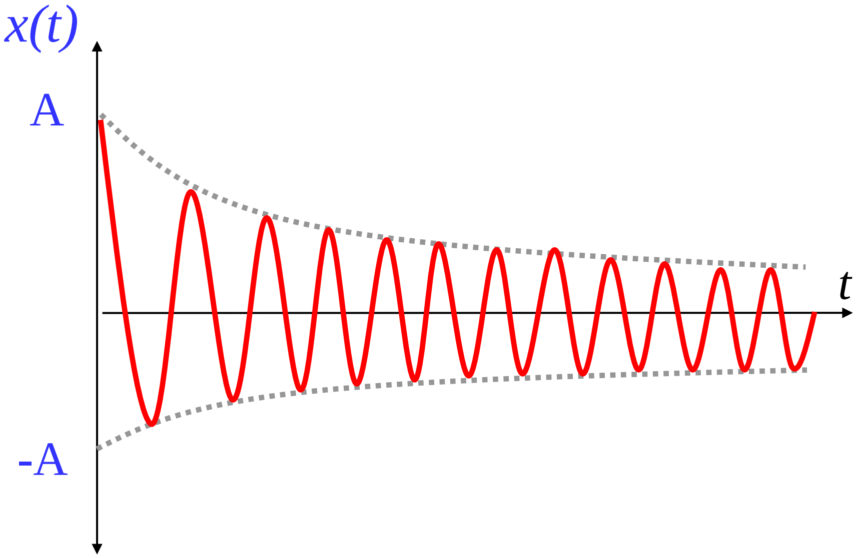
Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği Bölümü

FZM210 Dalgalar ve Optik

Prof. Dr. Hüseyin Sarı

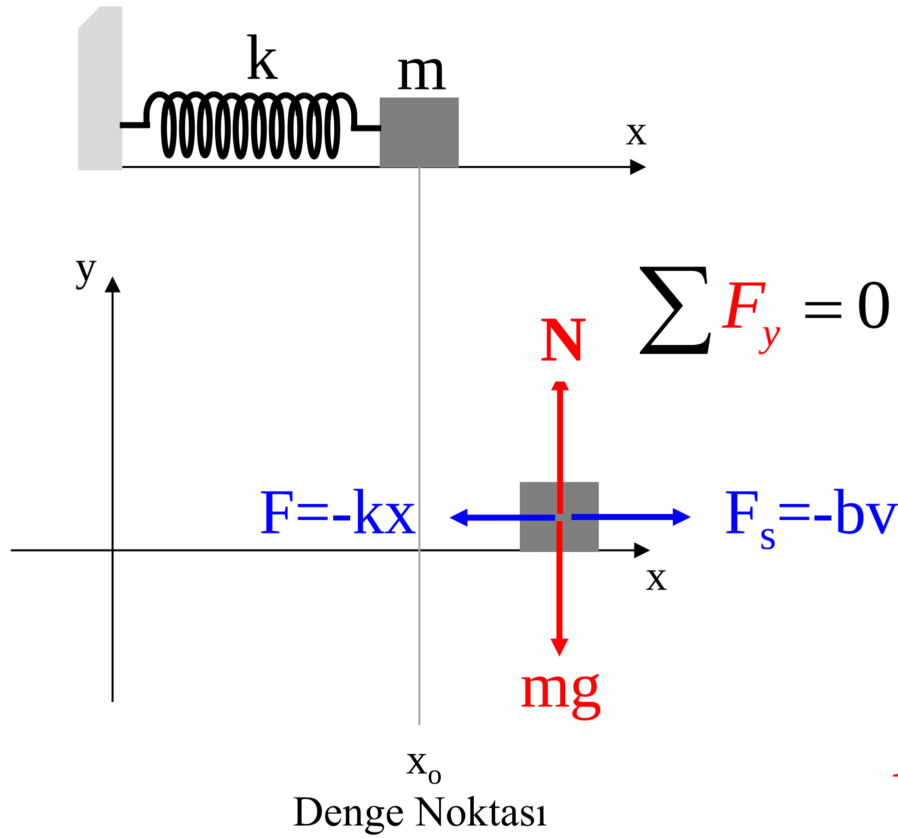
Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Fizik Mühendisliği Bölümü

Sönümlü Harmonik Hareket (SHH)



Sönümlü Harmonik Hareket (SHH)

Sürtünmenin olduğu bir ortamda yatay düzlemde bir yaya bağlı m kütlesinin hareketini inceleyelim



$$\sum F_y = 0$$

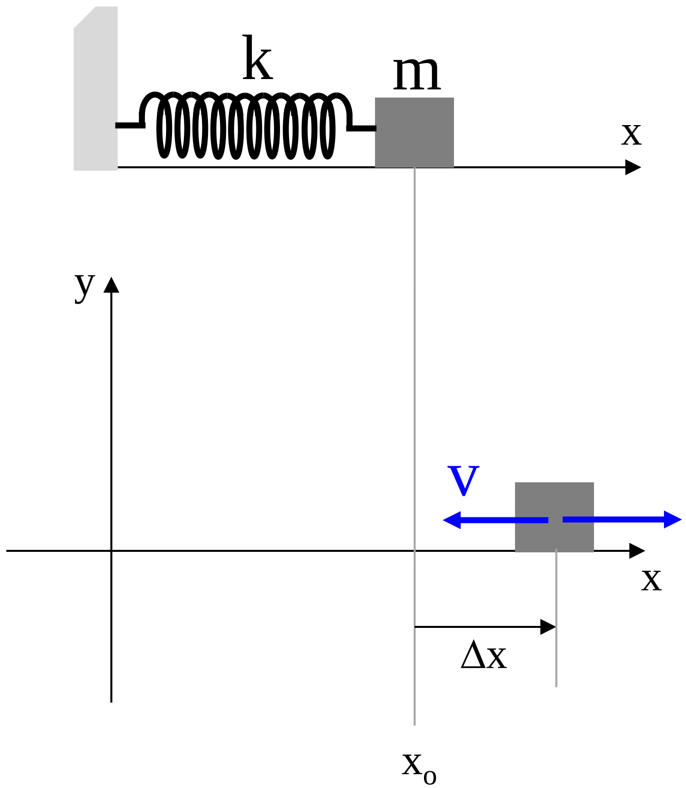
$$\sum F_x \neq 0$$

$$F_y = -mg + N = 0$$

Yay kuvvetinin (-kx) yanı sıra ortamın sürtünmeli (korunumsuz kuvvet) ve sürtünme kuvvetinin F=-bv şeklinde hızla orantılı olduğunu düşünelim.

Sönümlü Harmonik Hareket(SHH)-Sürtünme Kuvveti

Yaya bağlı m kütlesine eden kuvvetler



F_s=-bv

Bildiğimiz diğer sürtünme kuvveti

$$F_{sürtünme} = -N\mu_s = -mg\mu_s$$

formu. Burada sürtünme kuvveti N kuvvetin büyüklüğü ile orantılıdır.

b sabiti, hızla orantılı sürtünme kuvveti katsayısıdır ve *sönüm sabiti* olarak adlandırılır. Boyutu [M/T] dir.

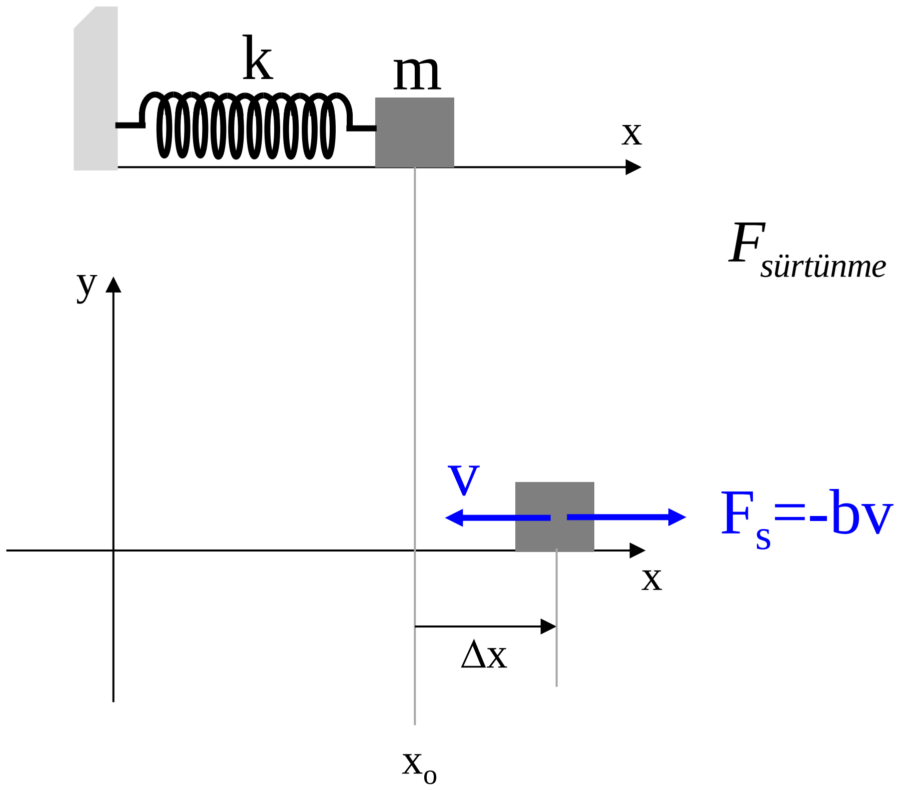
Sürtünme kuvvetinin (F_s) hızla (v) orantılı olduğunu düşünelim.

$$F_{sürtünme} = -bv = -b\frac{dx}{dt}$$

Sürtünme kuvveti hareket yönüne ters yönde etki eder ve korunumsuzdur.

b: *Sönüm sabiti*

Hareket Denklemini Türetmeden Önce…



$$F_{sürtünme} = -bv = -b\frac{dx}{dt}$$

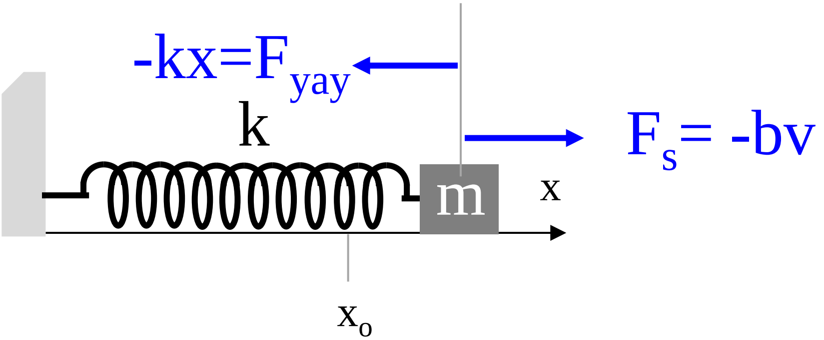
Hareketin nasıl olacağını sürtünme katsayısı **b** ve yay sabiti **k** belirleyecektir.

Eğer **k**, **b**’den ***<u>büyükse</u>***, m kütlesi bir süre salınım yapacak ama sonunda durulacaktır.

Eğer **k**, **b**’den ***<u>küçükse</u>*** (orana bağlı olarak) sistem salınım yapmaya fırsat bulamadan durulacaktır.

Sönümlü Harmonik Hareket(SHH)-Hareket Denklemi

m kütlesinin hareket denklemini bulabilirsek x(t), cisme ait bütün bilgileri edinmiş oluruz.



$$F_{sürtünme} = -bv = -b\frac{dx}{dt}$$

F_{yay} kuvveti konum,

$F_{sürtünme}$ kuvveti ise hıza ters yöndedir

$$F_{net} = F_{yay} + F_{sürtünme}$$

$$F_{net} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

m kütlesinin hareket denklemi: $$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Bu, ikinci dereceden (*2 kez türev içeren*), doğrusal (*türevli terimin karesi yok*), homojen (*eşitliğin sağ tarafı sıfır*) **diferansiyel denklem**-dir.

Sönümlü Harmonik Hareket-Hareket Denklemi

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0$$

Sönümlü Harmonik Hareket Denklemi

Her tarafı m'e bölersek:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{b}{m}\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{k}{m}\right)x=0$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü BHH'de olduğu gibi basit değildir!

Doğal Açısal Frekans

$$\omega_o^2\equiv\frac{k}{m}$$

Sönüm Katsayısı

$$\gamma\equiv\frac{b}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_o^2x=0$$

Çözüm önerisi: $x(t)=Ae^{st}$

A ve **s** bilinmeyen niceliklerdir. s, önerilen çözümü diferansiyel denklemde yerine yazarak elde edilen eşitlikten; **A** ise başlangıç koşullarının yardımı ile bulunabilir.

$$\left(s^2+\gamma s+\omega_o^2\right)Ae^{st}=0$$

(Ae^{st} sıfır olamayacağı için)

Diferansiyel denklemi cebirsel denkleme dönüştürmüş oluyoruz.

$$s^2+\gamma s+\omega_o^2=0$$

İkinci dereceden cebirsel denklem. İki kök vardır ve kökler gerçek veya karmaşık sayı olabilir.

Sönümlü Harmonik Hareket-Çözümler

$$s^2 + \gamma s + \omega_o^2 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_o^2}}{2}$$

$$s_{1,2} = \frac{-\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}$$

$$as^2 + bs + c = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha \pm i\omega$$

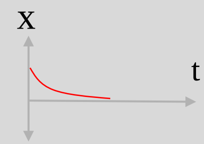
$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad b^2 > 4ac$$

$$\omega = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad b^2 < 4ac$$

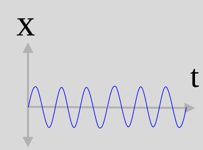
$$s_{1,2} = \underbrace{-\frac{\gamma}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}}_{\omega_s}$$

$$x(t) = Ae^{st}$$

$$x(t) = e^{-at}$$



$$x(t) = e^{iat} = \cos at + i \sin at$$



$$\omega_s = \sqrt{\omega_o^2\left(\left(\frac{\gamma}{2\omega_o}\right)^2 - 1\right)} = \omega_o\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2\omega_o}\right)^2 - 1} = i\omega_o\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_o}\right)^2}$$

$$x(t) = Ae^{(-\alpha \pm i\omega_s)t}$$

$$\omega_s = \omega_o\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_o}\right)^2}$$

Açısal frekans (SHH) — ω_s

Açısal frekans (BHH) — ω_o

α=Her zaman gerçek (ve negatif);

ω=Sürtünme katsayısı **b** ve yay sabiti **k**'nın büyüklüklerine bağlı olarak: (1) gerçek, (2) karmaşık veya (3) sıfır olabilir.

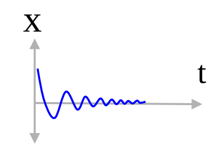
Sönümlü Harmonik Hareket-Çözümler

$$s_{1,2} = \underbrace{-\frac{\gamma}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}}_{\omega_s} \qquad x(t) = Ae^{(-\alpha \pm i\omega_s)t}$$

$$\Delta = \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_o^2} \equiv \omega_s$$

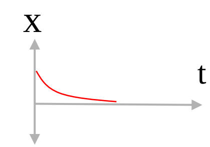
γ ve ω_o değerlerine bağlı olarak olası üç durum sözkonusu:

1. Durum: $\gamma < 2\omega_o \Rightarrow \omega_s = \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_o^2} < 0$ $\quad x(t) = Ae^{(-\alpha \pm i\omega_s)t}$



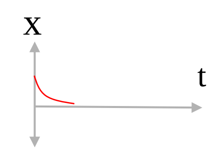
Hafif Sönüm (Underdamping)

2. Durum: $\gamma = 2\omega_o \Rightarrow \omega_s = \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_o^2} = 0$ $\quad x(t) = Ae^{(-\alpha)t}$



Kritik Sönüm (Critical Damping)

3. Durum: $\gamma > 2\omega_o \Rightarrow \omega_s = \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_o^2} > 0$ $\quad x(t) = Ae^{(-\alpha \pm \omega_s)t}$



Aşırı Sönüm (Overdamping)

Durum-1: Hafif Sönüm (Underdamping)

$$\boxed{\gamma < 2\omega_o \Rightarrow \omega_s = negatif}$$

$$s_{1,2} = \underbrace{-\frac{\gamma}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}}_{\omega_s}$$

Ödev-1:
Çözümün gerçek olabilmesi için $C_2 = C_1^*$ olduğunu gösteriniz.

$$x(t) = Ae^{(-\alpha \pm i\omega_s)t}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm i\omega_s$$

$$x(t) = C_1 e^{(-\gamma/2 + i\omega_s)t} + C_2 e^{(-\gamma/2 - i\omega_s)t}$$

$$x(t) = e^{-\gamma/2t}\left(C_1 e^{+i\omega_s t} + C_2 e^{-i\omega_s t}\right)$$

$$C_1 = Ce^{i\phi}$$

$$C_2 = C_1^* = Ce^{-i\phi}$$

$$x(t) = e^{-\gamma/2t}\left(Ce^{+i\omega_s t}e^{+i\phi} + Ce^{-i\omega_s t}e^{-i\phi}\right)$$

$$x(t) = Ce^{-\gamma/2t}\left(e^{+i(\omega_s t + \phi)} + e^{-i(\omega_s t + \phi)}\right)$$

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

A ve ϕ başlangıç koşullarından bulunur.

$$x(t) = 2Ce^{-\gamma/2t}\cos(\omega_s t + \phi) = Ae^{-\gamma/2t}\cos(\omega_s t + \phi) \quad A \equiv 2C$$

$$\omega_s = \omega_o\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_o}\right)^2}$$

$$\boxed{x(t) = Ae^{-(\gamma/2)t}\cos(\omega_s t + \phi)}$$

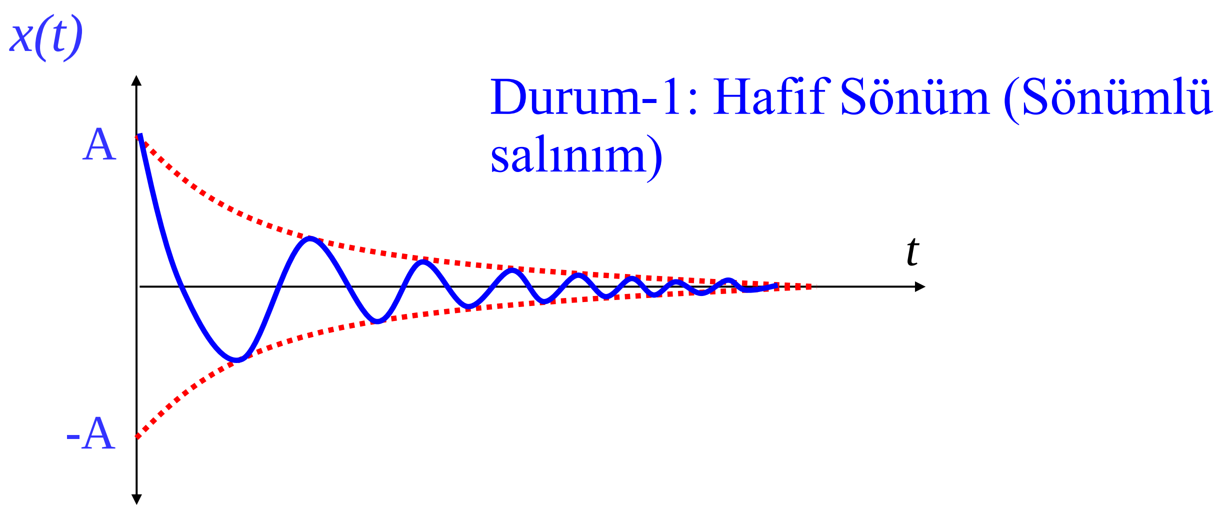
Durum-1: Hafif Sönüm (Underdamping)

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\cos\left(\omega_s t + \phi\right)$$

A ve ϕ başlangıç koşullarından bulunur.

$$\omega_s = \omega_o\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{2\omega_o}\right)^2}$$

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\cos\left(\omega_s t + \phi\right)$$



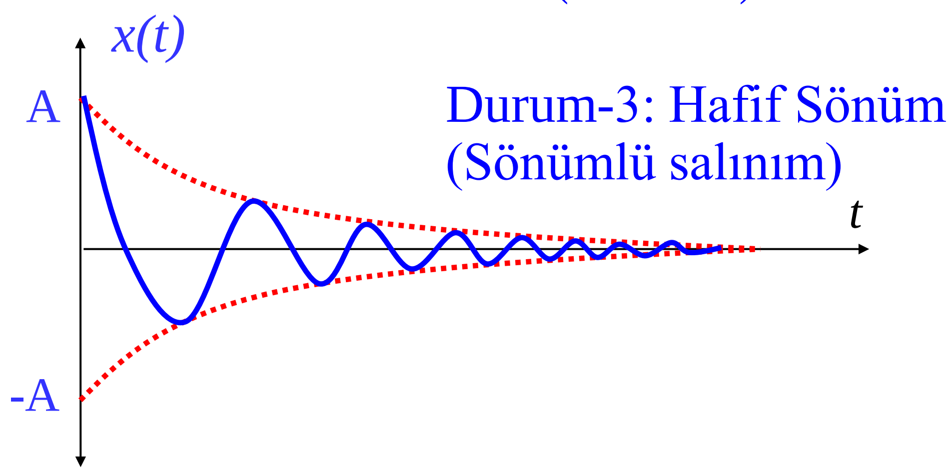
m kütlesi denge noktası etrafında ω açısal frekansı ile (sönüm katsayısı (b) yay sabitinden (k) küçük olduğu için) salınım hareketi yapar. Hareketin genliği (A) zamana bağlı olarak azalır. Genliğin sıfıra düştüğü zaman içersinde frekansın büyüklüğüne bağlı olarak birkaç kez salınım hareketi yapmış olur. t →∞ genlik sıfıra ulaşınca hareket durur.

Sönümün çok küçük olduğu durum ($\gamma << \omega_o$)

$$x(t) = Ae^{(-\alpha \pm i\omega_s)t}$$

$$\frac{b}{2m} < \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_s = negatif \qquad s_{1,2} = -\alpha \pm i\omega_s \qquad x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos\left(\omega_s t + \phi\right)$$

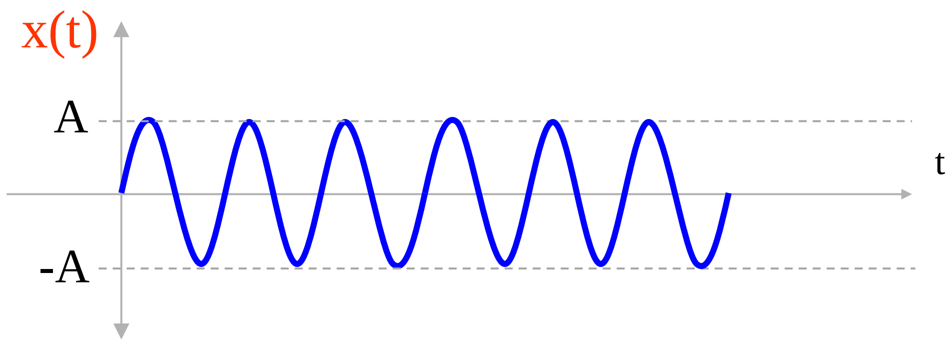
$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}\cos\left(\omega_s t + \phi\right)$$



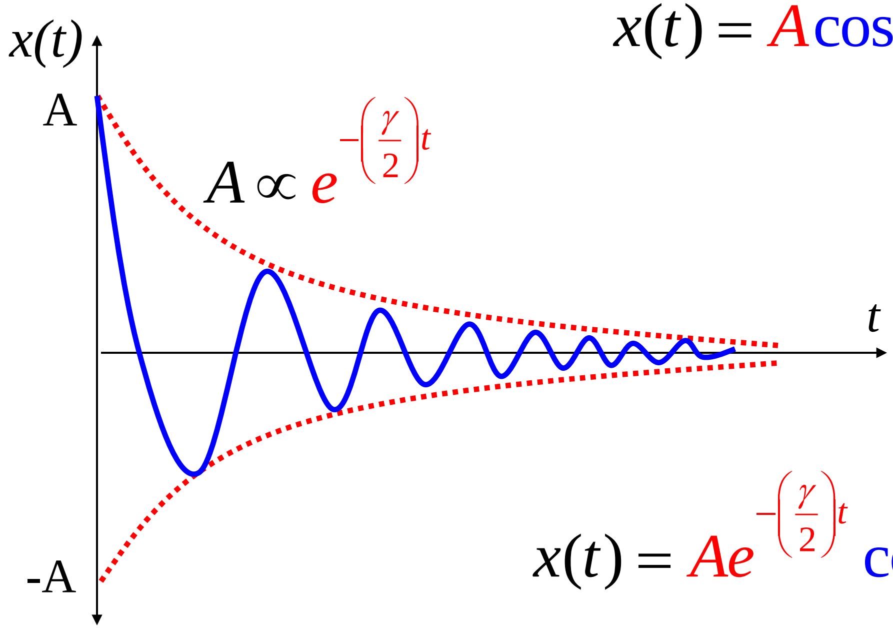
m kütlesi denge noktası etrafında ω açısal frekansı ile (sönüm katsayısı (b) yay sabitinden (k) küçük olduğu için) salınım hareketi yapar. Hareketin genliği (A) zamana bağlı olarak azalır. Genliğin sıfıra düştüğü zaman içersinde frekansın büyüklüğüne bağlı olarak birkaç kez (Q faktörü kadar) salınım hareketi yapmış olur. t →∞ genlik sıfıra ulaşınca hareket durur.

Durum-1: Hafif Sönüm (Underdamping)-Genlik

SHH'de genlik zamanla azalır. Ne kadar hızlı azaldığını belirleyen ise sönüm katsayısı (b)'dir.



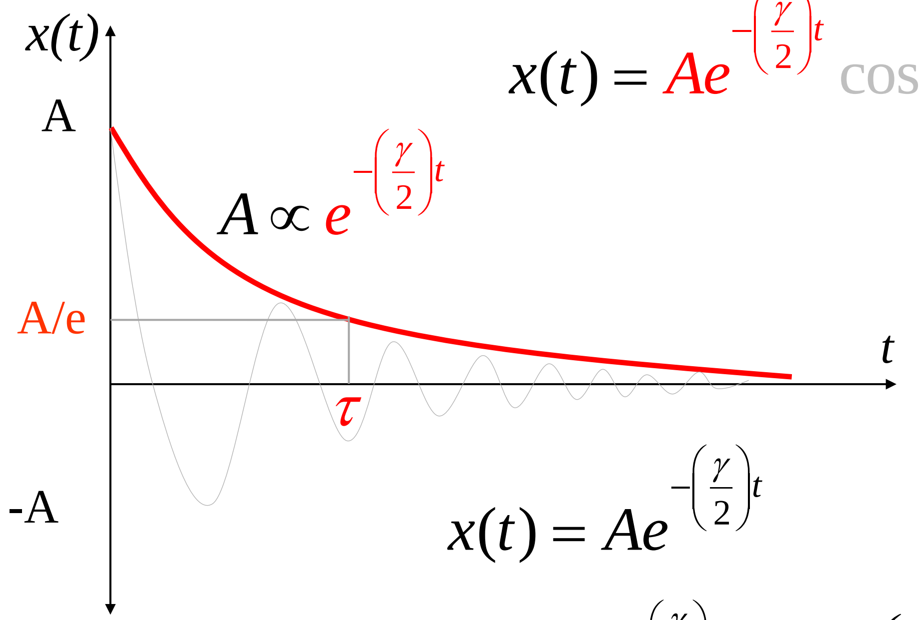
$$x(t) = A\cos\left(\omega_o t + \phi\right)$$



$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\cos\left(\omega_s t + \phi\right)$$

Genlik-Ortalama Ömür

SHH’de genlik zamanla azalır. Ne kadar hızlı azaldığını belirleyen ise sönüm katsayısı (b)’dir.



$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\cos\left(\omega_s t + \phi\right)$$

$$A \propto e^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}$$

Başlangıçtaki genliğin 1/e değerine düşmesi için geçen zaman hareketin *zaman sabiti*dir (τ)

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}$$

$$\frac{A}{e} = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)\tau} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(e^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)\tau}\right)$$

$$-1 = -\left(\frac{\gamma}{2}\right)\tau \Rightarrow \tau = \frac{2}{\gamma}$$

Ortalama ömür veya hareketin zaman sabiti:

$$\boxed{\tau = \frac{2}{\gamma} = \frac{2m}{b}}$$

Durum-1: Hafif Sönüm (Underdamping)-Periyot

SHH'de açısal frekans, BHH'nin açısal frekansından daha küçüktür. Sönüm katsayısı (b) açısal frekansın ne kadar küçük olduğunu belirlemektedir. Bunun bir sonucu olarak periyot daha büyüktür.

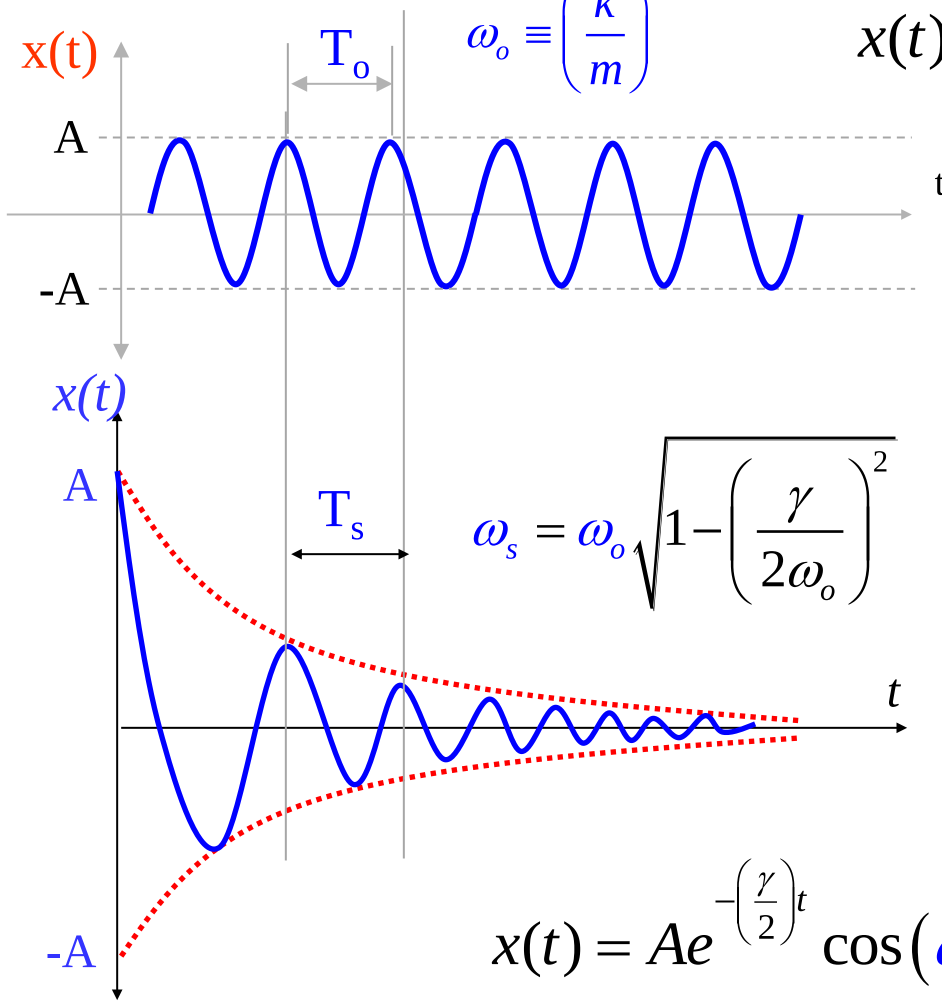
$$\omega_o > \omega_s$$

$$T_o < T_s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

$$x(t) = A\cos\left(\omega_o t + \phi\right)$$



$$\omega_s = \omega_o\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{2\omega_o}\right)^2}$$

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\cos\left(\omega_s t + \phi\right)$$

is smaller than the natural frequency,

However, this distinction is generally irrelevant, because if is large enough to make appreciably from , then the motion becomes negligible after a few cycles anyway.

For example, if from by even just then you can show that this implies that So after just two cycles (that is, when *!* the damping factor equals

Durum-1: Hafif Sönüm (Underdamping)-Enerji

Ödev-2:

SHH'de hızın

$$v(t) = -Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\left(\frac{\gamma}{2}\cos(\omega_s t+\phi)+\omega_s\sin(\omega_s t+\phi)\right)$$

şeklinde verildiğini gösteriniz.

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\cos(\omega_s t+\phi)$$

$$\boxed{v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\left(-\frac{\gamma}{2}\cos(\omega_s t+\phi)-\omega_s\sin(\omega_s t+\phi)\right)}$$

Enerji: $E = U + K$

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Ödev-3:

SHH'de mekanik enerjinin

$$E = \frac{1}{2}mA^2e^{-\gamma t}\left(\frac{\gamma^2}{4}\cos(2\omega_s t)+\frac{\gamma\omega_s}{2}\sin(2\omega_s t)+\omega_o^2\right)$$

şeklinde verildiğini gösteriniz.

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mA^2e^{-\gamma t}\left(\frac{\gamma^2}{4}\cos(2\omega_s t)+\frac{\gamma\omega_s}{2}\sin(2\omega_s t)+\omega_o^2\right)}$$

Enerji, frekansı $2\omega_s$'dir. Bu da bir periyot boyunca enerjinin azalacağını söylemektedir.

Sönümlü Harmonik Hareket-Enerji

$$E=\frac{1}{2}mA^2e^{-\gamma t}\left(\frac{\gamma^2}{4}\cos\left(2\omega_s t\right)+\frac{\gamma\omega_s}{2}\sin\left(2\omega_s t\right)+\omega_o^2\right)$$

$$<E>=\frac{1}{2}mA^2e^{-\gamma t}\left(<\frac{\gamma^2}{4}\cos\left(2\omega_s t\right)>+<\frac{\gamma\omega_s}{2}\sin\left(2\omega_s t\right)>+\omega_o^2\right)$$

<sinθ>=<cosθ>=0

Enerjinin zaman ortalaması: $\langle E\rangle=\frac{1}{2}m\omega_o^2A^2e^{-\gamma t}=\frac{1}{2}kA^2e^{-\gamma t}$ $\quad k=m\omega_o^2$

Ortalama enerji BHH olduğu gibi genliğin karesi ile orantılıdır. SHH'genlik üstel olarak azalmaktadır.

$$\langle E\rangle=\frac{1}{2}k\left(Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\right)^2=\frac{1}{2}kA^2e^{-\gamma t}=\frac{1}{2}kA^2(t)$$

BHH'de Enerji

$$\langle E\rangle=\frac{1}{2}kA^2$$

Ortalama enerjinin zamanla değişimi:

$$\frac{d\langle E\rangle}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kA^2e^{-\gamma t}\right)=-\gamma\left(\frac{1}{2}kA^2e^{-\gamma t}\right)=-\gamma<E>$$

Ortalama enerji, sönüm katsayısı oranında zamanla azalmaktadır.

$$\boxed{\frac{d\langle E\rangle}{dt}=-\gamma\langle E\rangle}$$

Durum-2: Aşırı Sönüm (Overdamping)

$$s_{1,2} = \underbrace{-\frac{\gamma}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}}_{\omega_s}$$

$\gamma > 2\omega_o \Rightarrow \omega_s = pozitif$ $\qquad s_{1,2} = -\alpha \pm \omega_s$

$$x(t) = Ae^{(-\alpha \pm \omega_s)t}$$

$$x(t) = Ae^{-(\alpha+\omega_s)t} + Be^{-(\alpha-\omega_s)t}$$

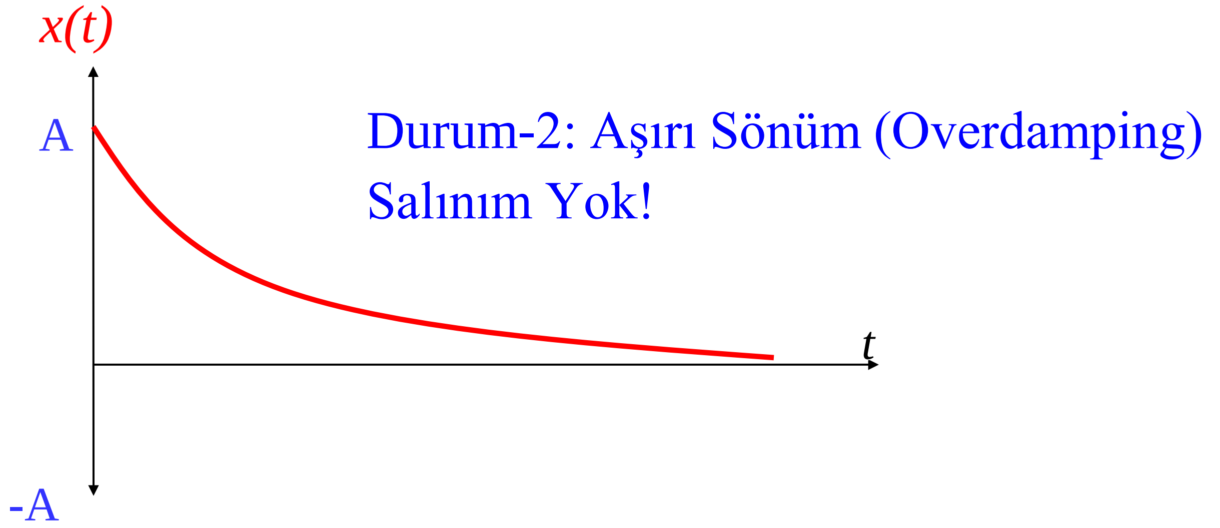
A ve B katsayıları başlangıç koşullarından bulunur.

Her iki çözüm de üstel azalan fonksiyonlar olduğu
için zamanla genlik sıfıra gider ve hareket durur.

Birinci terim ($Ae^{-(\alpha+\omega s)t}$) daha büyük olduğundan daha hızlı sıfıra gider.
$t \rightarrow \infty$ durumunda ikinci terim ($Ae^{-(\alpha-\omega s)t}$) daha baskındır.

Durum-2: Aşırı Sönüm (Overdamping)

$$x(t) = Ae^{-(\alpha+\omega_s)t} + Be^{-(\alpha-\omega_s)t}$$

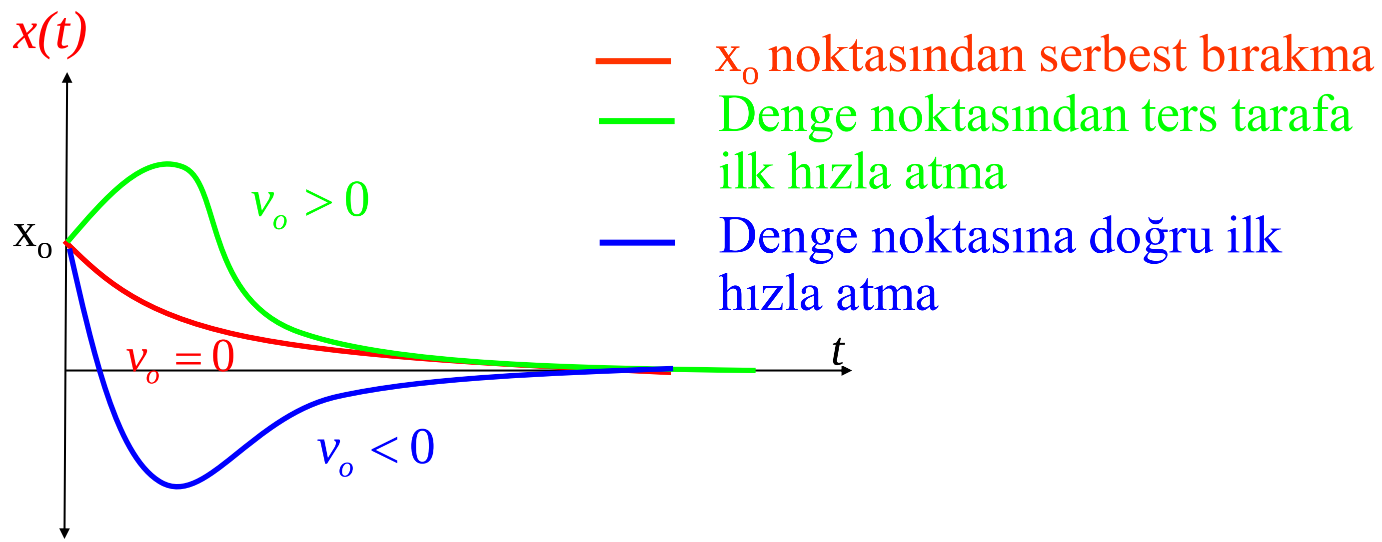


m kütlesi denge noktasından A mesafeden harekete başlar; sönüm katsayısı (b) yay sabitinden (k) büyük olduğu için t →∞ hareket durur, kütle denge noktasının ötesine geçmez.

Birinci terim daha büyük olduğundan daha hızlı sıfıra gider. t→ ∞durumunda ikinci terim daha baskındır.

Durum-2: Aşırı Sönüm (Overdamping)

$$x(t) = Ae^{-(\alpha+\omega_s)t} + Be^{-(\alpha-\omega_s)t}$$



m kütlesi denge noktasından A mesafeden harekete başlar; sönüm katsayısı (b) yay sabitinden (k) büyük olduğu için t →∞ hareket durur, kütle denge noktasının ötesine geçmez.

$$x(t) = Ae^{-(\alpha+\omega_s)t} + Be^{-(\alpha-\omega_s)t} = 0$$

$$-\frac{A}{B} = e^{-[(\alpha+\omega_s)-(\alpha-\omega_s)]t} \Rightarrow t = -\frac{1}{(2\omega_s)}\ln\left(-\frac{A}{B}\right)$$

Durum-3: Kritik Sönüm (Critical Damping)

Salınım Yok!)

$$s_{1,2} = \underbrace{-\frac{\gamma}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}}_{\omega_s}$$

$$\gamma = 2\omega_o \Rightarrow \omega_s = 0$$

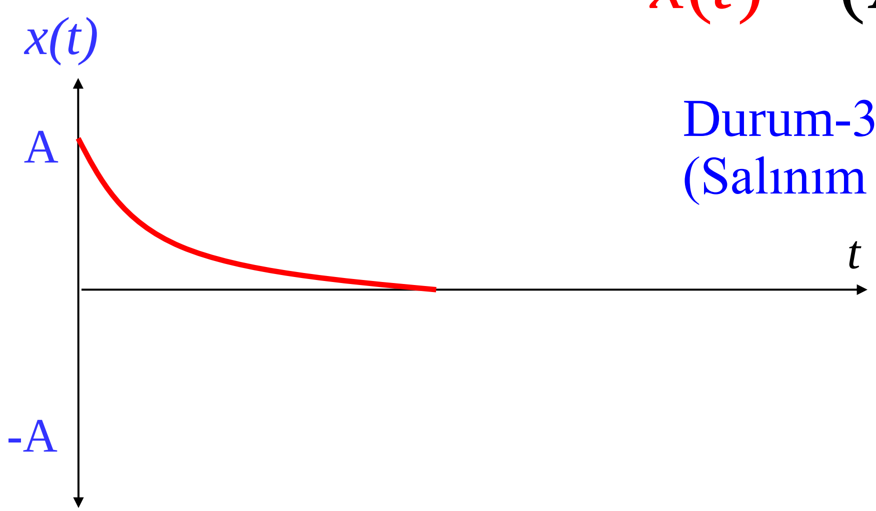
$$s_{1,2} = -\alpha$$

$$\frac{b}{2m} = \frac{k}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{b}{2m} = \omega_o$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm i0$$

Salınım olmaz ve kütle en hızlı şekilde denge noktası ulaşır.

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t}$$

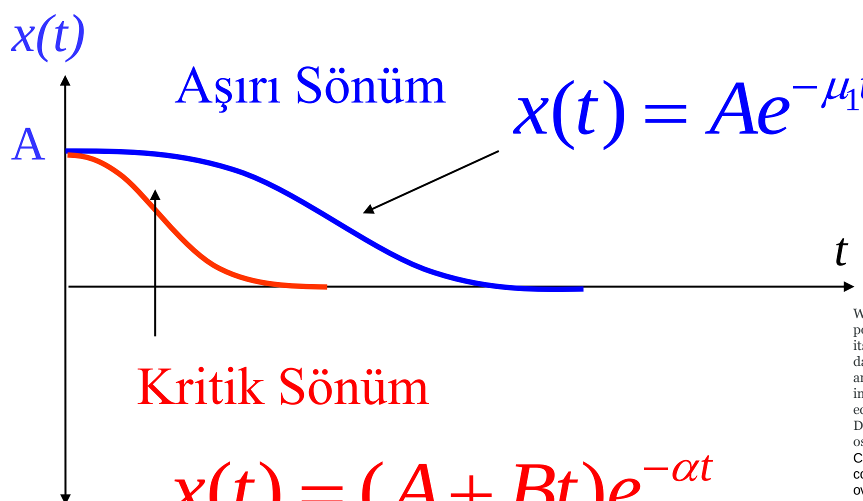


Durum-3: Kritik Sönüm
(Salınım Yok!)

Aşırı ve Kritik Sönüm

Aşırı ve Kritik sönümde salınım olmaz. Ancak bu iki harekte birbirine benzese de önemli farklılıkla vardır.

Kritik sönümde denge noktasına en hızlı şekilde ulaşır, overshooting olmaz. (Bnzer şekilde denge noktasından hareket ettirildiğinde de overshhoting olmaz. Benzer şekilde aşırı Sönümde



$$x(t) = Ae^{-\mu_1 t} + Be^{-\mu_2 t}$$

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t}$$

When we want to damp out oscillations, such as in the suspension of a car, we may want the s
possible**Critical damping** is defined as the condition in which the damping of an oscillator re
its equilibrium position The critically damped system may overshoot the equilibrium position,
damping is represented by Curve A in [link]. With less-than critical damping, the system will re
and cross over one or more times. Such a system is**underdamped**; its displacement is r
in [link]represents an **overdamped** system. As with critical damping, it too may oversho
equilibrium over a longer period of time.
Displacement versus time for a critically damped harmonic oscillator (A) and an overdamped h
oscillator returns to equilibrium at
Critical damping is often desired, because such a system returns to equilibrium rapidly and r
constant force applied to a critically damped system moves the system to a new equilibrium p
overshooting or oscillating about the new position. For example, when you stand on bathroom
moves to its equilibrium position without oscillating. It would be quite inconvenient if the needle
for a long time before settling. Damping forces can vary greatly in character. Friction, for examp
assumed in most places in this text). But many damping forces depend on velocity—sometime
proportional to velocity.

SHH-Özer

$$s_{1,2} = -\underbrace{\frac{\gamma}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_o^2}}_{\omega_s}$$

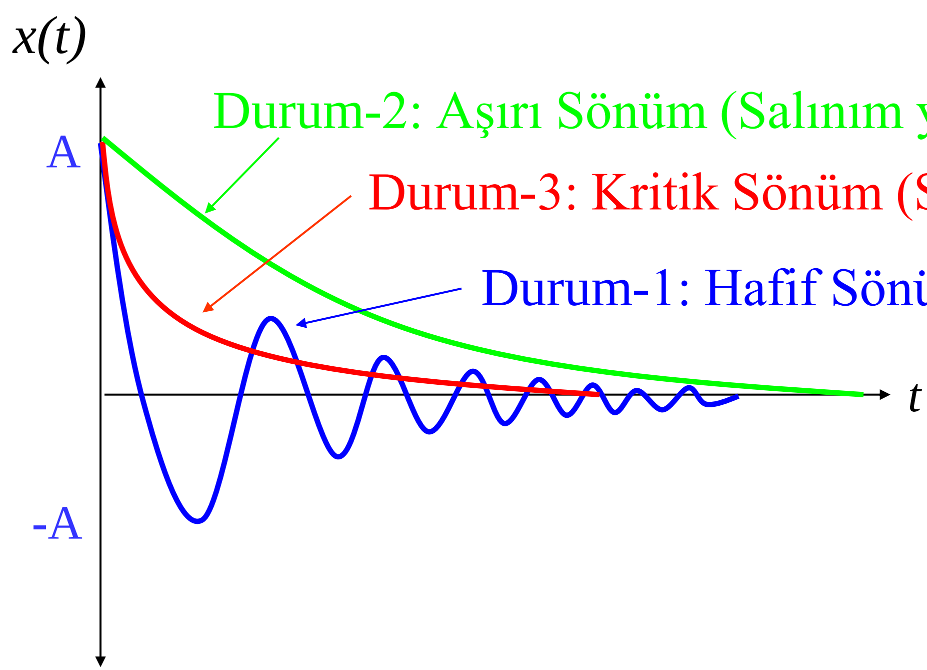
$$s_{1,2} = -\alpha \pm \omega_s$$

$$x(t) = Ae^{(-\alpha \pm i\omega_s)t}$$

$$\gamma < 2\omega_o \Rightarrow \omega_s = Hafif \;\; Sönüm$$

$$\gamma > 2\omega_o \Rightarrow \omega_s = Aşırı \;\; Sönüm$$

$$\gamma = 2\omega_o \Rightarrow \omega_s = Kritik \;\; Sönüm$$



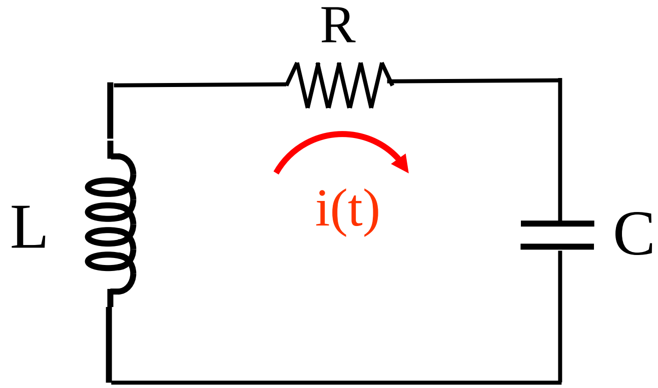
Durum-2: Aşırı Sönüm (Salınım yok!) $x(t) = Ae^{-\mu_1 t} + Be^{-\mu_2 t}$

Durum-3: Kritik Sönüm (Salınım yok!) $x(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t}$

Durum-1: Hafif Sönüm (Sönümlü salınım) $x(t) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t} \cos(\omega_s t + \phi)$

RLC- Devresi

RLC Devresi



Enerji (Elektrik) sığa üzerinden bobine (manyetik) dönüşürken devrede bulunan direnç (korunumsuz) her dönüşümde i^2R kadar gücün geridönüşümsüz ısıya dönüştürür.

Kirchhoff Gerilim Yasası: $$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=0$$

İntegralden kurtarmak için bir kez daha türev alınırsa: $$L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=0$$

Her taraf L'ye bölünürse: $$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\left(\frac{R}{L}\right)\frac{di(t)}{dt}+\left(\frac{1}{LC}\right)i(t)=0$$

Mekanik <-> Elektrik
$x \Leftrightarrow i$
$m \Leftrightarrow L$
$k \Leftrightarrow \frac{1}{C}$
$b \Leftrightarrow R$

$$\gamma\equiv\left(\frac{R}{L}\right) \qquad \omega_o\equiv\left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2}$$

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\gamma\frac{di(t)}{dt}+\omega_o^2 i(t)=0$$

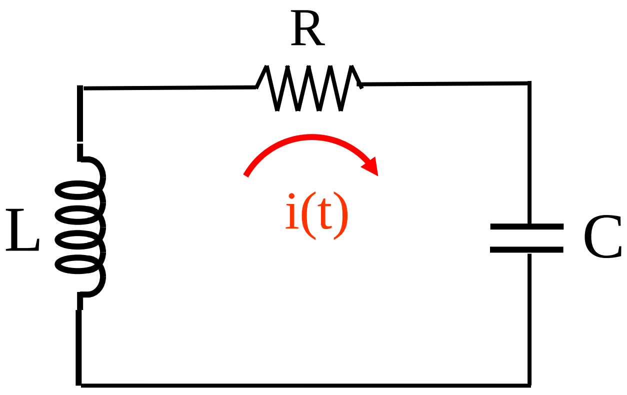
Kütle-Yay Sistemi

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{b}{m}\right)\frac{dx}{dt}+\left(\frac{k}{m}\right)x=0$$

Doğal Açısal Frekans $$\omega_o^2\equiv\frac{k}{m}$$

Sönüm Katsayısı $$\gamma\equiv\frac{b}{m}$$

RLC- Devresi



$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \gamma \frac{di(t)}{dt} + \omega_o^2 i(t) = 0$$

$$\boxed{i(t) = I e^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t} \cos\left(\omega_s t + \phi\right)}$$

$$\gamma \equiv \left(\frac{R}{L}\right)$$

$$\omega_s = \omega_o \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_o}\right)^2}$$

$$\omega_o \equiv \left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2}$$

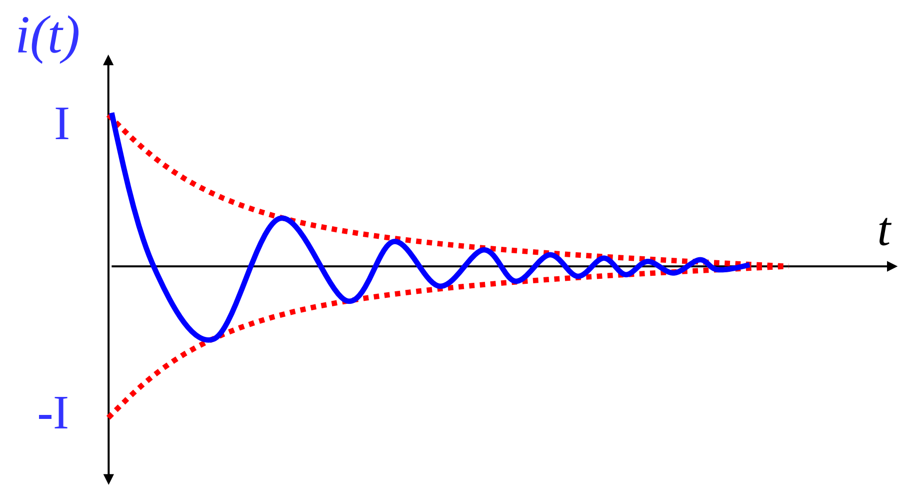
Devrenin doğal salınım (açısal) frekansı

I ve ϕ başlangıç koşullarından bulunur.

I = Genlik (Devrede dolanan maksimum akım) (Amper)

ω_s= Açısal frekans (rad/s)

ϕ = Faz sabiti (rad)

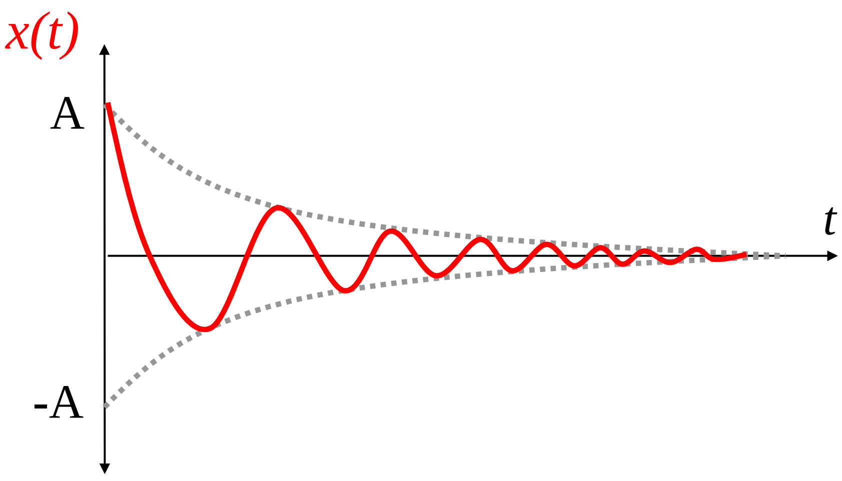


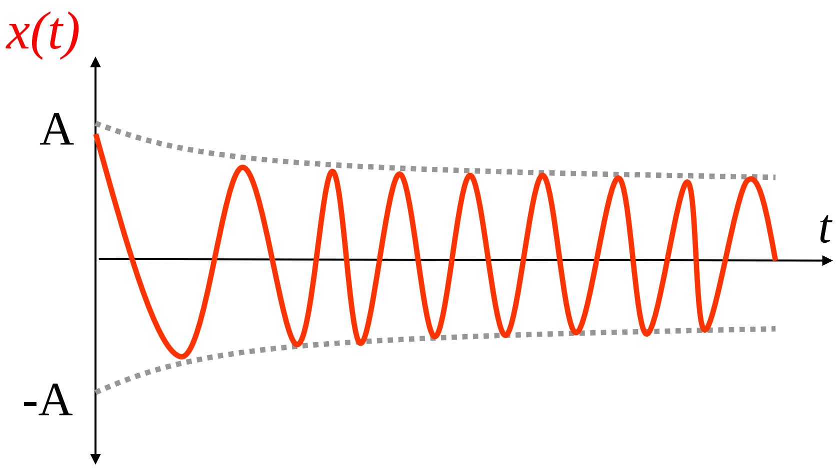
Kalite Faktörü-Q (Quality-Factor)

Salınım yapan (aşağıdaki) sistemleri nasıl bir sayı ile ifade edebiliriz?

SHH'de genliğin azılışını veren sönüm katsayısı γ (veya b) değeri bir fikir verebilir ama eksik kalır, çünkü bu sayı ile genliğin nasıl azaldığı bilgisi verilirken bu süre içinde sistemin kaç kez (yay sabiti k'ya bağlı olarak) salınım yaptığı eksik kalır.

Kalite Faktörü (Q) tanımı, bu iki durumu tek bir sayı ile veren ifadedir.





Kalite Faktörü (Q)-Tanım

Kalite faktörü, salınım yapan bir sistemin (genliğin, başlangıç değerinin belli bir kesrine düşene kadar) **ne kadar** salınım yapacağını ifade eden bir niceliktir.

Q Tanımı:

$$Q \equiv \frac{\omega_o}{\gamma} = \frac{\omega_o}{b/m}$$

$$Q \equiv \frac{\omega_o}{b/m} = \frac{(k/m)^{1/2}}{b/m} \propto \frac{k}{b}$$

Ödev-1:

Q-Kalite faktörünün boyutsuz olduğunu gösteriniz.

- Boyutsuz bir niceliktir.
- Küçük sönüm, büyük Q anlamına gelir.
- Her sistem farklı ω_o ve γ değerine sahip olduğu için her sistemin karakteristik bir Q değeri vardır.

Kalite Faktörü (Q)-Tanım

Salınım yapan bir sistem Q kadar salınım yaparsa genliği başlangıç değerinin ne kadarına düşer?

Sistem, Q sayısı kadar salınım yapıncaya kadar geçen süre:

$$\omega t_Q = Q2\pi \Rightarrow t_Q = 2\pi \frac{Q}{\omega}$$

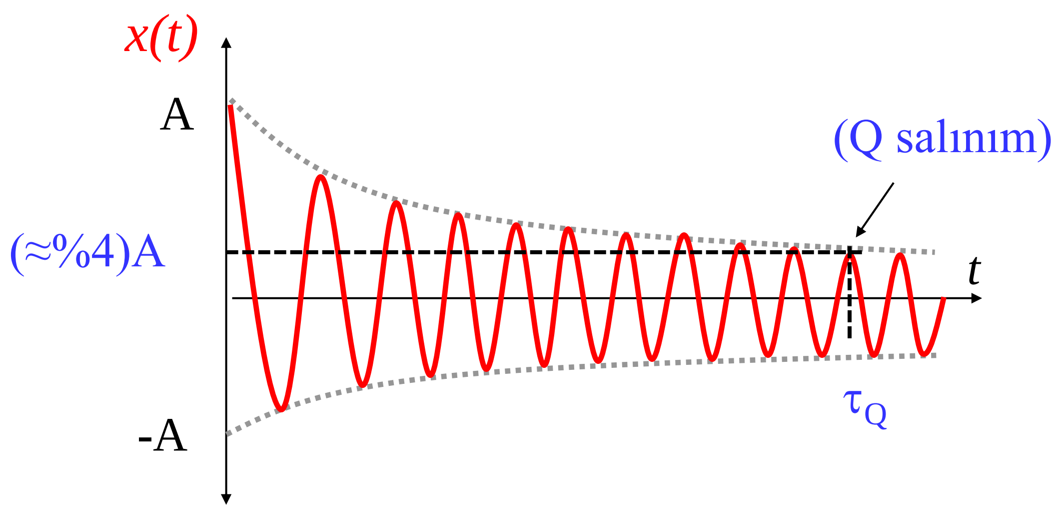
Sönümün küçük olduğu duruma bakalım: $\omega \cong \omega_o$

$$t_Q = 2\pi \frac{Q}{\omega_o} = 2\pi \frac{\omega_o/\gamma}{\omega_o} = \frac{2\pi}{\gamma}$$

$$Q \equiv \frac{\omega_o}{\gamma} = \frac{\omega_o}{b/m}$$

Bu sürede genliğin ulaştığı değer: $x(t = t_Q) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t_Q} = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)(2\pi/\gamma)} = Ae^{-\pi} \cong \%4$

$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\cos(\omega_s t + \phi)$$



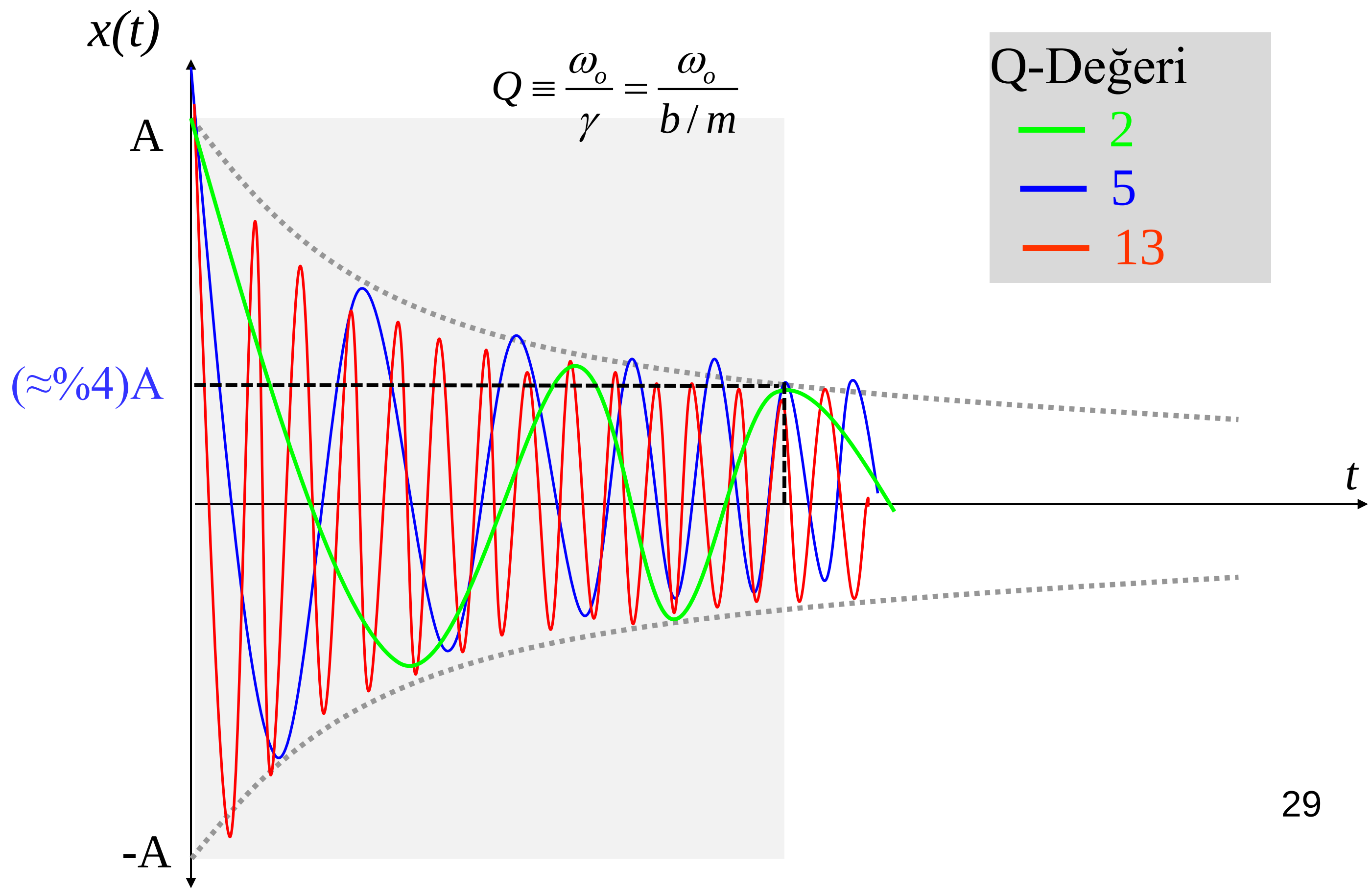
Önemli Sonuç: Salınım yapan bir sistem, sistemin kalitesini gösteren Q sayısı kadar salınım yapınca genliği (%4)'e düşer.

Kalite Faktörü (Q)-Sonuç

Kalite faktörü Q olan bir sistem, Q kadar salınım yapınca genliği, başlangıç değerinin %4’e düşer.

Kalite faktörü bilinen bir sistemin açısal frekansı (veya sönüm katsayısı) biliniyorsa diğer parametreleri bulunabilir.

$$Q \equiv \frac{\omega_o}{\gamma} = \frac{\omega_o}{b/m}$$



Kalite Faktörü Q-Bazı Sistemlerin Q Değerleri

Bazı Sistemlerin Q Kalite Faktörü

Sistem	Q-Değeri	
Kapı Hidroliği	1/2	
Deprem	250-1400	
Keman Teli	10^3	
Mikrodalga	10^5	
Quarz Kristal	10^6	
Atomik Saat	10^{17}	
Basit Harmonik Hareket	∞	