Problem-1.8. Newton-Raphson Yöntemi

$f(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon olsun, x_0 -başlangıç değeri olmak üzere

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0,1,2, \ldots$$

yineleme bağıntısı $f(x)$ fonksiyonunun köküne yakınsar. Bu yönteme Newton-Raphson yöntemi adı verilir. x_0 -başlangıç değeri Bolzano teoremi yardımıyla seçilebilir. Yine benzer biçimde aşağıdaki durdurma kurallarından biri kullanılabilir.

1. Belirli adım sayısında işlem yapılır.
2. $|f(x_n)| < \varepsilon$ incelenir.
3. $|x_n - x_{n-1}| < \delta$ incelenir.

Bu yöntem kısaca şöyle açıklanabilir,

$f(x)$ fonksiyonunun $(x_0,\ f(x_0))$ noktasındaki teğet denklemi

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

olarak bulunur. $(x_0,\ f(x_0))$ noktasından $f(x)$ fonksiyonuna çizilen teğetin x eksenini kestiği nokta x_1 olmak üzere,

$y = 0$ için $0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$ olacağından

$$\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0 \; ve \; x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

elde edilir. Benzer biçimde, $(x_1, f(x_1))$ noktasından geçen teğet denkleminin x eksenini kestiği nokta x_2 olmak üzere,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

dir. Bu şekilde devam edildiğinde,

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dizisi elde edilir. Amaç bu dizinin yakınsak olması ve limitinin de $f(x) = 0$ denkleminin çözümü olmasıdır. Bu yönteme Newton-Raphson Yöntemi denir.

Örneğin, $f(x) = x^2 - b$ alınırsa $f'(x) = 2x$ olacağından,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

bağıntısında gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{b}{x_n} \right), n = 0,1,2,...$$

elde edilir. Yani bir sayının karekökünü bulurken kullanılan yöntem Newton-Raphson yönteminin özel bir halidir. $f(x) = x^2 - 24$ fonksiyonunun kökünü Newton-Raphson yöntemiyle bulacak algoritmayı geliştirelim. Bolzano teoremine göre $f(4).f(5) < 0$ olduğundan $x_0 \in [4,5]$ aralığından seçilebilir.

$x_0 = 4$ olsun. Buna göre,

$$x_1 = 4 - \frac{(4)^2 - 24}{2.(4)} = 5$$

$$x_2 = 5 - \frac{(5)^2 - 24}{2.(5)} = 4.90$$

.

.

.

şeklinde hesaplanır. Durdurma kuralı $|x_n - x_{n-1}| < \delta$ için algoritma adımları aşağıdaki gibidir.

A1. *x0* başlangıç değerini GİR/OKU

A2. *DELTA* sayısını çok küçük olacak şekilde GİR/OKU

A3. *x1=x0-(x0^2-24)/(2*x0)* al

A4. EĞER |*x1-x0*|<*DELTA* İSE DUR

A5. *x0=x1* al

A6. A3'e GİT

```
INPUT "BASLANGIC DEGERI=", x0
INPUT "DELTA=", DELTA
A3:
x1 = x0 - (x0 ^2 -24) / (2*x0)
PRINT "YAK KOK=", x1
IF ABS(x1 - x0)< DELTA THEN END
x0 = x1
GOTO A3
```