TEMEL MEKANİK 2

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali Dayıoğlu

Ankara Üniversitesi Ziraat Fakültesi

Tarım Makinaları ve Teknolojileri Mühendisliği Bölümü

Ders Kitapları:

- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, Elliot R. Eisenberg, 2008, Güven Yayınları, İzmir

  Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Halil Rıdvan Öz, Osman Kopmaz.
- Mühendisler İçin Vektör Mekaniği, Statik, Yazarlar: Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015, Literatür Yayıncılık, İstanbul,

  Çevirenler: Ömer Gündoğdu, Osman Kopmaz.

Diğer Kaynaklar:

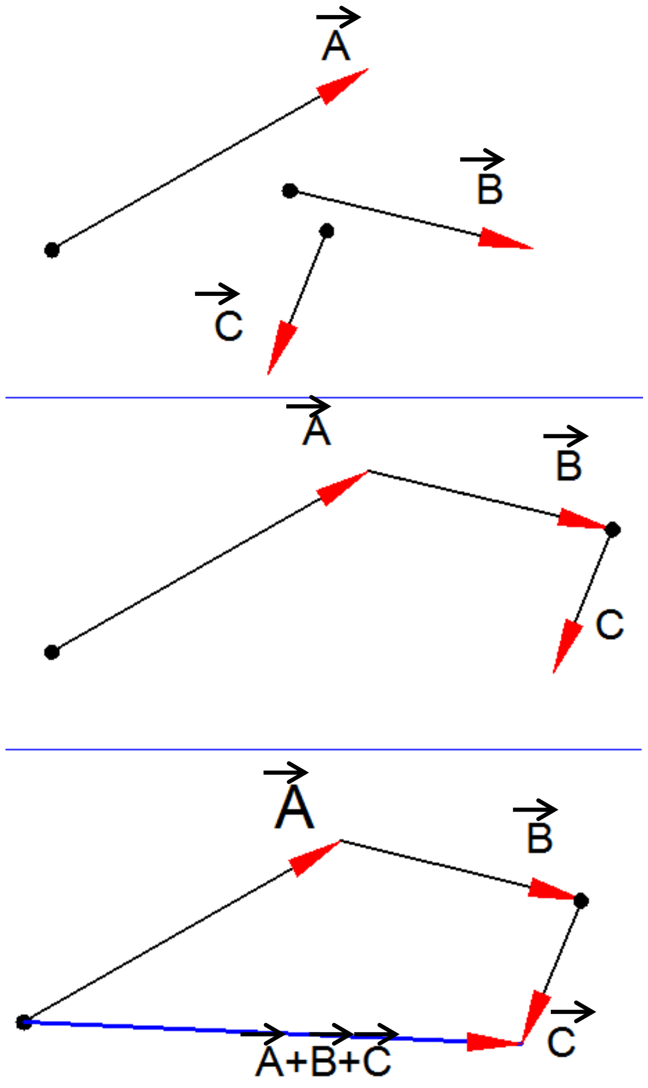
- Ferdinand Pierre Beer, E. Russel Johnston Jr, David F. Mazurek, 2015. Vector Mechanics for Engineers 11e : Statics : SI Units, McGraw Hill, USA.
- Russell C. Hibbeler, 2016. Engineering Mechanics: Statics in SI Units (14e), Pearson Higher Ed USA.

Vektörlerin toplanması (poligon yöntemi)

İkiden fazla vektörün toplanması gerekiyorsa uygulanacak yöntem:

1. Önce herhangi iki vektör anlatılmış olan yöntemlerden birisi ile toplanır.
2. Sonra üçüncü vektör ilk iki vektörün toplamı ile toplanır.
3. Eğer daha başka vektör varsa o da son bulunan toplam vektör ile toplanır.
4. Yukarıda anlatılan işlemler sadece tek bir toplam vektör kalıncaya kadar devam eder.

İkiden fazla vektörün toplanmasında en kolay yol üçgen metodudur. Bu uygulama ile önce tüm vektörler birinin kuyruğu ötekinin başı ile çakışacak şekilde birleştirilir. En sonunda ilk vektörün kuyruğu ile son vektörün başı arasında toplam vektör oluşturulur.



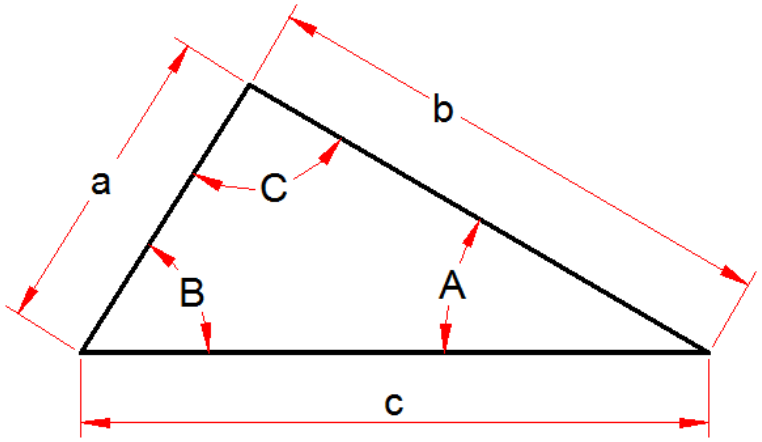
Vektörlerin trigonometrik analizi

Paralelogram veya üçgen metodu ile vektörlerin geometrik analizinin nasıl yapıldığını gördük.

Ancak geometrik analiz kolay olmakla birlikte son derecede hassas çizim ve ölçme gerektirir. Bu ise her zaman mümkün olmayabilir.

Bu durum ise çözüm için trigonometrik hesap kullanılmasını gerektirir.

Vektörlerin trigonometrik analizi için en fazla gereken trigonometrik formüller sinüs ve kosinüs kanunlarıdır.



Sinüs yasası

$$\frac{a}{\mathrm{Sin}A} = \frac{b}{\mathrm{Sin}B} = \frac{c}{\mathrm{Sin}C}$$

Kosinüs yasası

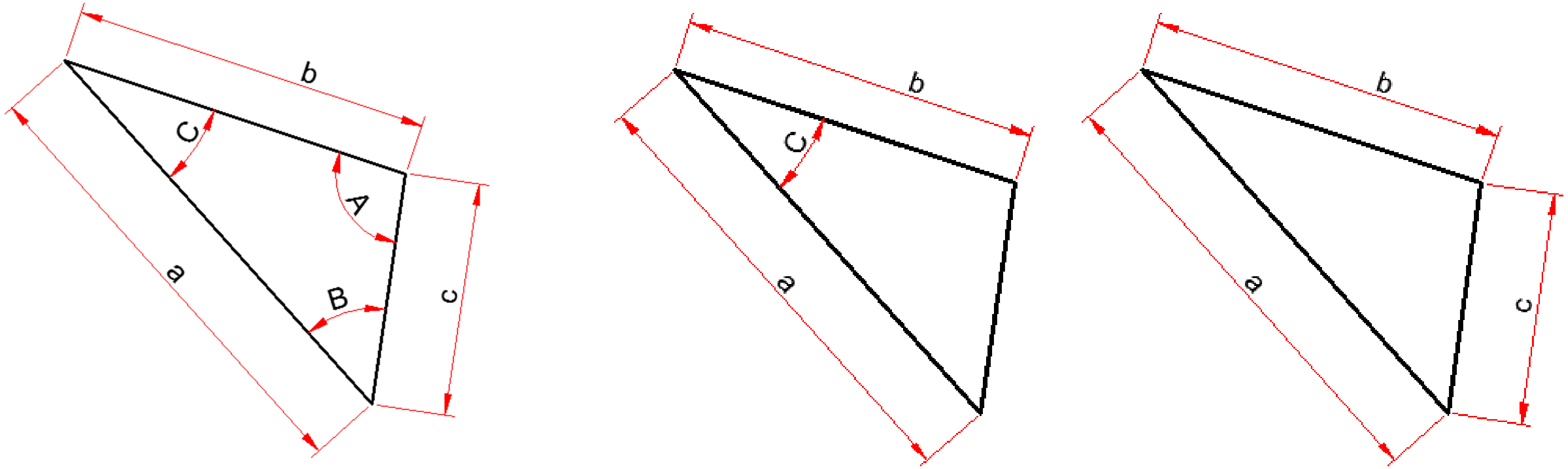
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab * \cos C}$$

HANGİ KOŞULLARDA HANGİ yasa KULLANILIR

Herhangi bir üçgende üçü açı üçü de kenar olmak üzere 6 değer bulunur.

Bunlardan herhangi üçünün bilinmesi diğer üçünün bulunması için yeterlidir

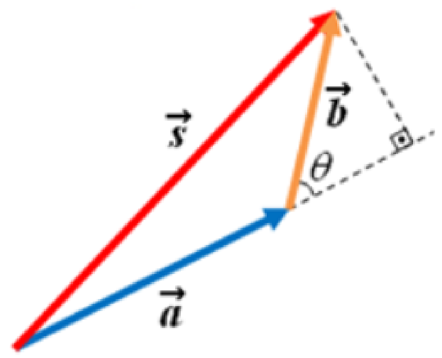
(Sadece üç açının bilinmesi durumu hariç)



$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab * \cos C}$$

$$C = \cos^{-1}\left[\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right]$$

Vektörlerde Geometrik Toplama

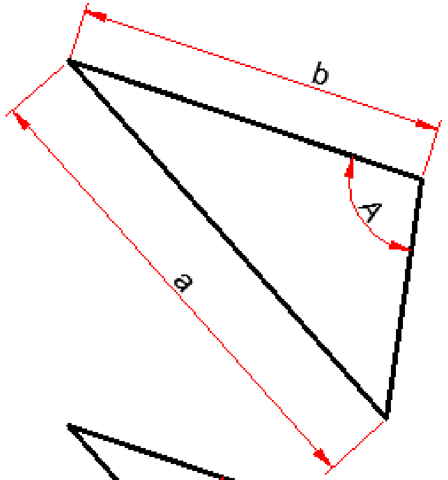


$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

İki vektör arasındaki açı θ olmak üzere s vektörünün büyüklüğü :

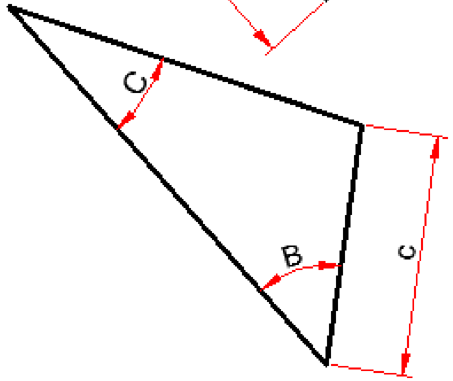
$$s^2 = a^2 + b^2 + 2(a)(b)cos\theta$$

Eğer bilinenler iki kenar ve bunların arasında olmayan bir açı ise (kenarın karşısındaki açı ise)



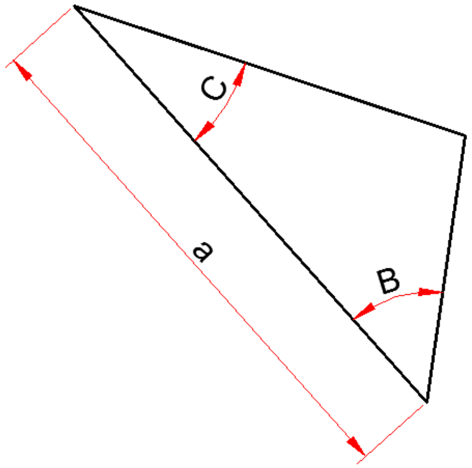
Veya

Bilinenler iki açı ve sadece bir kenar ise



Sinüs yasası kullanılır:

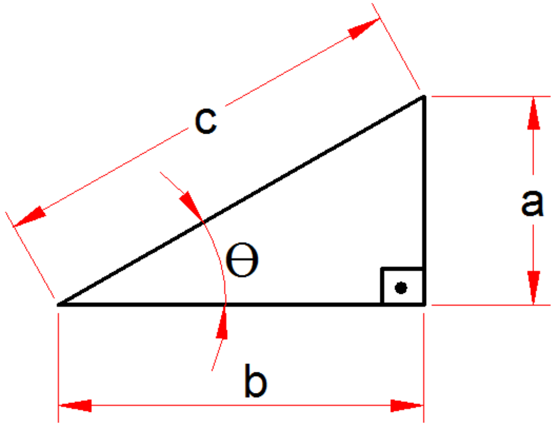
$$\frac{a}{\mathrm{Sin}A}=\frac{b}{\mathrm{Sin}B}=\frac{c}{\mathrm{Sin}C}$$



Eğer bilinen tek kenar bilinen iki açının arasındaki kenar ise iç açılar toplamı 180 derece olduğundan önce bilinmeyen açı bulunur sonra sinüs yasası ile diğer bilinmeyenler bulunur

DİK ÜÇGEN FORMÜLLERİ

Vektörlerin hesaplanmasında diğer önemli trigonometrik formüller orta öğrenim yıllarından öğrenmiş olduğunuz dik üçgen kanunlarıdır. Bunlar;



Pisagor kanunu:
Dik kenarların karesini toplamı hipotenüsün karesine eşittir.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Sinüs kuralı:
Karşı dik kenarın hipotenüse oranı açının sinisüne eşittir.

$$\sin\Theta = a/c$$

Kosinüs Kuralı:
Komşu dik açının hipotenüse oranı açının kosinüsünü verir

$$\cos\Theta = b/c$$

Tanjant kuralı:
Karşı dik kenarın komşu dik kenara oranı açının tanjantını verir.

$$\tan\Theta = a/b$$

Zaman zaman problemlerde vektör açıları derece cinsinden değil dik kenarlar cinsinden verilerek problemlerin daha kolay çözülmesi sağlanmaktadır.

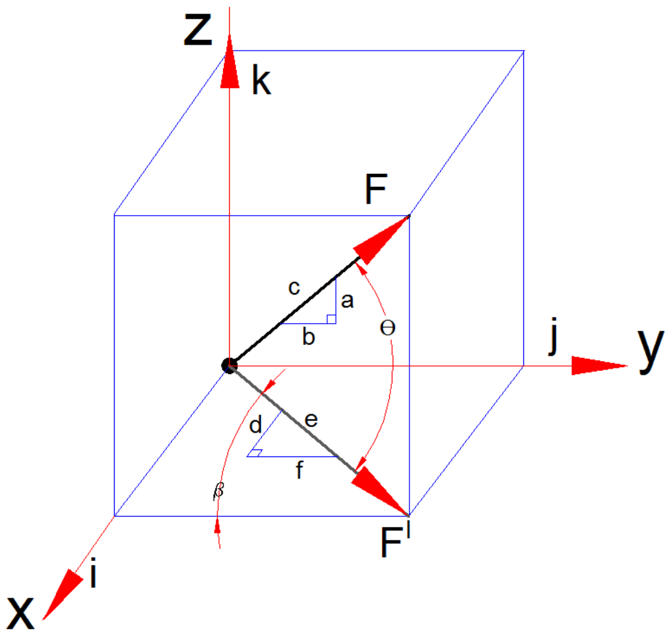
Örnek olarak yandaki resimde F vektörünün açıları dik kenar cinsinden verilmiştir.

Burada F’ değerini bulmak için F değerini cosϴ ile çarpmak yerine cosϴ ya eşit olan b/c ile çapılır.

F’ değerinin x ekseni üzerindeki bileşenini bulmak için F’ *sinβ yerine F’*(d/e) ile çarpılır.

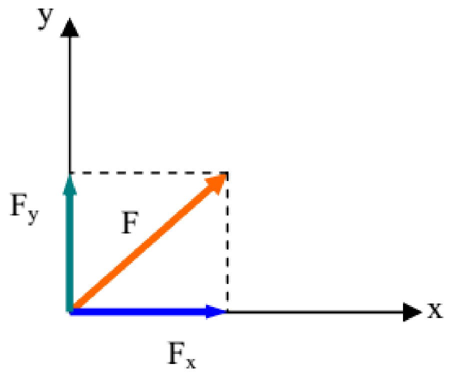
F’ değerinin y ekseni üzerindeki bileşenini bulmak için F’ *cos β yerine F’*(f/e) ile çarpılır.

F değerinin z ekseni üzerindeki bileşenini bulmak için F *sinϴ yerine F*(a/c) ile çarpılır.



Analitik Metot

Bir vektörü (birbirine dik doğrultularda) kartezyen koordinat sisteminde iki bileşene ayırmak mümkündür. Vektörün eksenlerden birisi ile yaptığı açı θ ise .Vektör sin(θ) ve cos(θ) ile çarpılarak dik koordinatlardaki izdüşümü bulunabilir. Şekil'de görüldüğü gibi vektör x ve y eksenleri yönünde bileşenlere ayrılabilir.



Şekil de bir kuvvet için yapılan bu bileşenlere ayırma birden fazla vektör içinde yapılabilir. Sonra bu bileşenler cebirsel olarak toplanırlar. Bütün vektörlerin x yönündeki bileşenleri Rx ve y yönündeki bileşenleri Ry olmak üzere bu işlemler birden çok kuvvet için yapılmış ise,

$$\sum Rx = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + F_{nx}$$

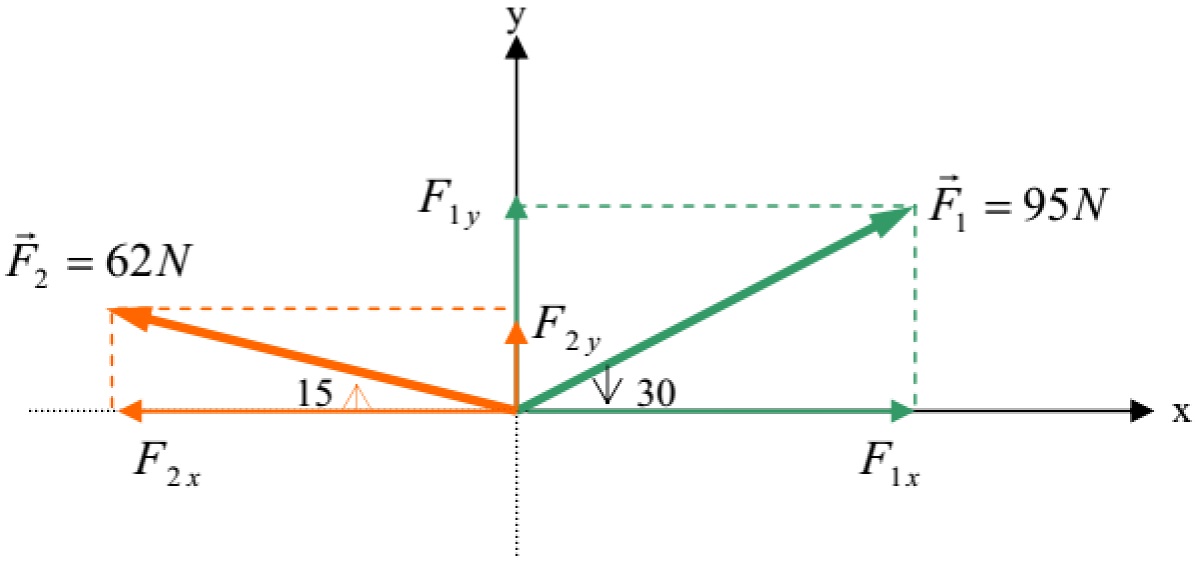
$$\sum Ry = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + F_{ny}$$

Vektörlerin toplamı

$$|R| = \left[\sum (Rx)^2 + \sum (Ry)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{ve} \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{\sum Ry}{\sum Rx}$$

İfadeleri yazılabilir. Eğer R=0 ise $\sum Rx = 0$ ve $\sum Ry = 0$ olması gerektiği toplamanın özelliğinden görülmektedir.

Örnek 1:



$$F_{1x} = 95\cos 30 = 82.3N \qquad F_{1y} = 95\sin 30 = 47.5N$$

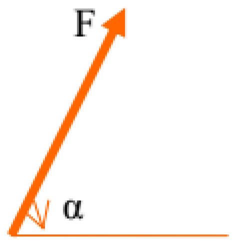
$$F_{2x} = 62\cos 15 = -59.9\ \mathrm{N} \qquad F_{2y} = 62\sin 15 = 16.1N$$

$$\sum F_x = 22.4N \qquad \sum F_Y = 63.6N$$

$$F = \sqrt{(22.4)^2 + (63.16)^2} = 67{,}43\ N$$

$$\alpha = \tan^{-1}(63.6/22.4)$$

$$\alpha = 70{,}6^o$$



Örnek 2:

Vektörler için iki tanım bulunmaktadır

1. Vektörel değer tanımı: Bu tanım vektörün doğrultusu ve yönünü belirtir. Üzerinde ok işareti bulunur.

Örnek; $\vec{F}=(3i-5j+6k)N$

Burada

i: değerin x ekseni üzerinde karşılığı bulunduğunu

j: değerin y ekseni üzerinde karşılığı bulunduğunu

k: değerin z ekseni üzerinde karşılığı bulunduğunu

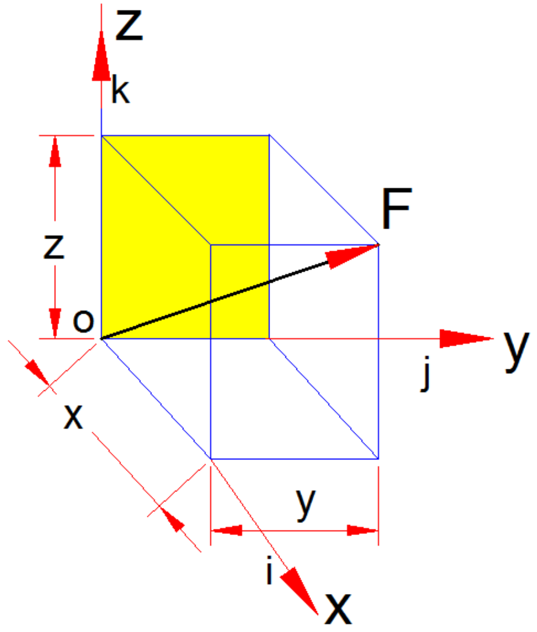
gösterir

2. Vektörün skalar büyüklük tanımı :
   Bu büyüklük vektörün x,y,z eksenleri üzerindeki değerlerin karelerinin kare köküne eşittir. Bu gösterimde ok işareti bulunmaz.

$$F=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Yukarıdaki örnek için F vektörünün skalar büyüklüğü

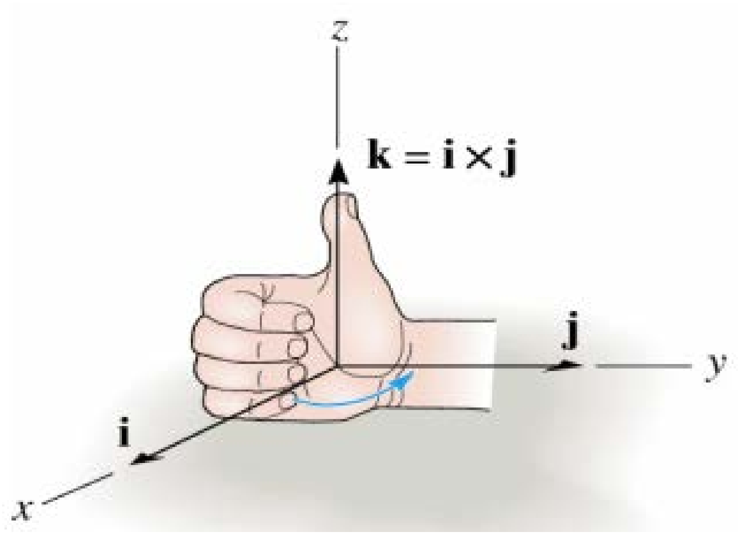
$$F=\sqrt{3^2+(-5)^2+6^2} \qquad \Rightarrow F=8.37N$$



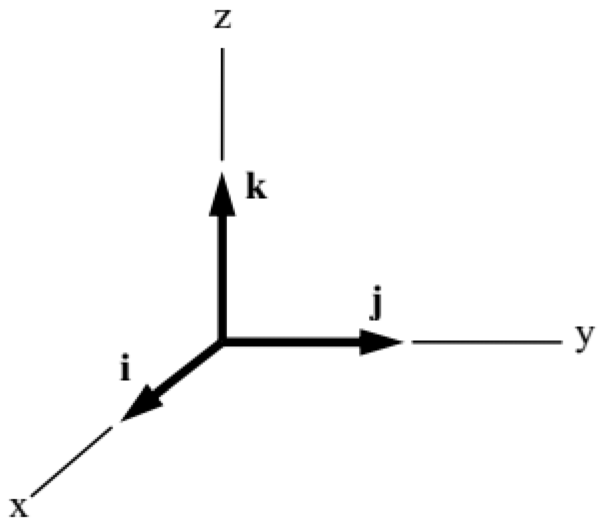
Uzayda vektörler üç dik eksendeki bileşenlerine yazmak ve bunun için birim vektörleri tanımlamak gerekmektedir.

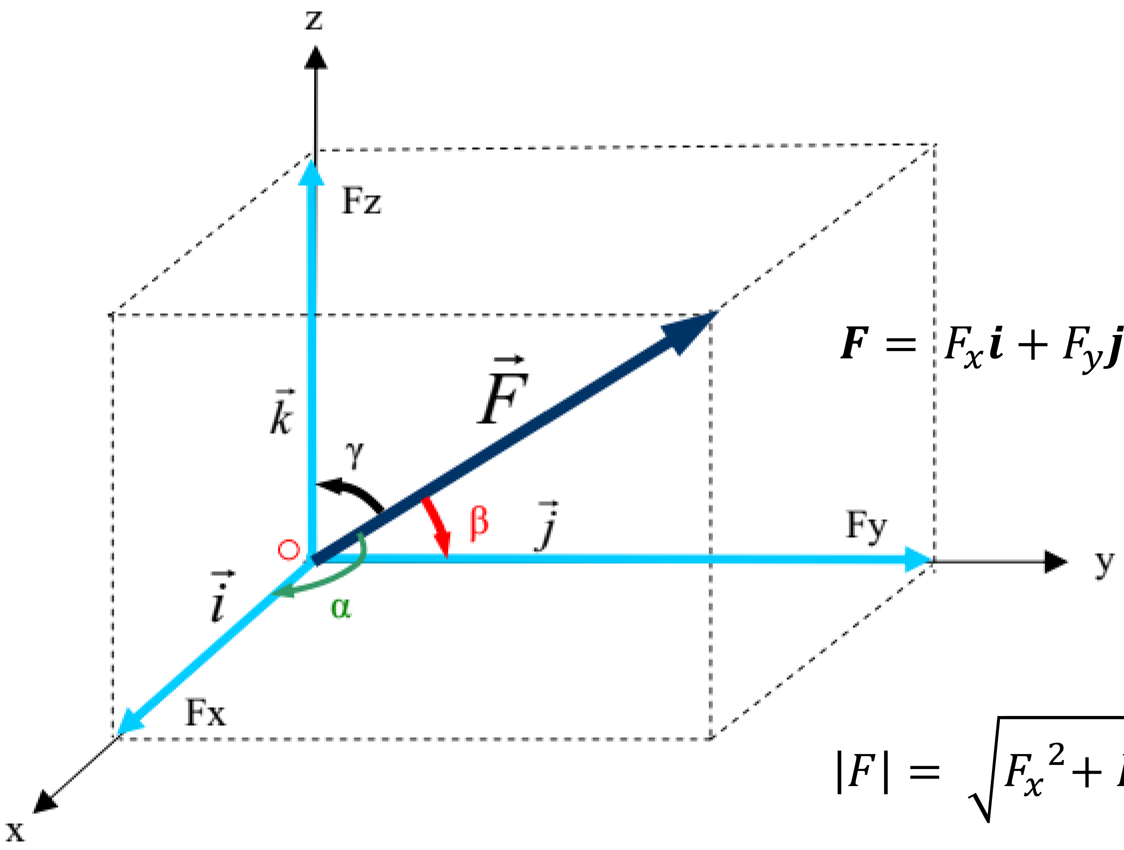
Bu vektörler sırasıyla x,y,z eksenleri boyunca **i, j, k** olarak gösterilir.

Sağ el kuralı:



Bu vektörlerin boyları bir birimdir. Bir skaler ile bir vektörün çarpımında aynı yönde bir vektör vermesi tanımından, uzaydaki bir vektörü aşağıdaki gibi yazabiliriz.





$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$

$$|F| = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}$$

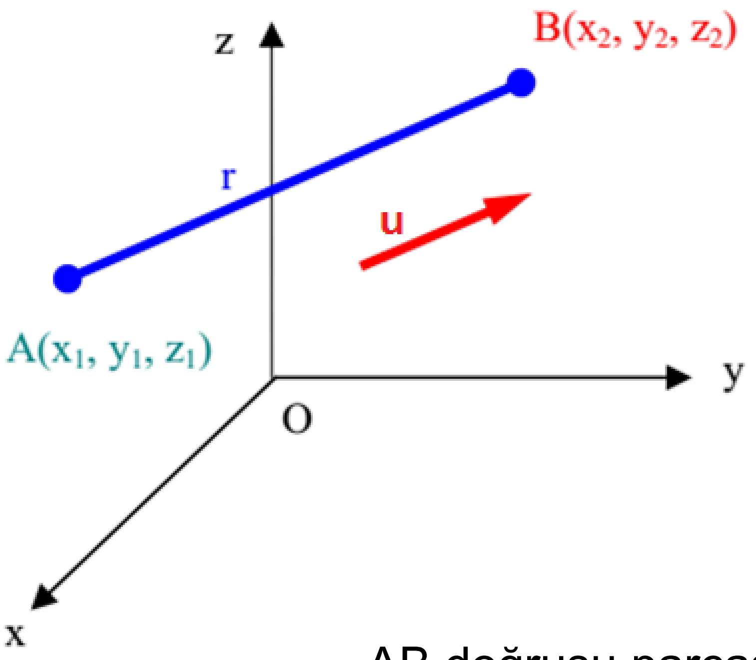
Yön kosinüsleri

Sırasıyla x, y, z eksenleri ile vektörün yaptığı açılar sırasıyla **(**α), **(**β), **(**γ) açılarının yön kosinüsleri ile tanımlanırlar: Bunlar; cos(α), cos(β), cos(γ) dır.

$$\mathrm{Cos}^2(\alpha) + \mathrm{Cos}^2(\beta) + \mathrm{Cos}^2(\gamma) = 1$$

$$\mathrm{Cos}(\alpha) = \frac{F_x}{|F|},\ \mathrm{Cos}(\beta) = \frac{F_y}{|F|},\ \mathrm{Cos}(\gamma) = \frac{F_z}{|F|}$$

Eğer koordinat eksenleri vektörün başlangıcında geçmiyor ve başlangıç noktası $A(x_1, y_1, z_1)$ ve bitim noktası $B(x_2, y_2, z_2)$ olarak verilmiş bir **r** vektörü şöyle yazılabilir.



$$\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

$$\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$|r| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

AB doğrusu parçası için birim vektör:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathrm{r}|}$$

Vektörlerde çarpma işlemi

a) Bir skalerin bir vektörle çarpımı
b) İki vektörün skaler çarpımı
c) İki vektörün vektörel çarpımı
d) ikiden fazla vektörün skaler ve vektörel çarpımı

a) Bir skalerin bir vektörle çarpımı

Skaler sayı a olsun vektör F ise skaler çarpım, **F** = a**r** olarak yazılabilir. Burada **F** vektörünün şiddeti, a skaleri ile r vektörünün şiddetinin çarpımına eşittir.

F' nin doğrultusu **r** ile aynı olup,
a>0 ise **F** vektörü **r** vektörü ile aynı yönde
a<0 ise **F** vektörü **r** vektörü ile tersi yönde
a=0 ise **F** vektörü bir noktaya dönüşür.

Örnek 2:

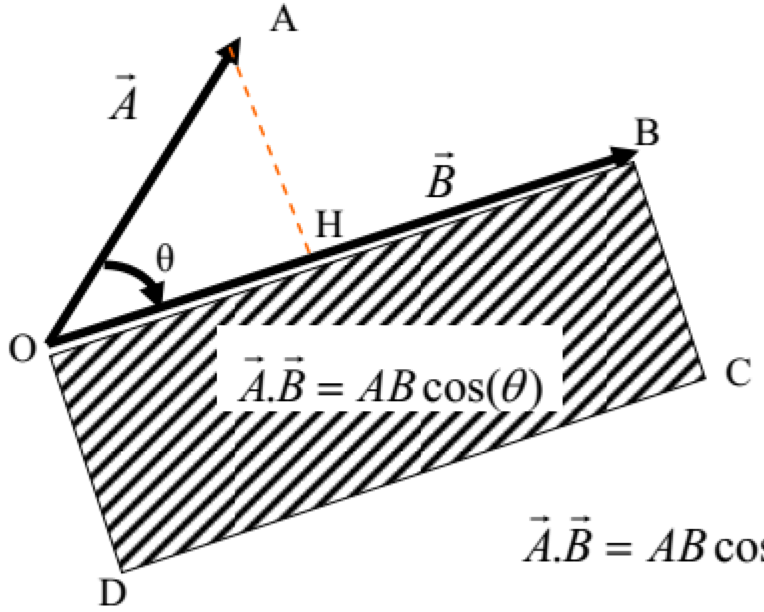
$\vec{F} = 5\vec{i} - 7\vec{j} + 15\vec{k}$ *olarak verildiğine göre* $2\vec{F}$ *ve* $(-4\vec{F})$ *nedir?*

Çözüm:

$2\vec{F} = 10\vec{i} - 14\vec{j} + 30\vec{k}$ ve $-4\vec{F} = -20i + 28\vec{j} - 60\vec{k}$ 'dir.

b) İki vektörün skaler çarpımı

Verilen iki vektör **A** ve **B** olsun. Bu iki vektörün skaler çarpımı;



$OA = \vec{A}$

$OB = \vec{B}$

$OH = OD = A\cos\theta$

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

A skaler çarpım **B** diye okunur.

AB skalerdir.

Şekildeki taralı dikdörtgenin alanını verir.

Eğer iki vektör birbirine dik ise θ=90° ve cos90=0 olduğu için skaler çarpım sıfır olur.

Diğer bir ifade ile skaler çarpımları sıfır olan iki vektör birbirine diktir.

θ = 0° , cos0 = 1 olur. Skaler çarpım, bu iki vektörün şiddetleri çarpımına eşittir.
B birim vektör ise, skaler çarpım A nın B doğrultusundaki bileşeninin şiddetini verdiği şekilde görülmektedir (OH=Acos θ)

Yukarıdaki açıklamalardan i,j,k birim vektörlerinin skaler çarpımı şöyle yazılabir.

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1 \quad \text{ve} \quad \vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$$

Birim vektörler cinsinden verilmiş iki vektör.

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \quad \text{ve} \quad \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

olsun bu iki vektörün skaler çarpımı;

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \text{ olur.}$$

Skaler çarpım (.) ile gösterilmektedir.Bir vektörün kendisiyle çarpımı:

$$\vec{A}.\vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad \text{veya} \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \text{ 'dır.}$$

Buradan şöyle diyebiliriz. Bir vektörün şiddeti kendisiyle skaler çarpımının kareköküdür.

Örnek 3:

$\vec{A} = 7\vec{i} - 8\vec{j} + 3\vec{k}$ vektörünün $\vec{B} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$ vektörü yönündeki bileşenini bulunuz.

$\vec{B} = B.\vec{b}$ şeklinde yazarsak b birim vektörünü hesaplayabiliriz.

B=(4+36+9)$^{(1/2)}$=7 ise, $\vec{b} = \frac{1}{7}(2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k})$'dir.

$\vec{A}.\vec{b} = \frac{1}{7}$((7).(2)+(-6).(-8)+(3)(3))=$\frac{71}{7}$=10.15 bulunur

İki vektörün vektörel çarpımı

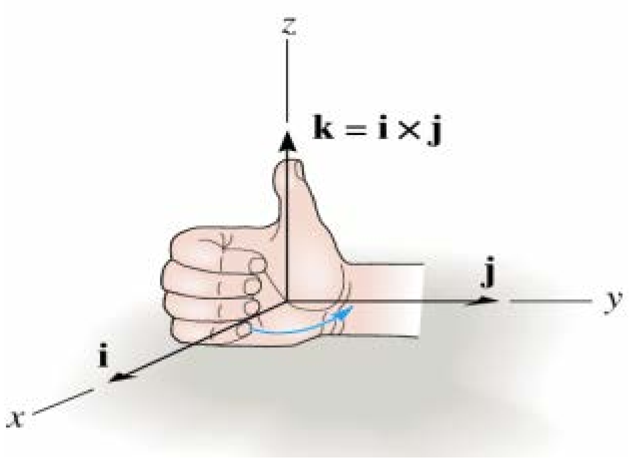
Bilinen iki vektör , $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ ve $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$ olsun, bu iki vektörün vektörel çarpımı;

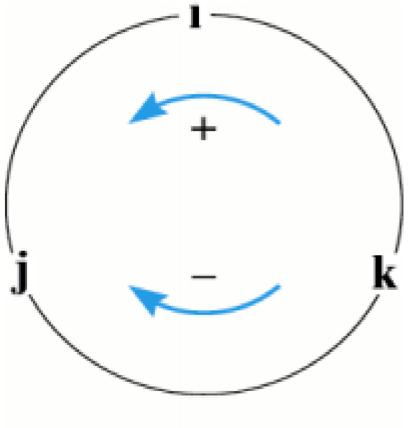
$$\vec{C} = \vec{A}x\vec{B}$$

olarak yazılır ve A vektörel çarpım B diye okunur. Burada çarpım yine bir vektördür. C vektörünün şiddeti;

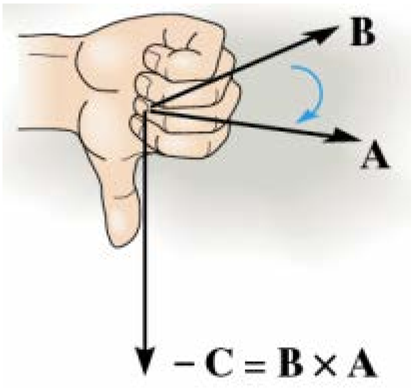
$$C=A.B.Sin\theta\text{' dır.}$$

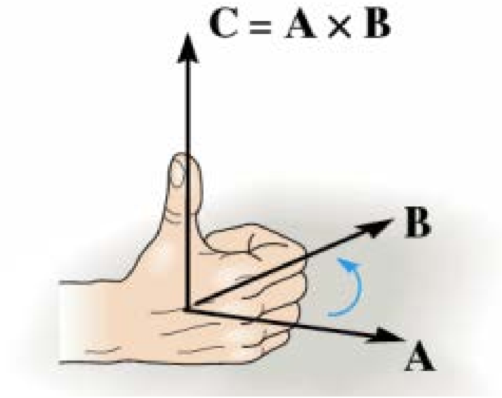
ve A-B vektörlerine diktir. Yönü sağ ***el kuralı***na göre bulunur. Şekil 2.11' de sağ el kuralı ve iki vektörün vektörel çarpımından elde edilen C vektörü ve yönü görülmektedir.





İki vektörün vektörel çarpımı





Burada sırasıyla x,y,z yönlerindeki birim vektörler i,j,k ise bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$\vec{i}\,x\vec{i} = \vec{j}x\vec{j} = \vec{k}x\vec{k} = 0 \quad \text{ve}$$

$$\vec{i}\,x\vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{k}xi = \vec{j}, \quad \vec{j}x\vec{k} = i \quad \text{tersi ise}$$

$$\vec{j}x\vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{i}\,x\vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{k}x\vec{j} = -i\text{'dir.}$$

İki vektörün vektörel çarpımı

- Vektörel çarpımda çarpma sırası önemlidir.

A *x* **B** = - **B** *x* **A**

- Paralel iki vektörün çarpımı sıfırdır.
- Bir başka ifade ile çarpımları sıfır olan iki vektörün, vektörel çarpımı sıfır ise bu iki vektör paraleldir.
- Geometrik olarak vektörel çarpım; çarpılan iki vektörün meydana getirdikleri paralel kenarın alanı olarak tanımlanabilir.
- İki vektör birim vektörler cinsinden verilmiş ise bu iki vektörün vektörel çarpımı aşağıda verilmiştir.

$$\vec{C} = \vec{A} x \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) x (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

İki vektörün vektörel çarpımı

Bu çarpımın sonucu aşağıdaki matrisin determinatının açılımıdır.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$$

Soru: Determinantı çözünüz.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = ?$$

Vektörlerde önemli noktalar

- Bir skaler pozitif yada negatif olan sayısal bir değerdir.
- Bir vektör yönü ve büyüklüğü olan bir niceliktir.
- Bir skalerle çarpılan yada bölünen bir vektör vektörün büyüklüğünü değiştirir.
- Eğer skaler negatifse, vektör yön değiştirir.
- Eğer vektörler aynı yönde ise, sonuç skaler toplam olarak hesaplanır.