

TEMEL MEKANİK

10



Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıođlu

Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi

Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliđi Bölümü

Ders Kitapları:

- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, Elliot R. Eisenberg, 2008, Güven Yayınları, İzmir
Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Halil Rıdvan Öz, Osman Kopmaz.
- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015, Literatür Yayıncılık, İstanbul,
Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Osman Kopmaz.

Diğer Kaynaklar:

- Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015. Vector Mechanics for Engineers 11e : Statics : SI Units, McGraw Hill, USA.
- Russell C. Hibbeler, 2016. Engineering Mechanics: Statics in SI Units (14e), Pearson Higher Ed USA.

4.1 İki boyutlu yapılarda denge

Tepki kuvvetleri

İki boyutlu yapılarda açığa çıkan tepkiler üç kategoride ele alınmıştır:

- 1) **Etki çizgisi bilinen bir kuvvetin eşdeğer tepkileri**
- 2) **Yönü ve büyüklüğü bilinmeyen bir kuvvetin eşdeğer tepkileri**
- 3) **Kuvvet ve kuvvet çiftine ilişkin eşdeğer tepkiler**

4.1 İki boyutlu yapılarda denge

Tepki kuvvetleri

İki boyutlu yapılarda açığa çıkan tepkiler üç kategoride ele alınmıştır:

- 1. Etki çizgisi bilinen bir kuvvetin eşdeğer tepkileri**
- 2. Yönü ve büyüklüğü bilinmeyen bir kuvvetin eşdeğer tepkileri**
- 3. Kuvvet ve kuvvet çiftine ilişkin eşdeğer tepkiler**

İki boyutlu bir yapının tepkileri

Tepki kuvvetleri

İki boyutlu yapılarda açığa çıkan tepkiler üç kategoride ele alınmıştır:

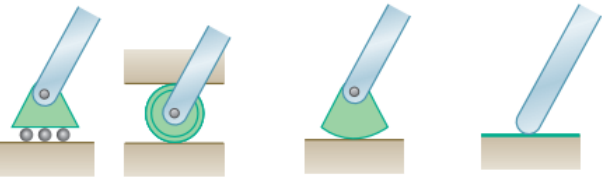
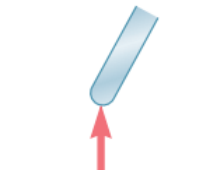
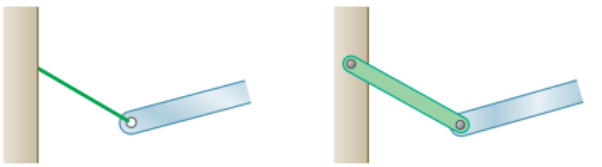
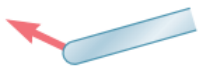
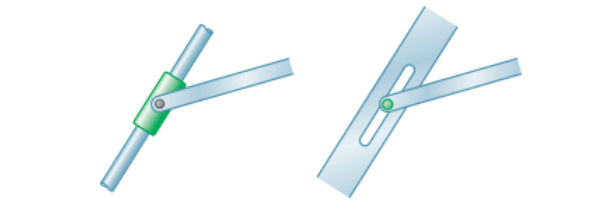
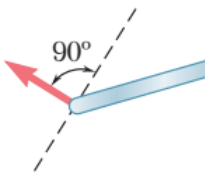
1. Etki çizgisi bilinen bir kuvvetin eşdeğer tepkileri

Bu tip tepkilere neden olan mesnetler ve bağlantılar *tekerlekler, salınan ayak, sürtünmesiz yüzeyler, kısa bağlantılar ve halatlar, sürtünmesiz çubuklu bilezik, oluklu sürtünmesiz pimleri* kapsar. Bu mesnetlerin ve bağlantıların her biri sadece bir yönde hareketi önleyebilir. Şekil 'de ürettikleri tepkilerle birlikte bu mesnetleri ve bağlantıları gösterir. Her tepki bir bilinmeyi, özellikle tepkinin büyüklüğünü kapsar. Problemin çözümünde bu büyüklüğü uygun harfle göstermelisiniz. Tepkinin etki hattı bilinir ve serbest cisim diyagramında açık şekilde gösterilmelidir.

2. Yönü ve büyüklüğü bilinmeyen bir kuvvetin eşdeğer tepkileri

3. Kuvvet ve kuvvet çiftine ilişkin eşdeğer tepkiler

İki boyutta mesnet ve bağlantıların tepkileri

Mesnetler ve bağlantılar	Tepkiler	Bilinmeyenler sayısı
 <p>Tekerlekler</p> <p>Salınlı ayak</p> <p>Sürtünmesiz yüzey</p>	 <p>Yüze dik etki hattı bilinen kuvvet</p>	1
 <p>Kısa halat</p> <p>Pandül ayak</p>	 <p>Halat yada bağlantı boyunca etki hattı bilinen kuvvet</p>	1
 <p>Sürtünmesiz çubuklu bilezik</p> <p>Sürtünmesiz oluklu pim</p>	 <p>Çubuk yada yuvaya dik etki hattı bilinen kuvvet</p>	1



This roller bearing supports the weight of a bridge. The convex surface of the rocker allows the bridge to move slightly horizontally.



Links are often used to support suspended spans of highway bridges.



Force applied to the slider exerts a normal force on the rod, causing the window to open.

İki boyutta mesnet ve bağlantıların tepkileri

Tepki kuvvetleri

İki boyutlu yapılarda açığa çıkan tepkiler üç kategoride ele alınmıştır:

- 1. Etki çizgisi bilinen bir kuvvetin eşdeğer tepkileri**
- 2. Yönü ve büyüklüğü bilinmeyen bir kuvvetin eşdeğer tepkileri**

Bu tip tepkilere neden olan mesnetler ve bağlantılar *sabit deliklerde sürtünmesiz pimleri, menteşeleri ve pürüzlü yüzeyleri* kapsar. Bunlar tüm yönlerde serbest cismin yer değiştirmesini önleyebilir; ancak bağlantı etrafında cismin dönmesini önleyemez. Bu grubun tepkileri iki bilinmeyeni kapsar ve genellikle onların x ve y bileşenleriyle gösterilir. Pürüzlü yüzey durumunda, yüzeye normal bileşen yüzeyden uzaklaşacak yönde olmalıdır.

- 3. Kuvvet ve kuvvet çiftine ilişkin eşdeğer tepkiler**

İki boyutta mesnet ve bağlantıların tepkileri

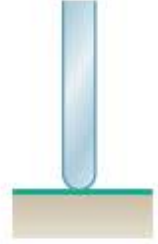
Mesnetler ve bağlantılar

Tepkiler

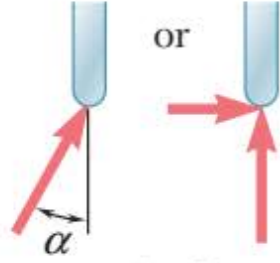
Bilinmeyenler sayısı



Sürtünmesiz pim yada menteşe

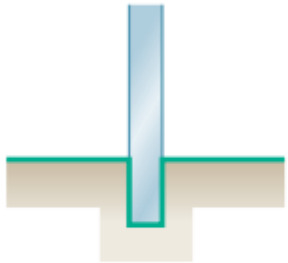


Pürüzlü yüzey

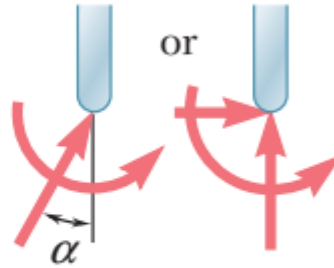


Yönü bilinmeyen kuvvet

2



Ankastre mesnet



Kuvvet ve kuvvet çifti

3



Pin supports are common on bridges and overpasses.

4.1 İki boyutlu yapılarda denge

Tepki kuvvetleri

İki boyutlu yapılarda açığa çıkan tepkiler üç kategoride ele alınmıştır:

1. **Etki çizgisi bilinen bir kuvvetin eşdeğer tepkileri**
2. **Yönü ve büyüklüğü bilinmeyen bir kuvvetin eşdeğer tepkileri**
3. **Kuvvet ve kuvvet çiftine ilişkin eşdeğer tepkiler**

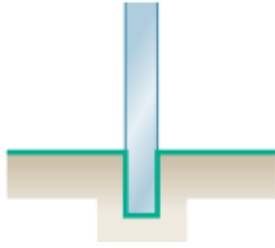
Bu tip tepkiler serbest cismin hareketine karşı kolan ve böylece onu tamamen sınırlayan *sabit mesnetler* tarafından oluşturulur. Sabit mesnetler gerçekte tüm temas yüzeyine kuvvetleri iletir; bu kuvvetler, ancak, bir kuvvet ve kuvvet çiftine indirgenebilen bir sistem oluşturur. Bu grubun tepkileri genellikle kuvvetin iki bileşeni ve kuvvet çifti momenti olmak üzere üç bilinmeyeni kapsar.

İki boyutta mesnet ve bağlantıların tepkileri

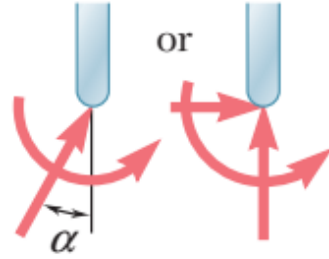
Mesnetler ve bağlantılar

Tepkiler

Bilinmeyenler sayısı



Sabit mesnet



Kuvvet ve kuvvet çifti

3



This cantilever support is fixed at one end and extends out into space at the other end.

İki boyutlu rijit - cisim dengesi

Rijit cismin dengesi için tanımlanan koşullar iki boyutlu yapıyı basitleştirmek için ele alınmıştır. x ve y eksenlerinin yapının düzleminde olduğu seçilirse, yapıya uygulanan kuvvetlerin her biri için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$F_z = 0 \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = M_O$$

Böylece, altı denge denklemi üç denkleme indirgenir:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0$$

İki boyutlu yapı için daha genel denklem $\Sigma M_O = 0$ olması gerektiği için :

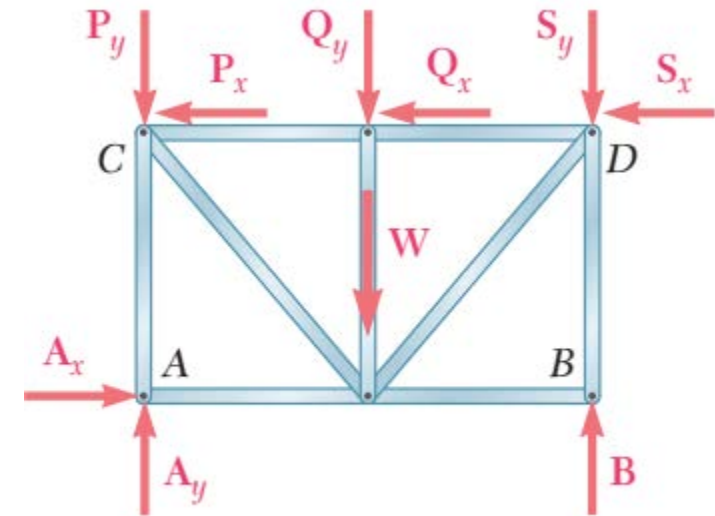
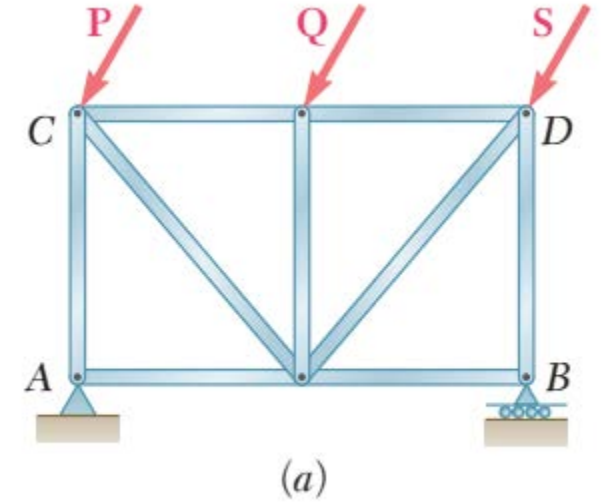
İki boyutlu denge denklemleri $\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_A = 0$

olarak yazabiliriz. Burada A yapının herhangi bir noktasıdır.

İki boyutlu rijit - cisim dengesi

Fig. 4.2 (a) A truss supported by a pin and a roller; (b) free-body diagram of the truss.

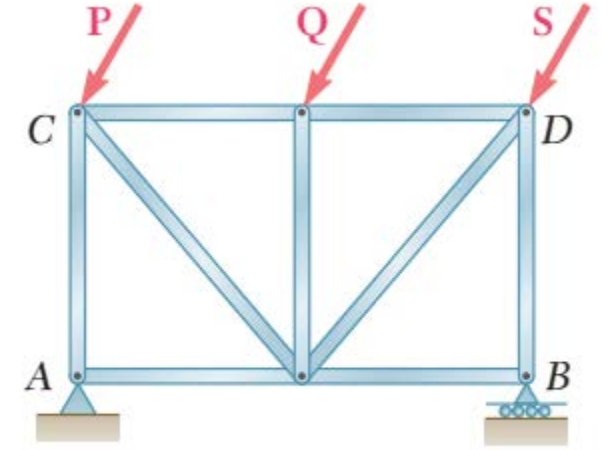
Şekil (a) da gösterilen makas denge halinde olup; verilen P , Q ve S kuvvetlerinin etkisi altındadır. Bu makas A noktasında pim ve B noktasında tekerlek üzerinde durmaktadır. A noktasındaki pim A_x ve A_y bileşenleri olarak çözümlenebilen makas üzerindeki kuvvetin neden olacağı hareketi önler. Tekerlek B dikey kuvveti sayesinde makasın A çevresinde dönmesini engel olur. Makasın serbest cisim diyagramı şekil (b) de gösterilmiştir. SÇD makasa uygulanan P , Q , ve S kuvvetlerinin x ve y bileşenlerinin yanı sıra, A_x ve A_y ve B tepki kuvvetlerini ve makasın W ağırlık kuvvetini içermektedir.



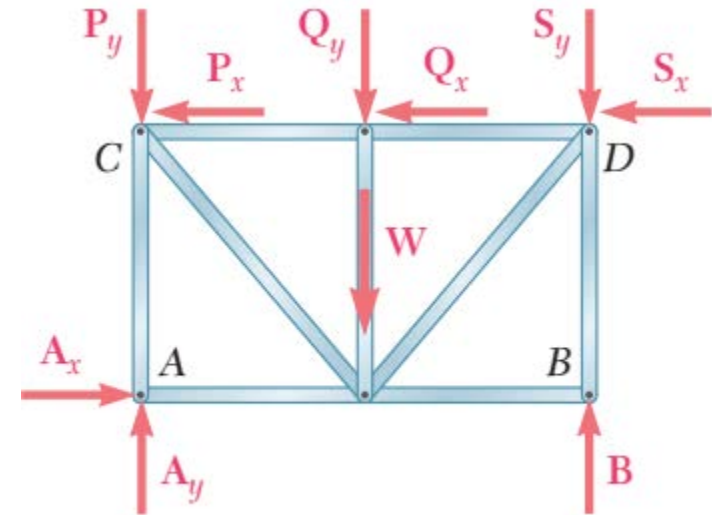
(a) Bir pim ve bir tekerlek ile mesnetlenen makas uygulaması, (b) makasın serbest cisim

İki boyutlu rijit - cisim dengesi

Makas denge halinde olduğu için, Şekil (b) de gösterilen tüm kuvvetlerin A çevresindeki momentleri toplamı sıfırdır. ($\sum M_A = 0$). Bunu, denklem A_x ve A_y içermediği için, B nin büyüklüğünü belirlemek için kullanabiliriz. Kuvvetlerin x-bileşenleri toplamı ve y-bileşenleri toplamı sıfır olduğu için, $\sum F_x = 0$ ve $\sum F_y = 0$ yazarız. Bu denklemlerden, sırasıyla A_x ve A_y bileşenlerini buluruz.



(a)



(b)

İki boyutlu rijit - cisim dengesi

Şekil (a) da gösterilen örnekte, makas A ve B noktalarında tekerlek, D noktasında kısa bağlantı ile denge halinde durmaktadır.

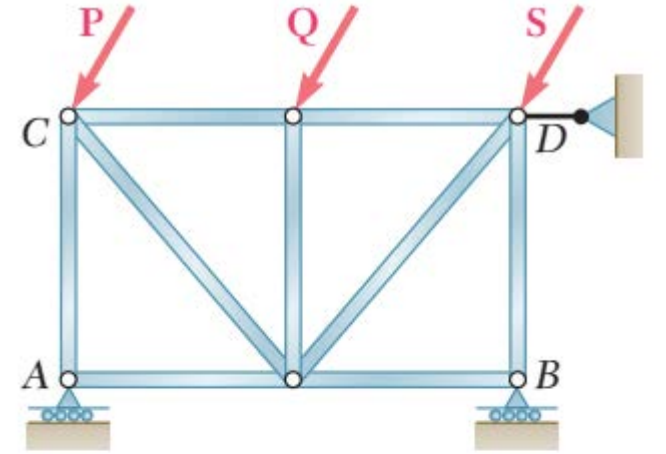
x bileşenlerinin toplanmasıyla A ve B noktalarındaki tepki kuvvetlerini yok edebiliriz.

C noktası çevresindeki momentlerin toplanmasıyla A ve D deki tepkileri ve D noktası çevresindeki momentlerin toplanmasıyla B ve D tepkilerini yok edebiliriz.

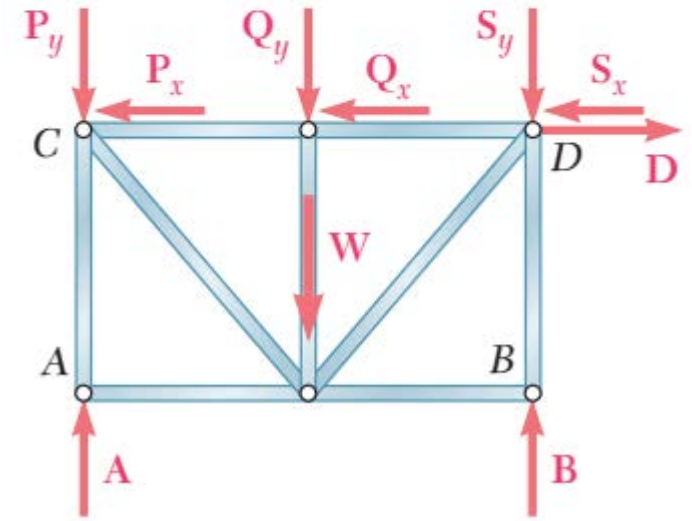
Sonuç olarak , aşağıdaki denklemleri yazarız:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_C = 0 \quad \Sigma M_D = 0$$

Bu denklemlerin her biri sadece bir bilinmeyen bulunmaktadır.



(a)



(b)

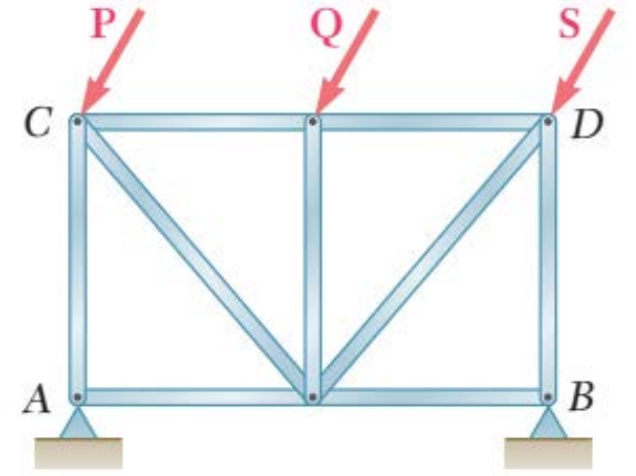
(a) İki tekerlek ve bir kısa bağlantı ile mesnetlenen makas uygulaması, (b) makasın serbest cisim diyagramı

Statik olarak Belirsiz Tepkiler ve Kısmi Kısıtlar

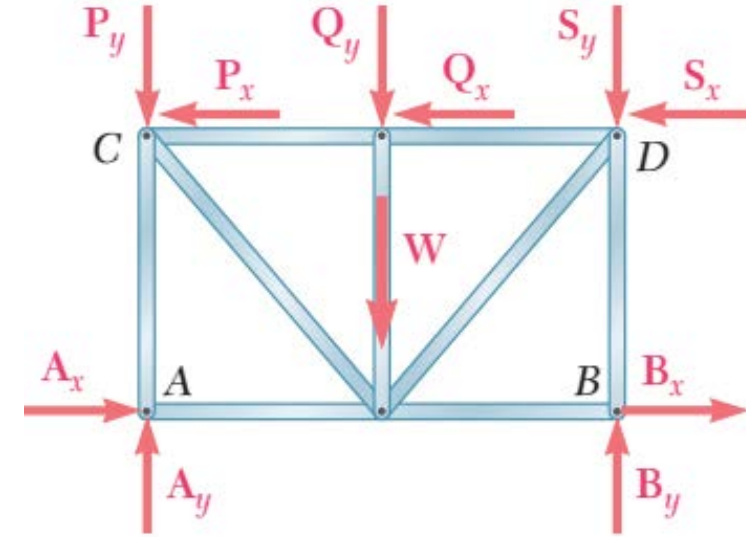
Şekil (a) da A ve B pimleri ile dengede tutulan makas uygulamasını göz önüne alalım. Bu mesnetler, makasın belirli yükler altında hareket etmesini veya diğer yükleme koşulları altında kalmasını sağlamak için gerekli olanlardan daha fazla kısıtlama sağlar. Şekil (b) de serbest cisim diyagramında karşılık gelen tepkimelerin dört bilinmeyen içerdiğini belirtin. Sadece üç bağımsız denge denklemi vardır. Bu nedenle, bu durumda, denklemlerden daha fazla bilinmeyen var. Sonuç olarak, tüm bilinmeyenleri belirleyemeyiz.

$\Sigma M_A=0$ ve $\Sigma M_B=0$ denklemleri sırasıyla dikey B_y ve A_y bileşenlerinin elde edilmesini sağlar. Ancak $F_x=0$ denklemi yalnızca A ve B noktalarındaki reaksiyonlarının yatay bileşenlerinin $A_x + B_x$ toplamını verir. $A_x + B_x$ bileşenleri **statik olarak belirsizdir**.

Verilen yüklemeyle makasta üretilen deformasyonları göz önüne alarak onların büyüklüklerini belirleyebiliriz. Ancak, bu yöntem statikğin kapsamı dışındadır ve malzeme mekaniğine aittir.



(a)



(b)

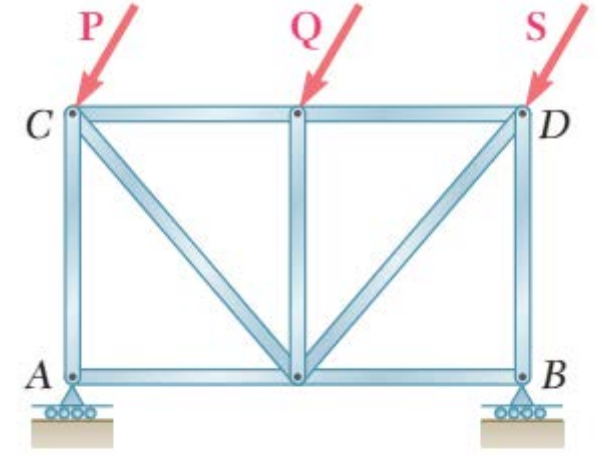
(a) Statik olarak belirsiz tepkilerin olduğu makas uygulaması, (b) makasın serbest cisim diyagramı

Statik olarak Belirsiz Tepkiler ve Kısmi Kısıtlar

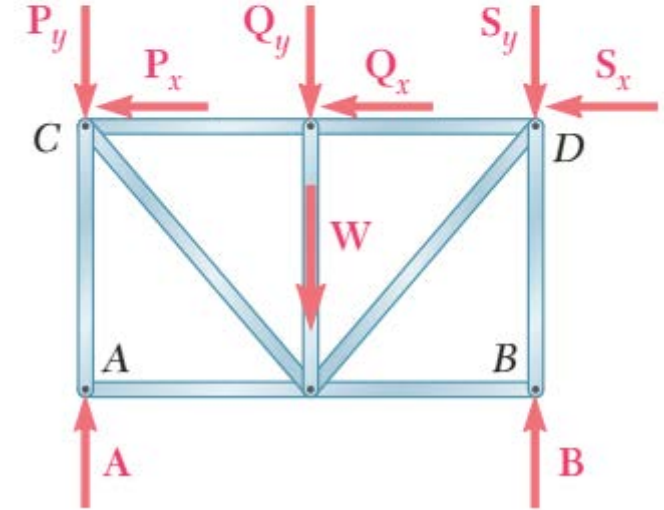
Karşıt durumu düşünelim. Makası tutan destekler Şekil (a) da gösterilen A ve B'deki makaralardan oluşmaktadır. Açıkçası, bu destekler tarafından sağlanan kısıtlamalar, makasın hareket etmesini engellemek için yeterli değildir. Herhangi bir dikey hareketi engellemelerine rağmen, makas yatay olarak hareket ettirilebilir.

Makasın **kısmen kısıtlandığı** söyleniyor. Şekil (b) deki serbest cisim diyagramından A ve B'deki reaksiyonların yalnızca iki bilinmeyenliği içerdiğini unutmayın. Üç denklemin hala yeterli olması gerektiği için, denklemlerden daha az sayıda bilinmeyen vardır. Böyle bir durumda, denge denklemlerinden birisi genel olarak yeterli olmayacaktır.

$\Sigma M_A=0$ ve $\Sigma M_B=0$ denklemleri A ve B'de uygun reaksiyon seçimi ile yerine getirilebilir. Ancak, $\Sigma F=0$ denklemi uygulanan kuvvetlerin yatay bileşenleri toplamı sıfır olmadıkça, sağlanamaz. Böylece, Şekildeki makasın dengesi genel yükleme koşullarında elde edilemez.



(a)



(b)

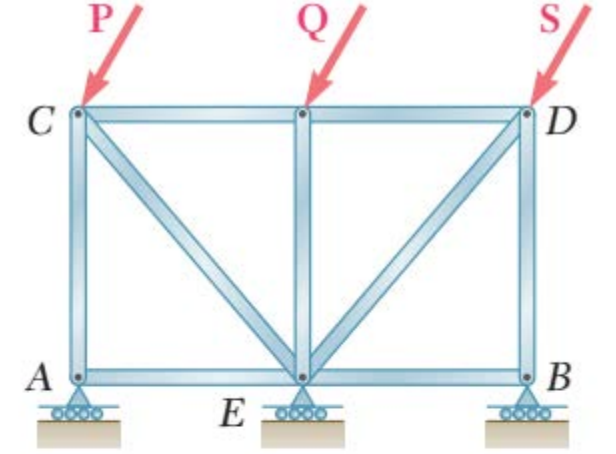
(a) Statik olarak belirsiz tepkilerin olduğu makas uygulaması, (b) makasın serbest cisim diyagramı

Statik olarak Belirsiz Tepkiler ve Kısmi Kısıtlar

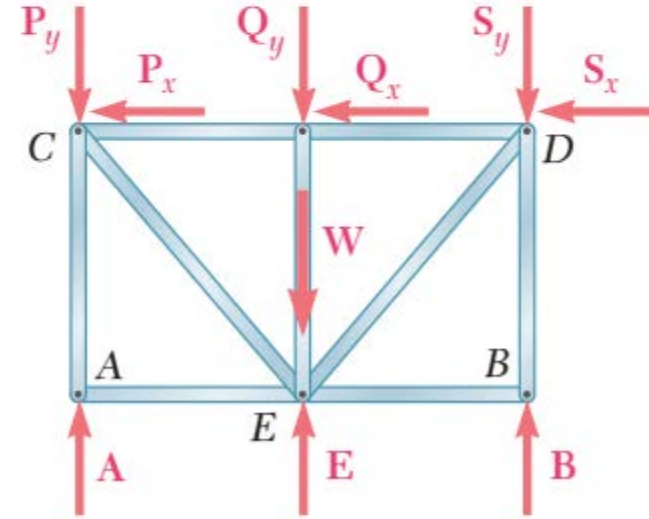
Bu örneklerden, eğer rijit bir cisim tamamen kısıtlıysa ve desteklerindeki reaksiyonlar statik olarak belirlenecekse, **denge denklemleri sayısı kadar bilinmeyen olması gerekir**. Bu koşul yeterli olmadığında, ya rijit cismin tamamen kısıtlı olmadığını yada desteklerindeki reaksiyonların belirsiz olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca, rijit cismin tamamen sınırlı olması ve tepkilerin statik olarak belirsiz olması mümkündür.

Ancak, bu koşulun gerekli olmasına karşın yeterli olmadığını not etmeniz gerekir. Diğer kelimelerle, bilinmeyen sayısının denklem sayısına eşit olmasının cismin tamamen sınırlanmış olmasının yada mesnetlerindeki tepkilerin statik olarak belirlenmesinin garantisi yoktur.

Şekil (a) A, B ve E makaralarıyla desteklenen bir makası göstermektedir. A, B ve E nin 3 bilinmeyen tepki kuvvetleri vardır. Ancak, $\Sigma F_x = 0$ denklemi uygulanan kuvvetlerin yatay bileşenleri toplamı sıfır olmadıkça, sağlanamaz. Yeterli sayıda kısıtlama olmasına rağmen, bu kısıtlamalar düzgün şekilde düzenlenmediğinden, makas yatay olarak hareket ettirilebilir. Makasın **uygun olmayan şekilde sınırlandırıldığını** söylüyoruz. Üç bilinmeyen belirlenmesinde sadece iki denge denklemi kaldığından, reaksiyonlar statik olarak belirsizdir. Böylece, uygunsuz kısıtlamalar da statik belirsizlik üretir.

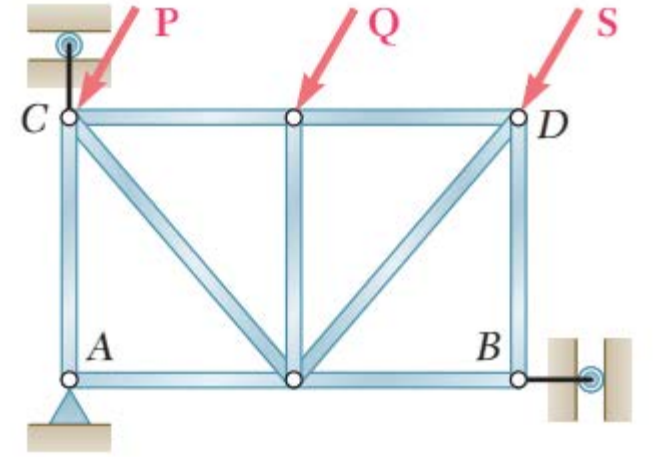


(a)

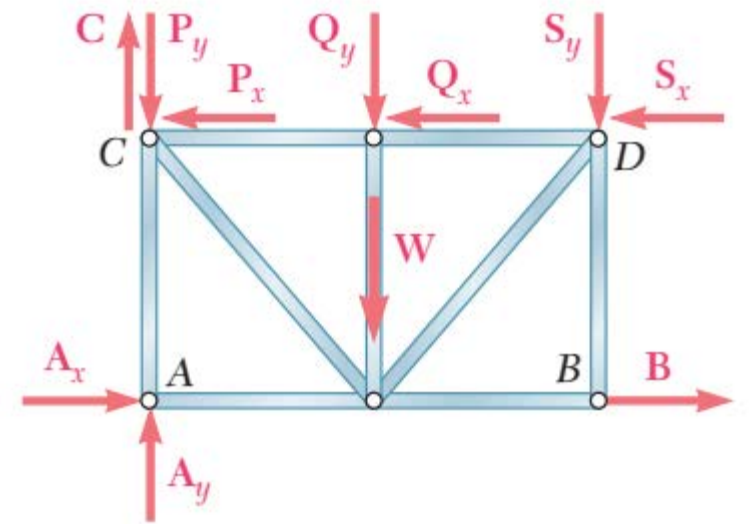


(b)

Şekil (a) 'de gösterilen kiriş uygun olmayan kısıtlamaların ve statik belirsizliğin başka bir örneğidir. Bu makas A'da bir pim ile B ve C'de makaralar tarafından tutulan hepsi dört bilinmeyen içerir. Sadece üç bağımsız denge denklemi mevcut olduğundan, desteklerdeki reaksiyonlar statik olarak belirsizdir. Öte yandan, **B** ve **C** reaksiyonlarının etki çizgisi A dan geçtiği için, $\Sigma M_A=0$ denklemi genel yükleme koşulları altında yeterli değildir. Makas A etrafında döndürebildiğini ve uygunsuz bir şekilde sınırlandırıldığı sonucunu elde ederiz.

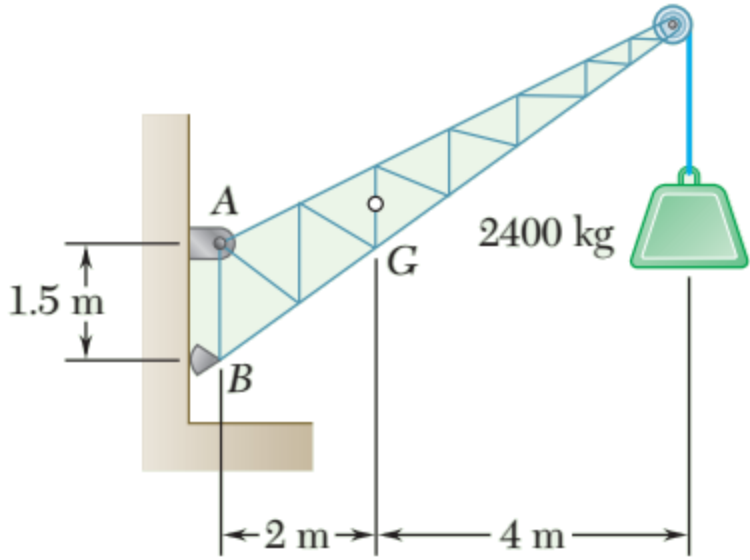


(a)



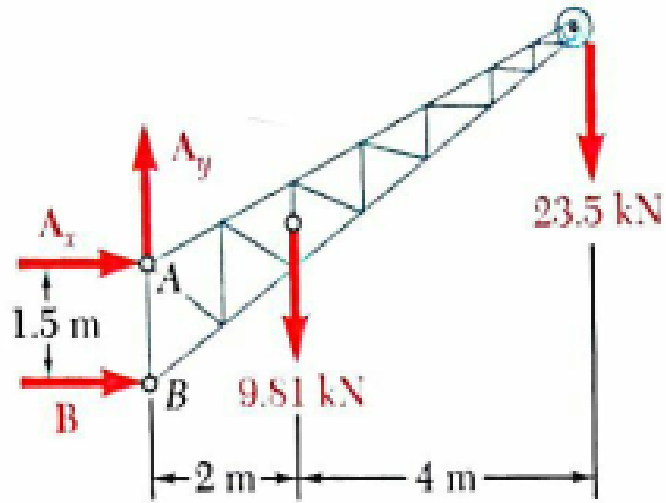
(b)

Örnek problem 4.1



Sabit bir vincin kütlesi 1000 kg'dır ve 2400 kg'lık bir sandığı kaldırmak için kullanılmaktadır. A'daki pim ve B'deki kayıcı mafsallarla yerinde tutulmaktadır. Vincin ağırlık merkezi C noktasındadır. A ile B'deki tepkilerin bileşenlerini bulunuz.

Örnek çözüm 4.1



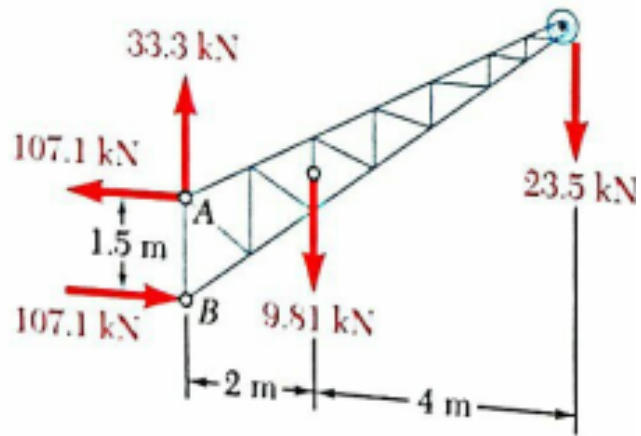
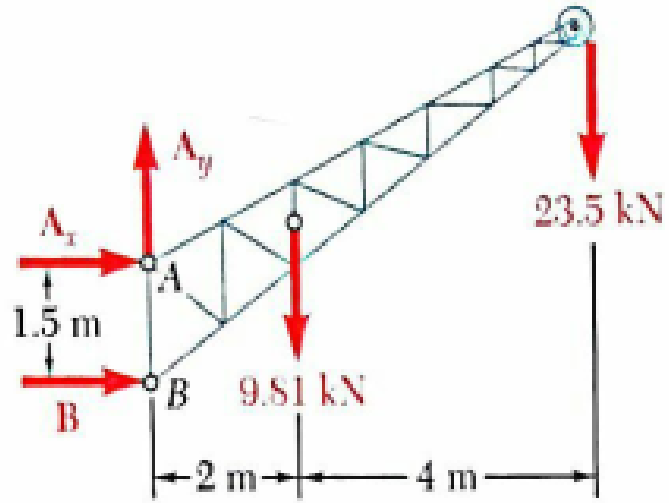
Serbest Cisim Diyagramı. Vincin serbest cisim diyagramı çizilmiştir. Vinç ile sandığın kütesini $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ile çarpıp ve ağırlıkları 9810 N veya 9.81 kN ve 23500 N veya 23.5 kN olarak buluruz. A'daki tepki doğrultusu bilinmeyen bir kuvvettir ve A_x ile A_y bileşenleriyle temsil edilir. B mafsalındaki tepki mafsal yüzeyine diktir, dolayısıyla yataydır. A_x , A_y ve B'nin gösterilen doğrultularda etki ettiğini varsayıyoruz.

B'nin Bulunması. Bütün dış kuvvetlerin A'ya göre momentlerinin toplamını sıfır olarak ifade ederiz. Elde edilen denklemde A_x veya A_y olmayacaktır, çünkü A_x ile A_y 'nin A'ya göre momentleri sıfırdır. Her bir kuvvetin büyüklüğünü A'ya dik uzaklığıyla çarpıp

$$+\uparrow \Sigma M_A = 0: \quad +B(1.5 \text{ m}) - (9.81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) = 0$$
$$B = +107.1 \text{ kN} \quad \mathbf{B = 107.1 \text{ kN} \rightarrow}$$

yazarız. Sonuç pozitif olduğu için, tepki varsayılan yöndedir.

Örnek çözüm 4.1



A_x 'in Bulunması. A_x 'in büyüklüğü bütün dış kuvvetlerin yatay bileşenlerinin toplamını sıfır alarak bulunur.

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad A_x + B &= 0 \\ A_x + 107.1 \text{ kN} &= 0 \\ A_x &= -107.1 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$A_x = 107.1 \text{ kN} \leftarrow$$

Sonuç negatif olduğu için, A_x başlangıçta varsayılan yönün tersinedir.

A_y 'nin Bulunması. Düşey bileşenlerin toplamı da sıfıra eşit olmalıdır.

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 9.81 \text{ kN} - 23.5 \text{ kN} &= 0 \\ A_y &= +33.3 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$A_y = 33.3 \text{ kN} \uparrow$$

A_x ile A_y 'yi vektörel olarak toplarsak A'daki tepkiyi $112.2 \text{ kN} \angle 17.5^\circ$ olarak buluruz.

Sağlama. Bütün dış kuvvetlerin herhangi bir noktaya göre momentlerinin toplamının sıfır olması gerektiğini hatırlayarak elde edilen tepki değerlerinin sağlamasını yapıyoruz. Örnek olarak B noktasını ele alırsak

$$+\uparrow \Sigma M_B = -(9.81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) + (107.1 \text{ kN})(1.5 \text{ m}) = 0$$

yazarız.