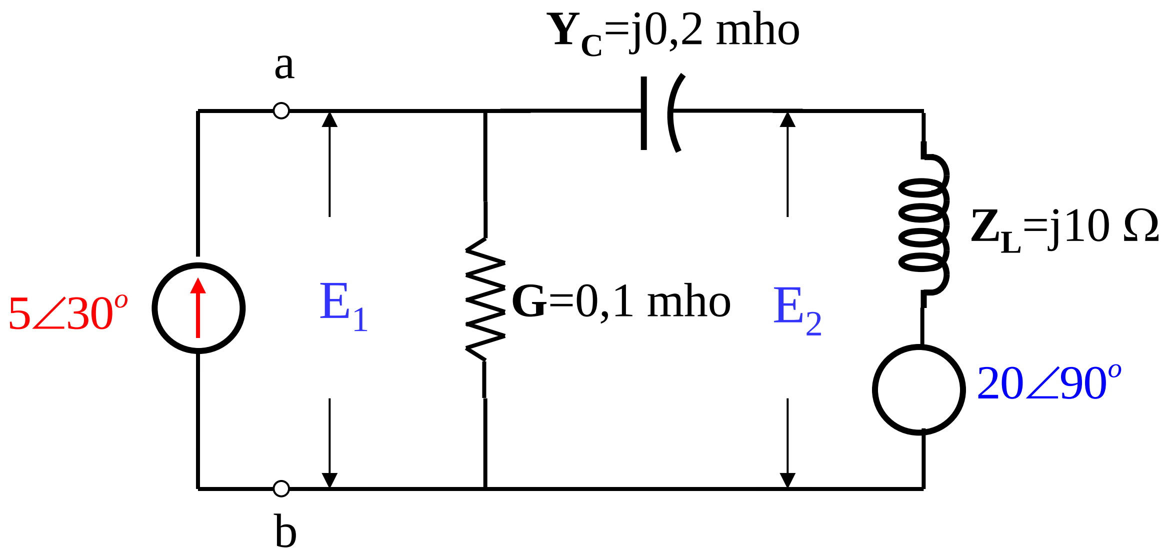
İlmek akımları $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_I = 19,5\angle -5,2^o \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{II} = -17,8\angle -76,4^o$

Yük akımı $\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_I - \mathbf{I}_{II} = 30,4\angle -38,9^o$

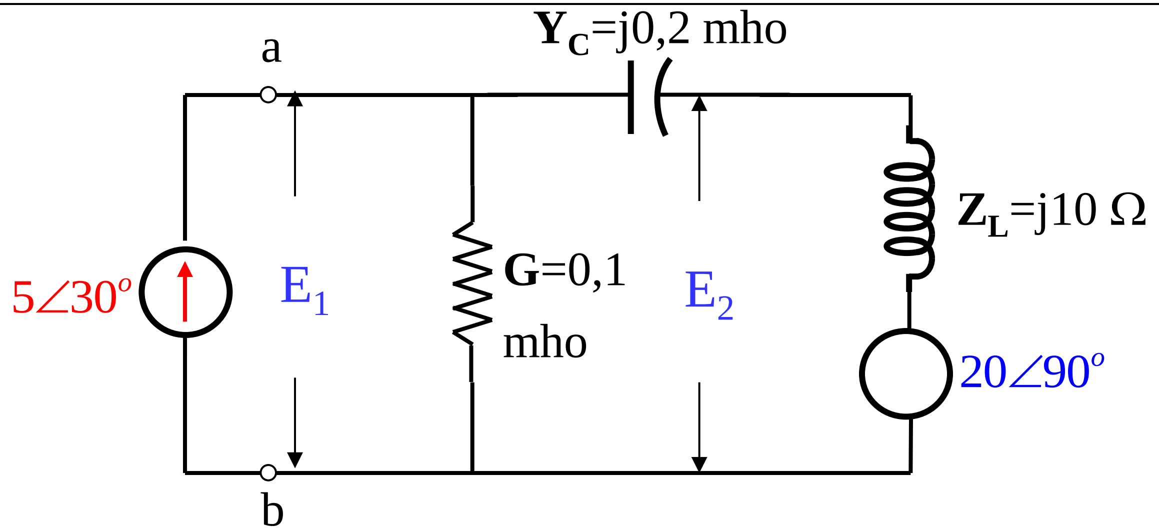
Yük gerilimi $\mathbf{E}_L = \mathbf{I}_L\mathbf{Z}_L = 30,4\angle -38,9^o(11,66 + j8,75) = 444\angle -2^o$

Yük gerilimi 444 V, yük akımı 30,4 A dir. Yüke 1 numaralı üreteç 19,5 A; 2 numaralı üreteç ise 17,8 A’lik akım sağlamaktadır.

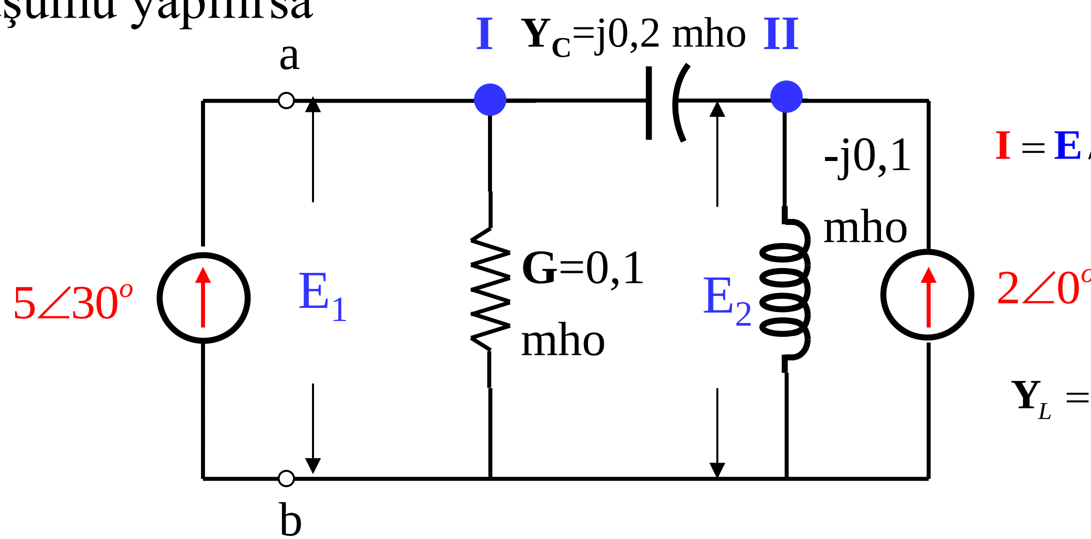
Örnek 5.7: Aşağıdaki devrede E_1 ve E_2 gerilimlerini Düğüm-Gerilimi Yöntemi ile bulunuz



Çözüm 5.7:



Kaynak dönüşümü yapılırsa



$$\mathbf{I} = \mathbf{E} / \mathbf{Z}_L = \frac{20\angle 90^o}{10\angle 90^o} = 2\angle 0^o \ A$$

$$\mathbf{Y}_L = \frac{1}{\mathbf{Z}_L} = \frac{1}{j10} = -j0,1 \ mho$$

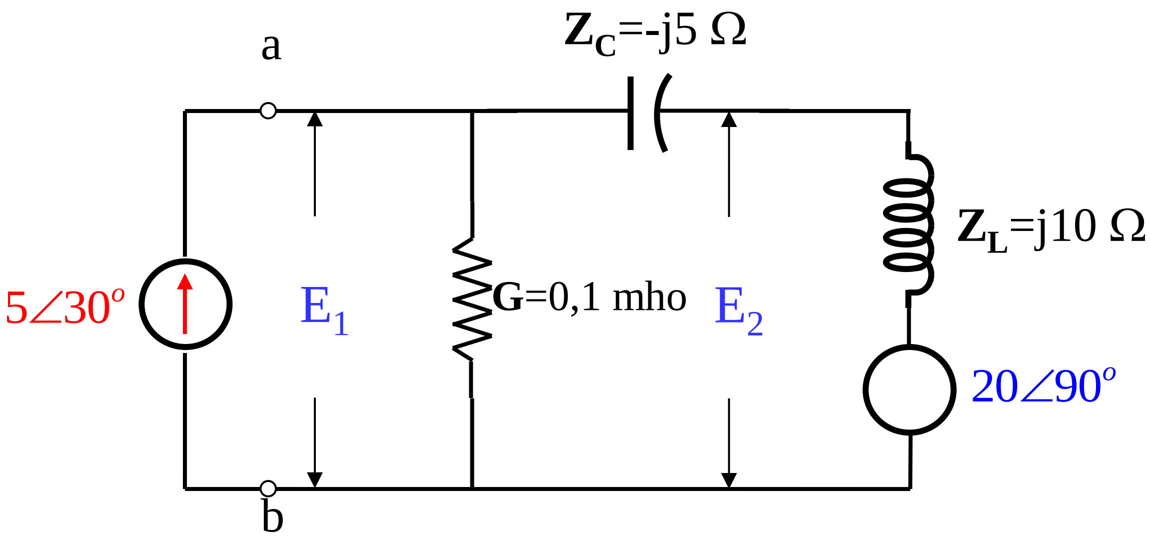
KAY:

I. Düğüm noktası: $(0,1 + j0,2)\mathbf{E}_1 - (j0,2)\mathbf{E}_2 = 5\angle 30^o$

II. Düğüm noktası: $-(j0,2)\mathbf{E}_1 + (j0,2 - j1,0)\mathbf{E}_2 = 2\angle 0^o$

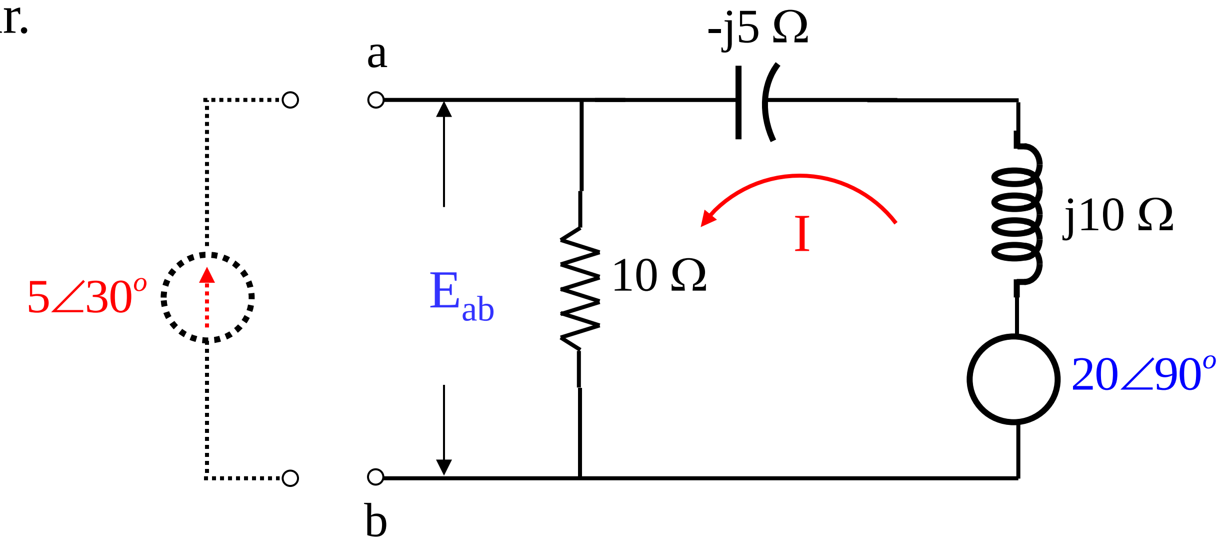
$\mathbf{E}_1 = 38,8\angle 80,1^o \ V \qquad \mathbf{E}_2 = 58,0\angle 76,7^o \ V$ bulunur.

Örnek 5.8: Thevenin teoremini kullanarak aşağıdaki devredeki E_1 gerilimini bulunuz.



Çözüm 5.8:

E_1 gerilimi istendiğinden a ve b bağlantı noktalarının sağındaki devre Thevenin eşdeğeri ile yerdeğiştirilecektir. Akım kaynağı kaldırılarak açık devre gerilimi E_{ab} bulunur.



$$\mathbf{I} = \mathbf{E}/\mathbf{Z}_L = \frac{20\angle 90^o}{10 - j5 + j10} = \frac{20\angle 90^o}{\sqrt{125}\angle 26,6^o} = 1,78\angle 63,4^o\ A$$

Açık devre gerilimi:

$$\mathbf{E}_{ab} = (10\,\Omega)\mathbf{I} = 17,8\angle 63,4^o$$

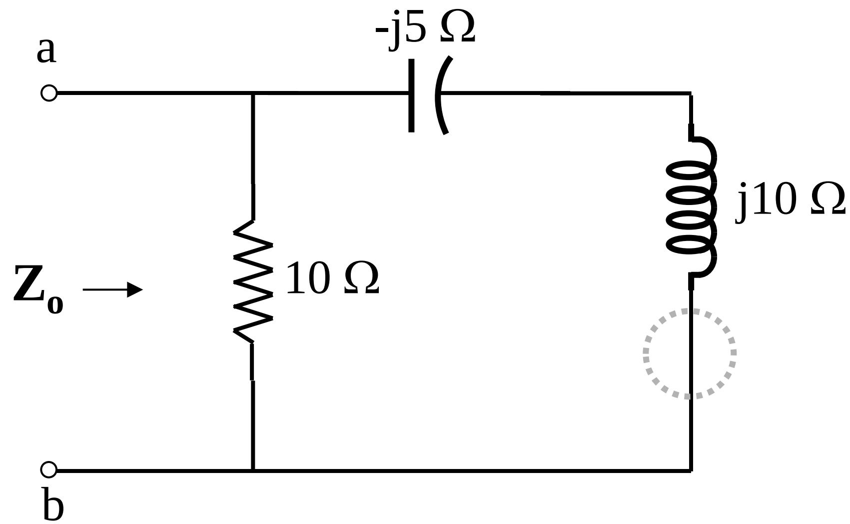
$$(10 + j5) = |(10 + j5)|\angle \tan^{-1}(5/10)^o$$

$$|(10 + j5)| = \sqrt{(10 + j5).(10 - j5)} = \sqrt{(10^2 + 5^2)} = \sqrt{125}$$

$$\angle \tan(5/10)^o = 26,6^o$$

$$(10 + j5) = \sqrt{125}\angle 26,6^o$$

Thevenin eşdeğer impedansı Z_o, devredeki gerilim kaynağının etkisinin kaldırılması ile (kısa devre) ile bulunur.

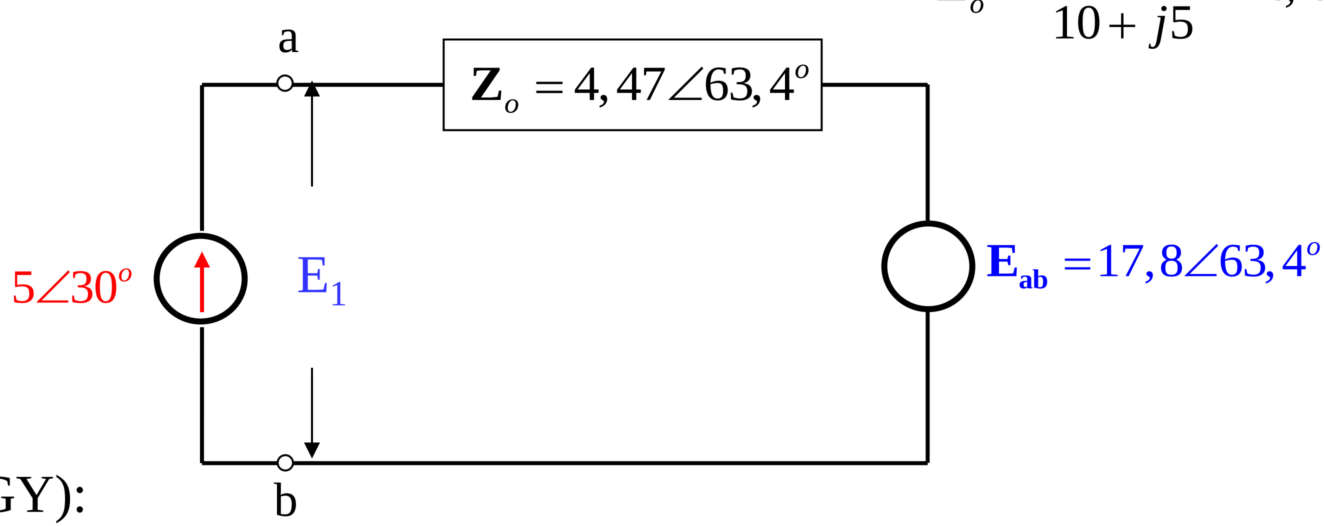


Eşdeğer impedans:

$$\mathbf{Z}_{o1} = -j5 + j10 = j5$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Z}_o} = \frac{1}{\mathbf{Z}_{o1}} + \frac{1}{10\Omega}$$

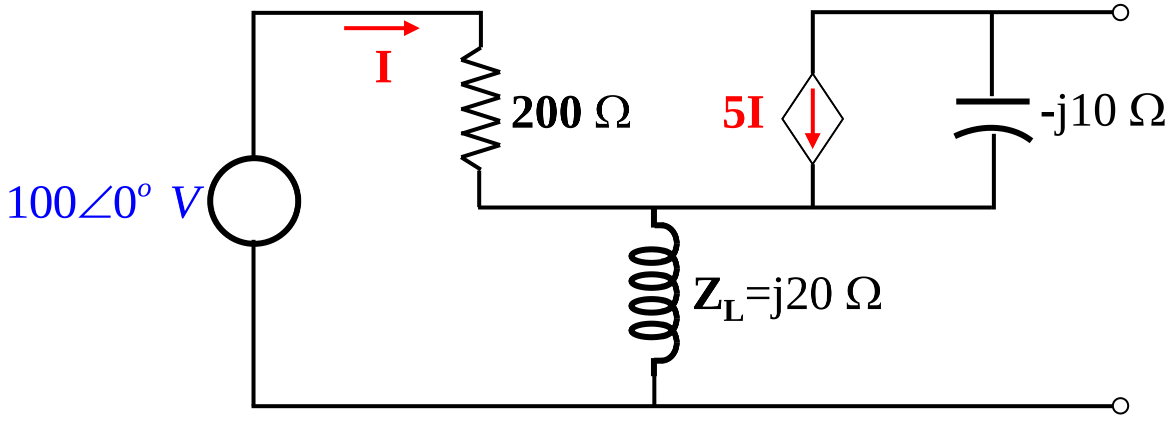
$$\mathbf{Z}_o = \frac{(10)(j5)}{10 + j5} = 4,47\angle 63,4^o$$



$\mathbf{E_1}$ gerilimi (KGY):

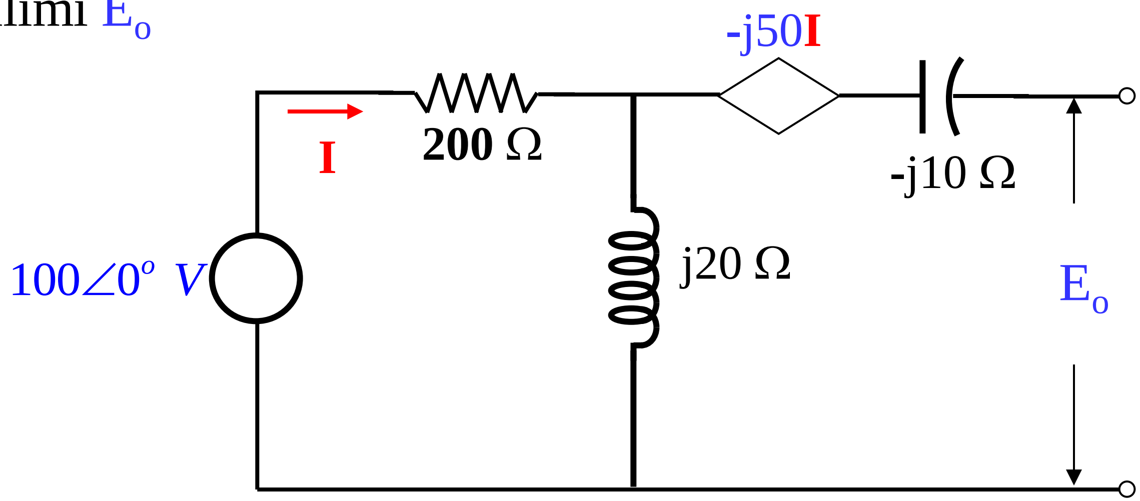
$$\mathbf{E}_1 = (5\angle 30^o)(4,47\angle 63,4^o) + 17,8\angle 63,4^o = 38,8\angle 80,1^o$$ olarak bulunur.

Örnek 5.9: Aşağıdaki devrenin Thevenin eşdeğerini bulunuz.



Çözüm 5.9:

Devrede bağımlı bir kaynak (5I) bulunduğundan Thevenin impedansı **<u>açık-devre geriliminin kısa-devre akımına oranı</u>** olarak bulunacaktır. Bunun için ilk olarak bağımlı kaynak üzerinde kaynak dönüşümü yapılır ve devre yeniden çizilir. Açık devre gerilimi E_o



Açık devre gerilimi: $$(200 + j20)\mathbf{I} = 100\angle 0^o$$

$$\mathbf{I} = \frac{100\angle 0^o}{200 + j20} = \frac{100\angle 0^o}{201\angle 5,7^o} \cong 0,5\angle -5,7^o$$

$$200 + j20 = |200 + j20| \angle \tan^{-1}(20/200)^o$$

$$|200 + j20| = \sqrt{(200 + j20).(200 - j20)} = \sqrt{(200^2 + 20^2)} = 201$$

$$\angle \tan(20/200)^o = 5,7^o$$

$$(200 + j20) = 201\angle 5,7^o$$

$$\mathbf{E}_o = j20\mathbf{I} - (-j50\mathbf{I}) = j70\mathbf{I}$$

$$\mathbf{E}_o = j70\mathbf{I} = (70\angle 90^o)(0,5\angle -5,7^o) = 35,0\angle 84,3^o$$

$$\boxed{\mathbf{E}_o = 35,0\angle 84,3^o}$$ bulunur.

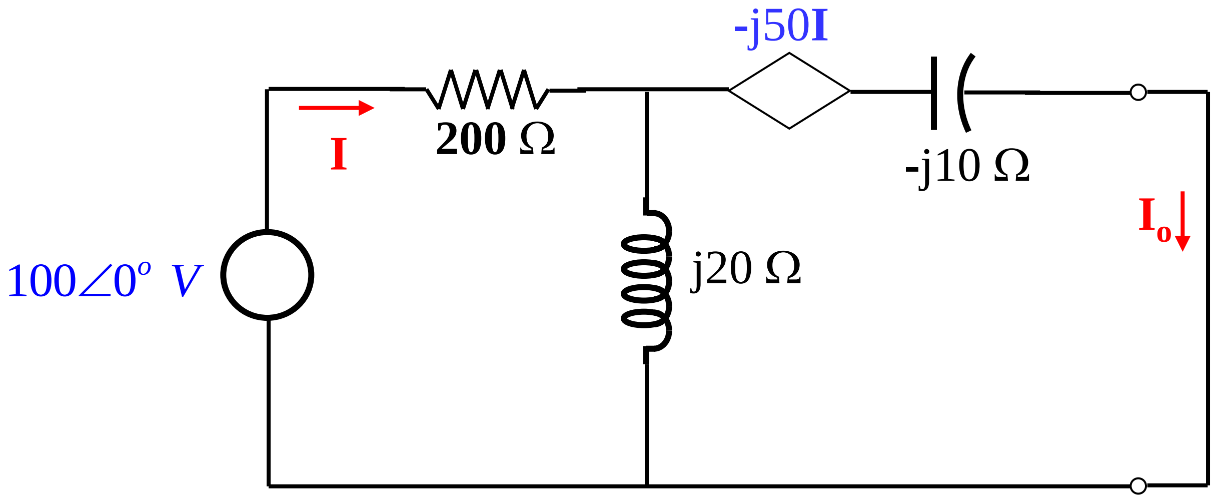
$$j70 = |j70| \angle \tan^{-1}(70/0)^o$$

$$|j70| = \sqrt{(j70).(-j70)} = \sqrt{70^2} = 70$$

$$\angle \tan(70/0)^o = 90,0^o$$

$$(j70) = 70\angle 90,0^o$$

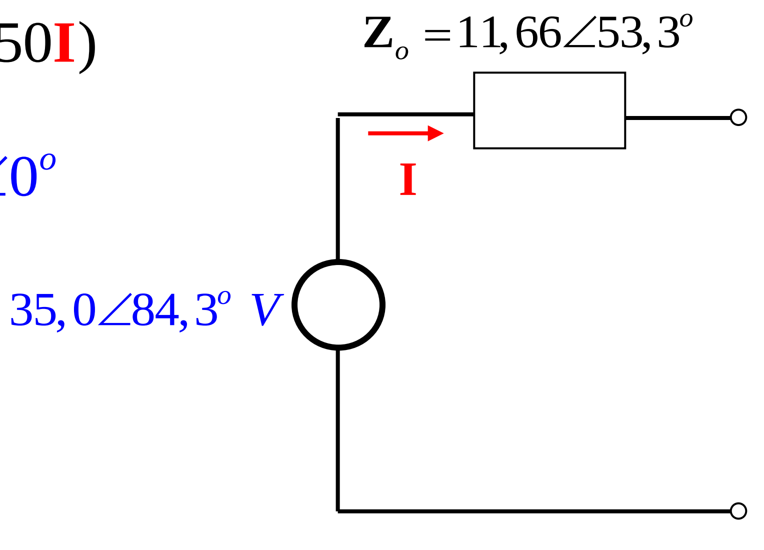
Kısa devre akımı, devrenin çıkış uçları kısa devre yaparak bulunur.



Kirchhoff Gerilim Yasası (KGY):

$$(200+j20)\mathbf{I} - j20\mathbf{I_o} = 100\angle 0^o$$

$$-(j20)\mathbf{I}+(j20-j10)\mathbf{I_o} = -(-j50\mathbf{I})$$



Sadeleştirilirse:

$$(200+j20)\mathbf{I} - j20\mathbf{I_o} = 100\angle 0^o$$

$$-j70\mathbf{I} + j10\mathbf{I_o} = 0$$

Eşitliklerin ortak çözümü yapılırsa:

$$\boxed{\mathbf{I}_o = 3,00\angle 31,0^o}$$

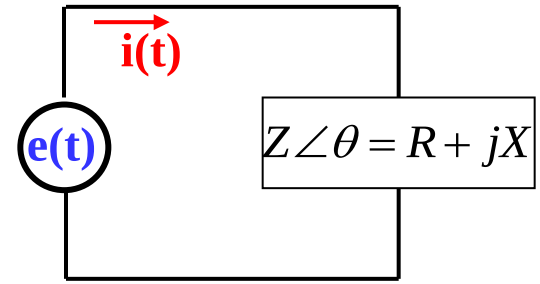
Thevenin impedansı:

$$\mathbf{Z}_o = \frac{\mathbf{E}_o}{\mathbf{I}_o} = \frac{35,0\angle 84,3^o}{3,00\angle 31,0^o} = 11,66\angle 53,3^o\ \surd$$

Güç ve Reaktif Güç

a. a devrelerinde akım ve gerilim zamanla yön değiştirdiği için güç de zamana bağlıdır. Örnek olarak uygulanan gerilimin:

$$e(t) = \sqrt{2}E\cos(\omega t + \theta)$$



şeklinde ve eşdeğer impedansın: $Z\angle\theta = R + jX$

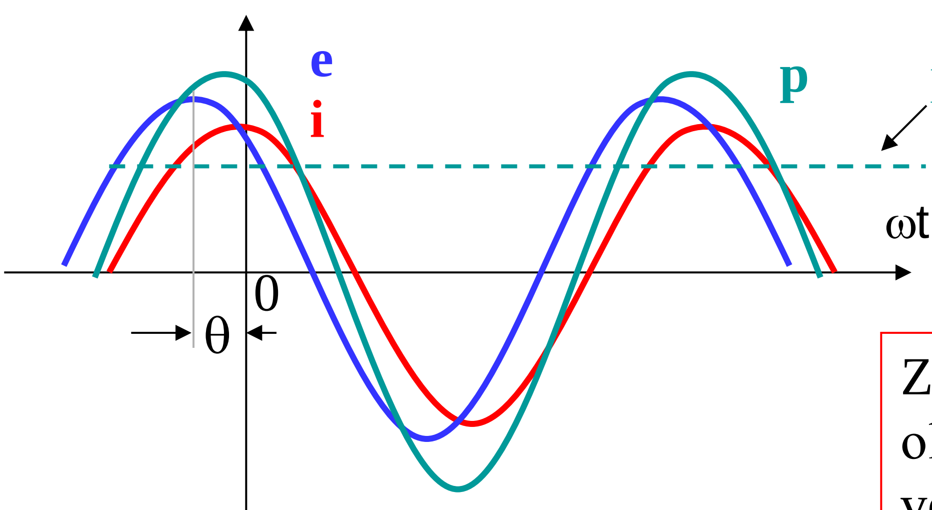
olduğu yandaki devreyi düşünelim. Devreden dolanan akım:

$$i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t)$$

Kaynak e(t) tarafından devreye sağlanan ani güç:

$$p = e(t).i(t) = \sqrt{2}E\cos(\omega t + \theta).\sqrt{2}I\cos(\omega t)$$

$$p = E.I\cos(\theta)\left[1 + \cos(2\omega t)\right] - E.I\sin(\theta)\sin(2\omega t)$$



$$<\cos(2\omega t)> = 0$$

$$<\sin(2\omega t)> = 0$$

$$<\cos^2(\omega t)> = 1/2$$

$$<\sin^2(\omega t)> = 1/2$$

$$\boxed{\langle p \rangle = E.I\cos\theta}$$ (Ortalama Güç)

Zamanla değişen akım ve gerilimin oluşturduğu ortalama güç, sıfırdan farklıdır ve enerji iletiminde kullanılabilir.

RLC Devre Elemanlarının Ortalama Gücü

Direnç için:

$$p_R = e_R.i = i(iR) = \sqrt{2}I\cos(\omega t).\sqrt{2}I\cos(\omega t)R$$

$$= I^2R(1+\cos(2\omega t)) \quad \boxed{p = P_R = I^2R \neq 0} \quad <\cos(2\omega t)>= 0$$

İndüktans için:

$$p_x = i.e_L = i.L\frac{di}{dt} = -\sqrt{2}I\cos(\omega t).(\omega L)\sqrt{2}I\sin(\omega t)$$

$$= I^2X_L\sin(2\omega t) \quad \boxed{p = P_L = I^2X_L = 0} \quad <\sin(2\omega t)>= 0$$

Sığa için:

$$p_x = i.e_C = i.\frac{1}{C}\int i dt = -\sqrt{2}I\cos(\omega t).(\frac{1}{\omega C})\sqrt{2}I\sin(\omega t)$$

$$= -I^2X_C\sin(2\omega t) \quad \boxed{p = P_C = I^2X_C = 0} \quad <\sin(2\omega t)>= 0$$

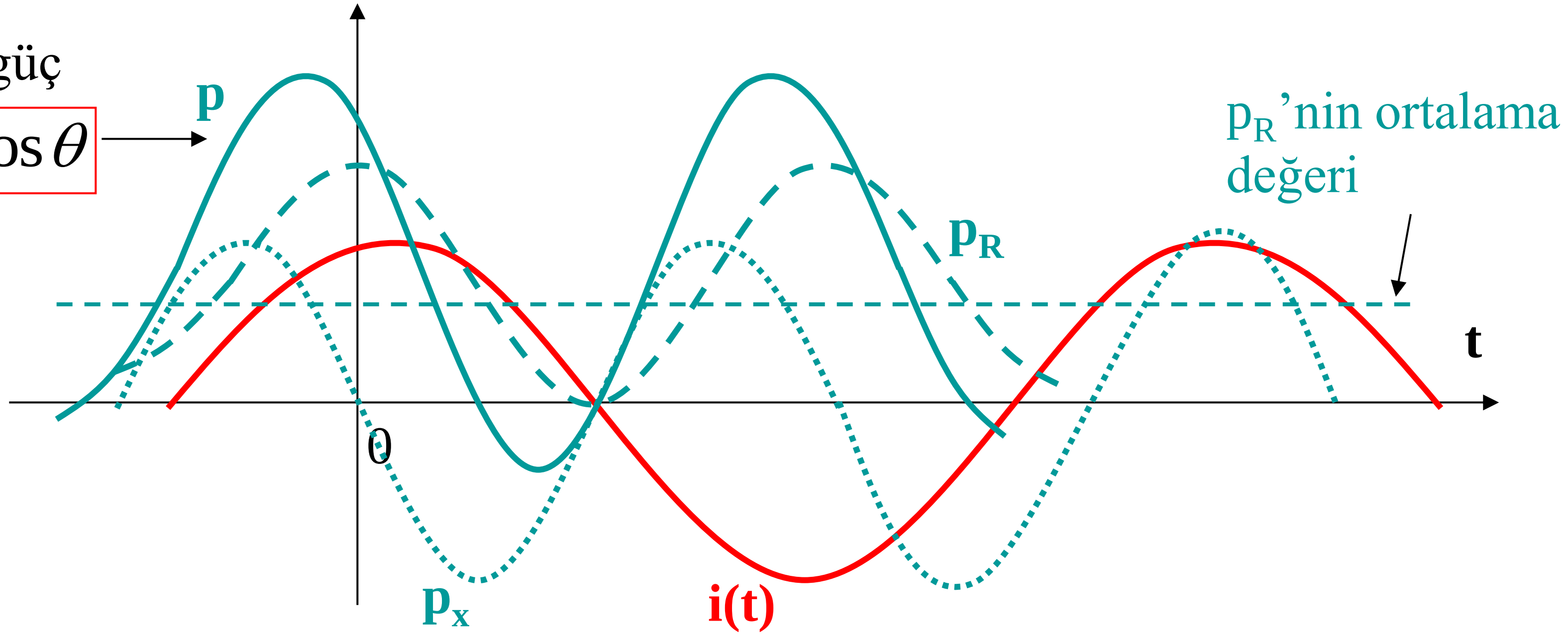
Genel bir RLC devresinde bulunan üç öğeden sadece direnç belirli bir enerji ya da bir ortalama güç soğurur.

İndüktans ve sığa, ani gücü etkiler fakat ortalama güce bir katkıda bulunmaz.

İndüktans üzerinden geçen akım artınca enerji manyetik alana dönüştürülür, akım azalınca deveye (akım olarak) geri verilir. Benzer şekilde sığanın uçları arasında gerilim artınca enerji devreden elektrik alana dönüştürülür, sığanın uçları arasındaki gerilim azalınca bu enerji geri devreye verilir.

Ortalama güç

$$\boxed{p = EI\cos\theta}$$



p_x eğrisi ile belirlenen enerjinin salınması net enerji iletiminin başarılması yönünde istenmeyen bir durumdur. Bu durum, enerji iletimine katkıda bulunmaz ancak devrenin yüklenmesine katkıda bulunur. Güç salınımın genliği:

$$Q = I^2 X = EI\sin\theta$$

Bu niceliğe, *reaktif (aktif olmayan) güç*, veya *watt'sız güç* denir ve *volt-amper* cinsinden ölçülür.

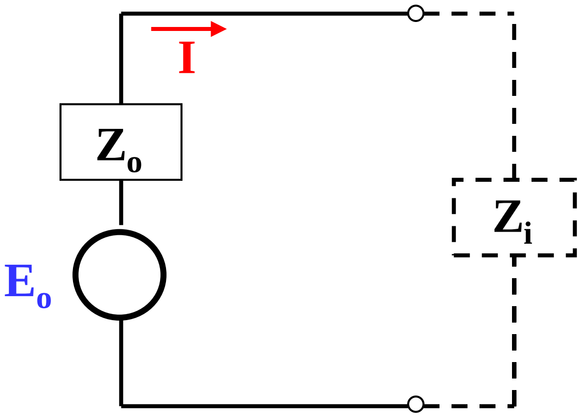
Birimi: **var** (**v**olt-**a**mper-**r**eaktif) dir.

Reaktif güç (Q) ve ortalama güç (P) arasındaki farkı vurgulamak için P'ye çoğu kez *aktif*, ya da *gerçek güç* denir.

Maksimum Güç Koşulları

Giriş impedansı, dış devrenin kaynak üzerindeki etkisini tahmin edebilmek için önemli bir niceliktir.

Thevenin teoremine göre kaynağın kendisi bir E_o gerilimi ve bununla seri konumdaki bir $\mathbf{Z_o}$ impedansı ile gösterilebilir.

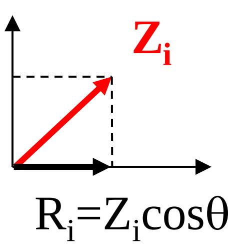


$$\mathbf{Z_o} = R_o + jX_o = Z_o\angle\theta_\mathbf{o}$$

$$\mathbf{Z_i} = R_i + jX_i = Z_i\angle\theta_\mathbf{i}$$

Devrede dolanan akım:

$$I = \frac{E_o}{\sqrt{(R_o + R_i)^2 + (X_o + X_i)^2}}$$



Güç:

$$P_i = I^2 R_i = \frac{E_o^2 R_i}{(R_o + R_i)^2 + (X_o + X_i)^2}$$ (Dış devrede)

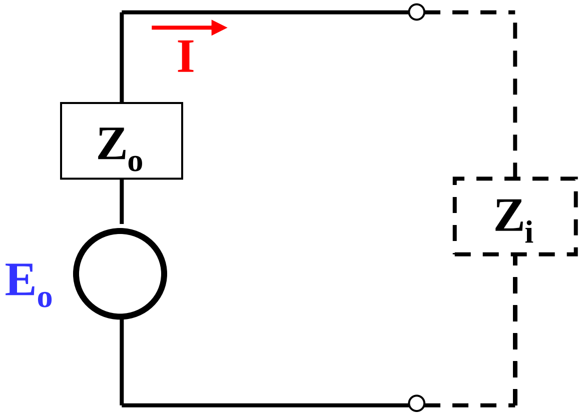
Güç (impedans cinsinden):

$$P_i = \frac{E_o^2 Z_i \cos\theta_i}{\sqrt{(Z_o\cos\theta_o + Z_i\cos\theta_i)^2 + (Z_o\sin\theta_o + Z_i\sin\theta_i)^2}}$$

Maksimum Güç Koşulları

Kaynak geriliminin ve impedansının sabit olduğunu, dış devrenin impedansını değiştirebileceğimizi düşünelim.

Amaç, impedansı $\mathbf{Z_o}$; gerilimi E_o olan kaynaktan dış devreye maksimum güç iletmektir.



- Eğer dış devrenin sadece X_i olan reaktansı değiştirilebiliyorsa güç eşitliğinden:

$$P_i = I^2 R_i = \frac{E_o^2 R_i}{\sqrt{(R_o + R_i)^2 + (X_o + X_i)^2}}$$

(Maksimum güç için) $X_i = -X_o$

- Eğer dış devrenin sadece R_i direnci değiştirilebiliyorsa $dP_i/dR_i=0$ ile P_i'nin maksimum değeri bulunabilir.

$$R_i = \sqrt{R_o^2 + (X_o + X_i)^2}$$ Bu durumda direnç

- Eğer R_i direnci ve X_i reaktansı birbirinden bağımsız olarak değiştirilebiliyorsa en iyi değer:

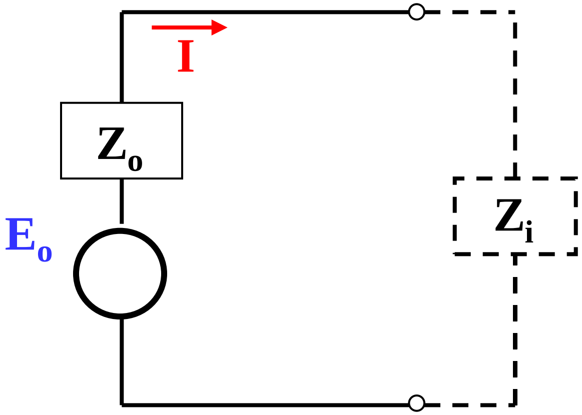
$$R_i = R_o$$

Maksimum Güç Koşulları

Bununla birlikte yaygın kullanılan bir başka koşul da Z_i büyüklüğünün impedans açısı θ_i sabit kalmak koşulu ile değiştirilmsidir.

İmpedansa bağlı güç ifadesinden $dP_i/dZ_i=0$ ile P_i'nin maksimum değeri bulunabilir.

$$P_i = \frac{E_o^2 Z_i \cos\theta_i}{\sqrt{(Z_o\cos\theta_o + Z_i\cos\theta_i)^2 + (Z_o\sin\theta_o + Z_i\sin\theta_i)^2}}$$



Buradan $Z_i = Z_o$ bulunur.

Bir kaynaktan mümkün olan en yüksek gücün alınması için kaynak (Z_o) ve dış devrenin (Z_i) impedansının eşit olması gerekir.

Bu ayarlamaya *impedans uyuşumu* denir.