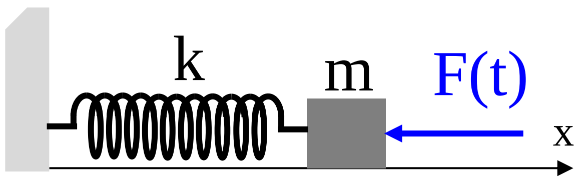
Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği Bölümü

FZM210 Dalgalar ve Optik

Prof. Dr. Hüseyin Sarı

Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Fizik Mühendisliği Bölümü

Zorlamalı Harmonik Hareket (ZHH)

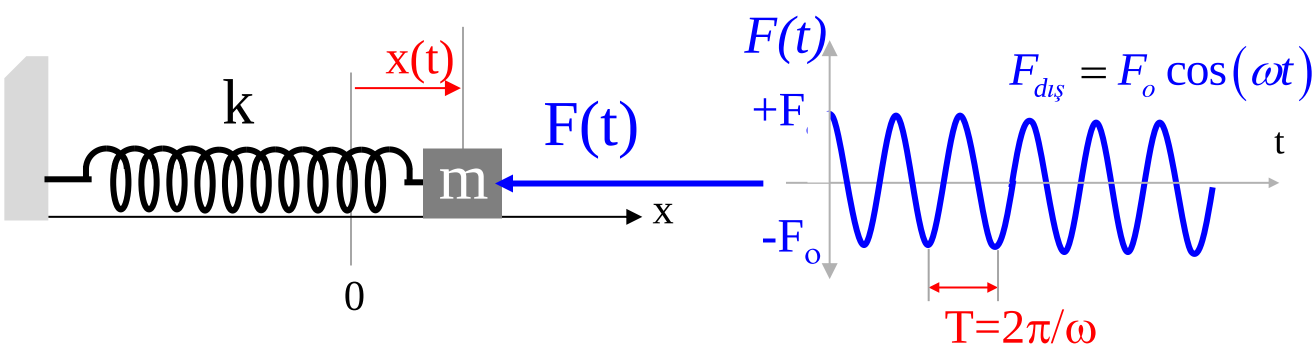


İçerik

- Zorlamalı Salınım
  - Sürtünmesiz Ortamda Zorlamalı Salınım
  - Sürtünmeli Ortamda Zorlamalı Salınım
- Kalite Faktörü (Q-Value)
- Rezonans
  - Rezonans Uygulamaları

Zorlamalı Harmonik Hareket (SHH)

Bu Derste Ne Yapacağız?



$$F_{net} = ma = F_{yay} + F_{sürtünme} + F_{dış}$$

Ortamda kayıp (sürtünme) olabilir; olduğu ve olmadığı iki duruma da bakacağız

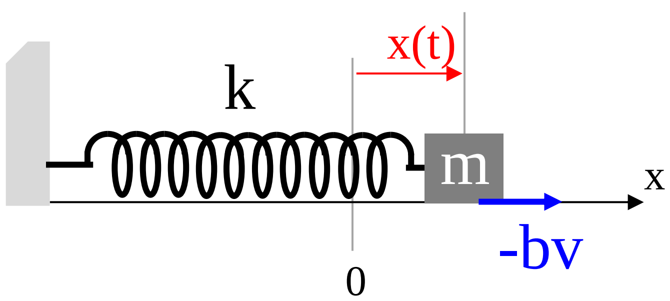
Neden periyodik bir dış kuvvet seçtik?

- Herhangi bir formdaki dış kuvvet her zaman sin ve cos gibi periyodik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir.
- Diferansiyel denklem doğrusal olduğu için bu çözümlerin toplamı da bir çözümdür.
- Pratikte periyodik kuvvetlerle sistemi uyarmak daha olasıdır.

Zorlamalı Harmonik Hareket (ZHH)

ZHH'de amacımız nedir, neyi bulmak isteriz?

BHH veya SHH

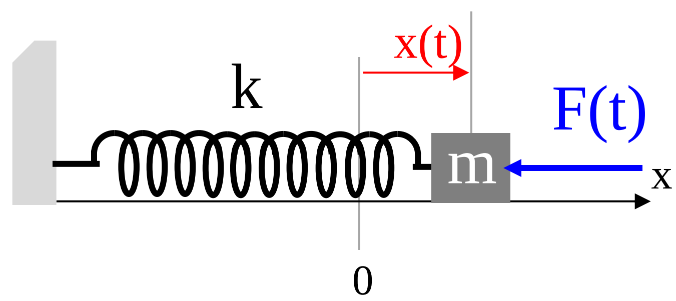


$$F_{net} = F_{yay} + F_{sürtünme}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_s t + \phi)$$

ω_o, ω_s:	Açısal frekans sistem tarafından belirlenir (k, m, b)
A ve ϕ:	Başlangıç koşullarından bulunur

ZHH



$$F_{net} = F_{yay} + F_{sürtünme} + F_{dış}$$

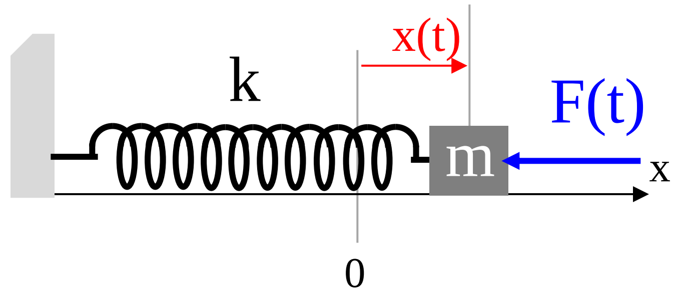
$$x(t) = A(\omega)\cos[\omega t + \phi(\omega)]$$

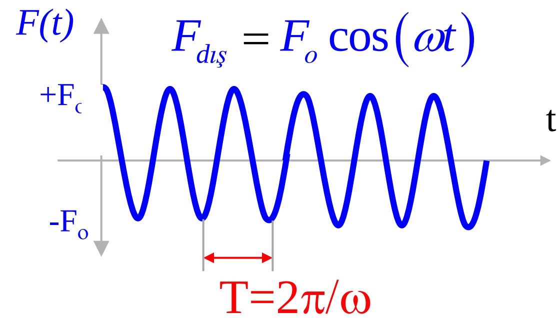
ω:	Sisteme etki eden dış kuvvet tarafından belirlenir
A ve ϕ:	Başlangıç koşullarına <u>bağlı değildir</u>! dış kuvvet tarafından belirlenir

Zorlamalı (Sönümsüz) Harmonik Hareket (ZBHH)

Sürtünme yok! (b=0)

$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$





$$F_{net} = F_{yay} + F_{sürtünme} + F_{dış} = ma$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx(t) = F_o \cos(\omega t)$$

Her tarafı kütleye (m) bölersek:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x(t) = \left(\frac{F_o}{m}\right)\cos(\omega t)$$

Bu, ikinci dereceden (*2 kez türev içeren*), doğrusal (*türevli terimin karesi yok*), homojen <u>olmayan</u> (*eşitliğin sağ tarafı sıfırdan farklı*) **diferansiyel denklem**-dir.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_o^2 x(t) = F\cos(\omega t)$$

$$\omega_o^2 \equiv \frac{k}{m} \qquad F \equiv \frac{F_o}{m}$$

ZBHH-Homojen Kısmın Çözümü

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_o^2 x(t) = F\cos(\omega t)$$

$$x(t) = x_h(t) + x_{özel}(t)$$

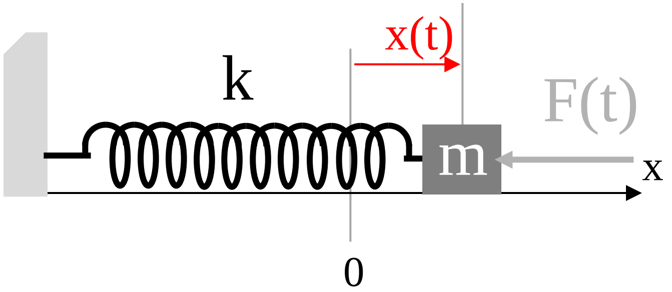
Bu, **diferansiyel denklem**-in çözümü homojen kısmın (x_h) ve homojen olmayan özel kısmın ($x_ö$) çözümlerinin toplamı şeklinde olacaktır. …

Homojen kısmın çözümü bize sistem üzerinde bir kuvvet <u>olmadığı durumda</u>, sistemin doğal haldeki davranışı hakkında bilgi veriri. Bu davranışı, sistemin parametreleri (k ve m) ile başlangıç koşulları belirler.

Özel kısmın çözümü ise dış kuvvetin etkisinde sistemin davranışı hakkında bilgi veriri. Sistem dış kuvvetin frekansı ile salınım yapmaya zorlanır, genlik ve faz açısı başlangıç koşulları ile değil, sürücü kuvvet tarafından belirlenir.

ZBHH-Homojen Kısmın Çözümü

$$x(t) = x_h(t)? + x_{özel}(t)$$



$$\frac{d^2 x_h(t)}{dt^2} + \omega_o^2 x_h(t) = F\cos(\omega t) = 0$$

Çözüm önerisi: $x_h(t) = Ae^{st}$

A ve s bilinmiyor. A başlangıç koşullarından, s ise cebirsel denklemden bulunacak.

Bu, **diferansiyel denklem**-in çözümünü SHH'i incelerken yapmıştık.

$$\left(s^2 + \omega_o^2\right) Ae^{st} = 0$$ Ae^{st} sıfır olamayacağı için

$$s^2 + \omega_o^2 = 0 \qquad s = \pm i\omega_o$$

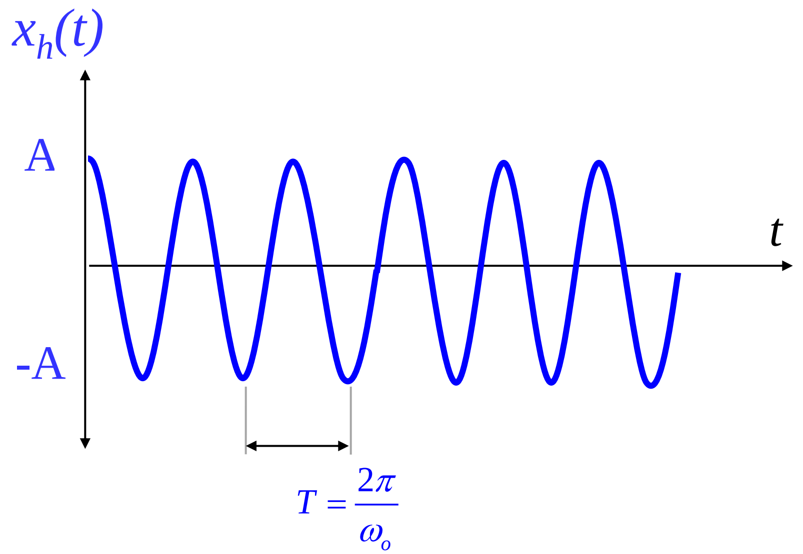
$$x_h(t) = Ae^{\pm i\omega_o t}$$

$$x_h(t) = A\cos\left(\omega_o t + \phi_h\right)$$

ZBHH-Homojen Kısmın Çözümü

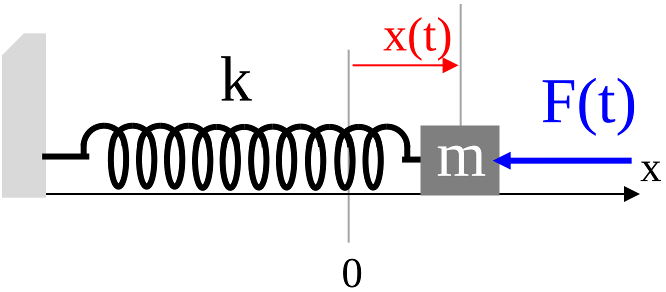
Homojen kısmın çözümü
($F_{dış}$=0)

$$x_h(t) = A\cos(\omega_o t + \phi_h) \qquad \omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$



Bu çözüm çok kısa süreliğine etkili olacak, daha sonra özel çözüm baskın olacaktır. Ama bu denklemden elde edilen doğal açısal frekans (ω_o) bu hareketin davranışında karakteristik bir rol oynamaktadır.

ZBHH-Özel Kısmın Çözümü



$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

$$\frac{d^2 x_{ö}(t)}{dt^2} + \omega_o^2 x_{ö}(t) = \left(\frac{F_o}{m}\right)\cos(\omega t)$$

Çözüm önerisi: $$x_{özel}(t) = Ae^{-i\omega t}$$

(Önemli) Homojen çözümün aksine burada ω biliniyor (çünkü sistem dış kuvvetin frekansı ne ise aynı frekansla salınım yapacaktır) sadece genlik A bulunacaktır.

$$\left[-\omega^2 + \omega_o^2\right]Ae^{-i\omega t} = Fe^{-i\omega t}$$

$$A(\omega) = \frac{F_o / m}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}$$

$$x_{özel}(t) = Ae^{-i\omega t} = \frac{F_o / m}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)} e^{-i\omega t}$$

Zorlamalı Harmonik Hareket (SBHH)-Genel Çözüm

$$x_{özel}(t) = Ae^{-i\omega t} = \frac{F_o/m}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)} e^{-i\omega t}$$

Gerçek kısmın çözümünü almamız gerektiği için $x(t) = R\left\{e^{-i\omega t}\right\} = 2\cos\left(\omega t\right)$

Özel kısmın çözümü: $$\boxed{x_{özel}(t) = \frac{F_o/m}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}\cos\left(\omega t + \phi_ö\right)}$$ $$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

$$x(t) = x_h(t) + x_{özel}(t)$$

$$x_h(t) = A\cos\left(\omega_o t + \phi_h\right)$$

$$x_{özel}(t) = \frac{F_o/m}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}\cos\left(\omega t + \phi_ö\right)$$

Sönümün olmadığı durumda genel çözüm: $$x(t) = A\cos\left(\omega_o t + \phi_h\right) + \frac{F_o/m}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}\cos\left(\omega t + \phi_ö\right)$$

Başlangıç koşullarından.

ZBHH-Genel Çözüm

$$x(t) = x_h(t) + x_{özel}(t) \cong x_{özel}(t) = A\cos(\omega_o t + \phi_h) + \frac{F_o/m}{(\omega_o^2 - \omega^2)}\cos(\omega t + \phi_ö)$$

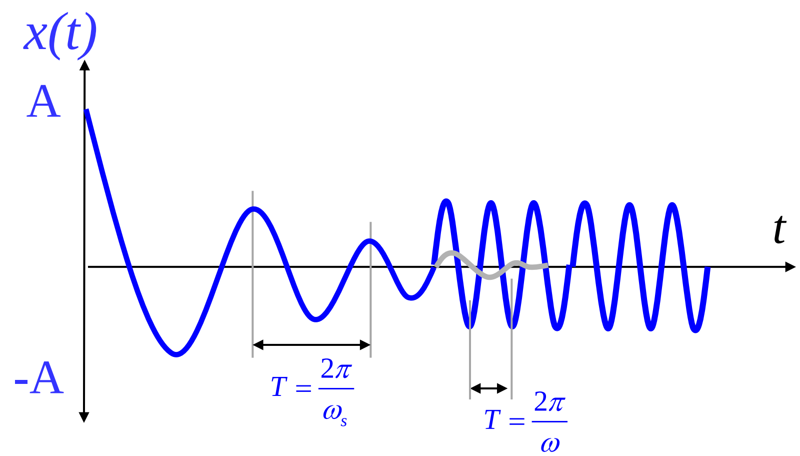
$$x_h(t) = A\cos(\omega_o t + \phi_h)$$

$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

Büyük t durumunda $\left(t \gg \frac{1}{\gamma}\right)$ başlangıç şartları ne olursa olsun ilerleyen t ile başlangıç koşullarının etkisi kaybolur çünkü

$$\left(t \gg \frac{1}{\gamma}\right) \Rightarrow x_h(t) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t} \to 0$$

Örneğin, iki salınıcının başlangıç koşulları çok farklı olsa da zaman $t \gg \frac{1}{\gamma}$ sonra her ikisi de aynı durumdadır.



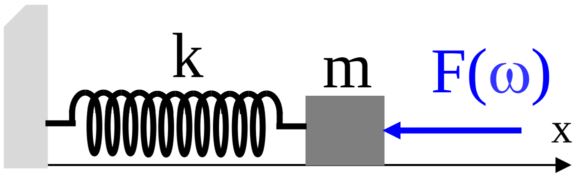
$$F(t) = F_o\cos(\omega t)$$

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \phi_ö)$$

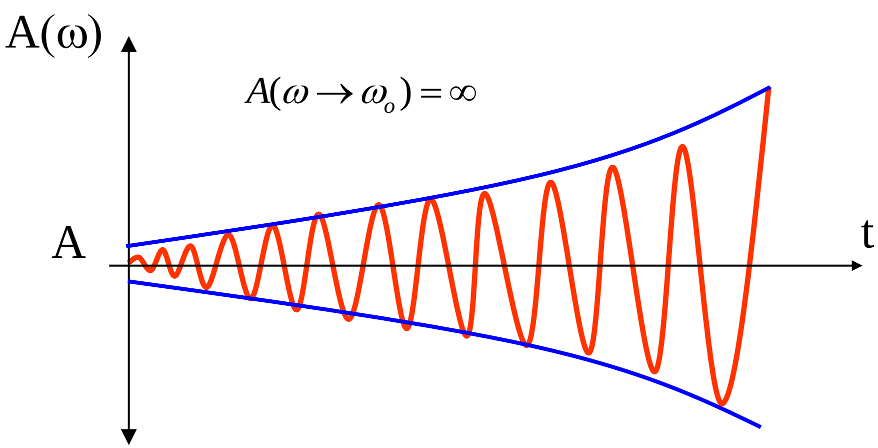
$$A(\omega) = \frac{F_o/m}{(\omega_o^2 - \omega^2)}$$

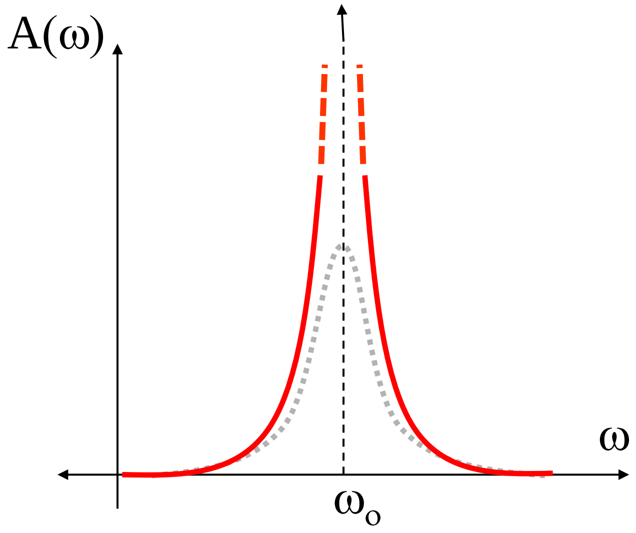
Sönüm Yoksa

Genliğin frekansa bağlılığı:

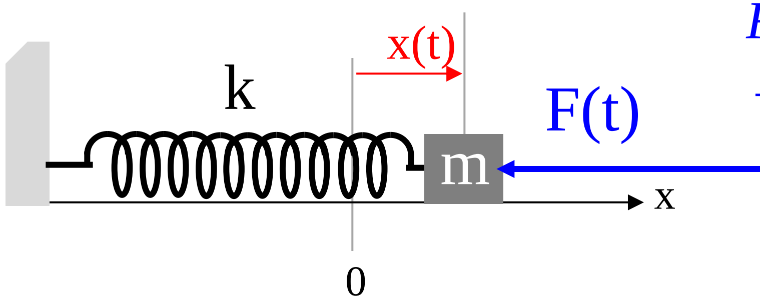


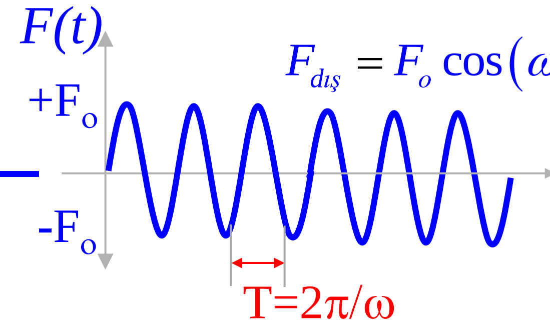
$$x(t) = A\cos\left(\omega_o t + \phi_h\right) + A(\omega)\cos\left(\omega_o t + \phi_ö\right) \qquad A(\omega) = \frac{F_o / m}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}$$





Faz-1





$$F_{dış} = F_o \cos(\omega t)$$

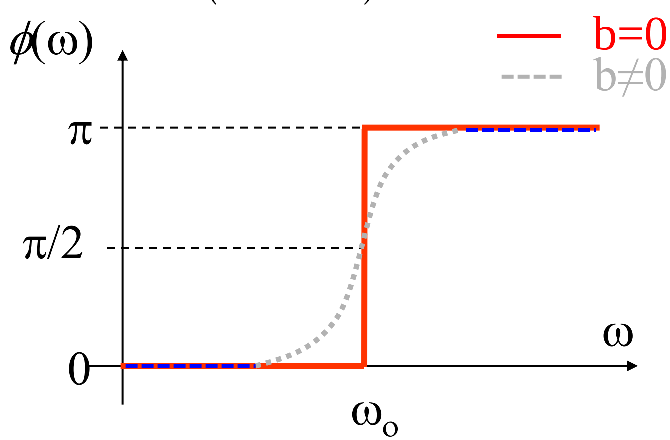
$$\omega \neq \omega_o \Rightarrow \tan(\phi) = \frac{0}{(\omega_o^2 - \omega^2)} \Rightarrow \phi = 0$$

$$\omega = \omega_o \Rightarrow \tan(\phi) = \frac{\omega}{(0)} \Rightarrow \phi = \pi / 2$$

$$\omega > \omega_o \Rightarrow \tan(\phi) = \frac{\omega}{-(\omega_o^2 - \omega^2)} \Rightarrow \phi = \pi$$

Faz farkının (yerdeğiştirme ile uygulanan dış kuvvet arasında) frekansa bağlılığı:

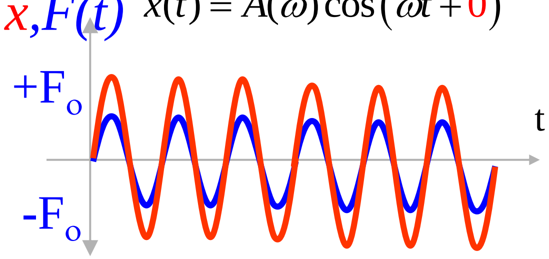
$$\tan(\phi) = \frac{\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)}$$



$$F_{dış} = F_o \cos(\omega t)$$

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega))$$

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + 0)$$

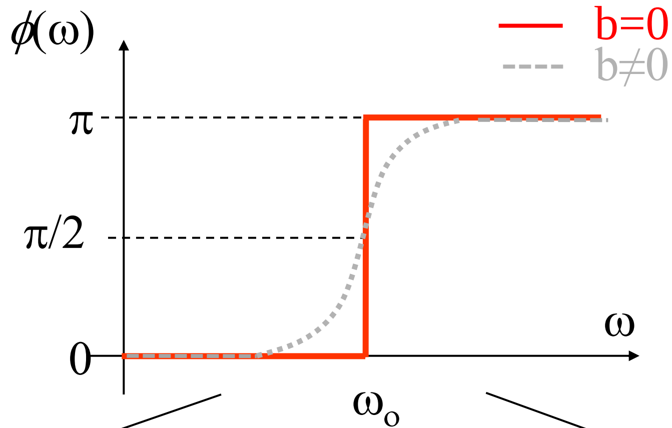


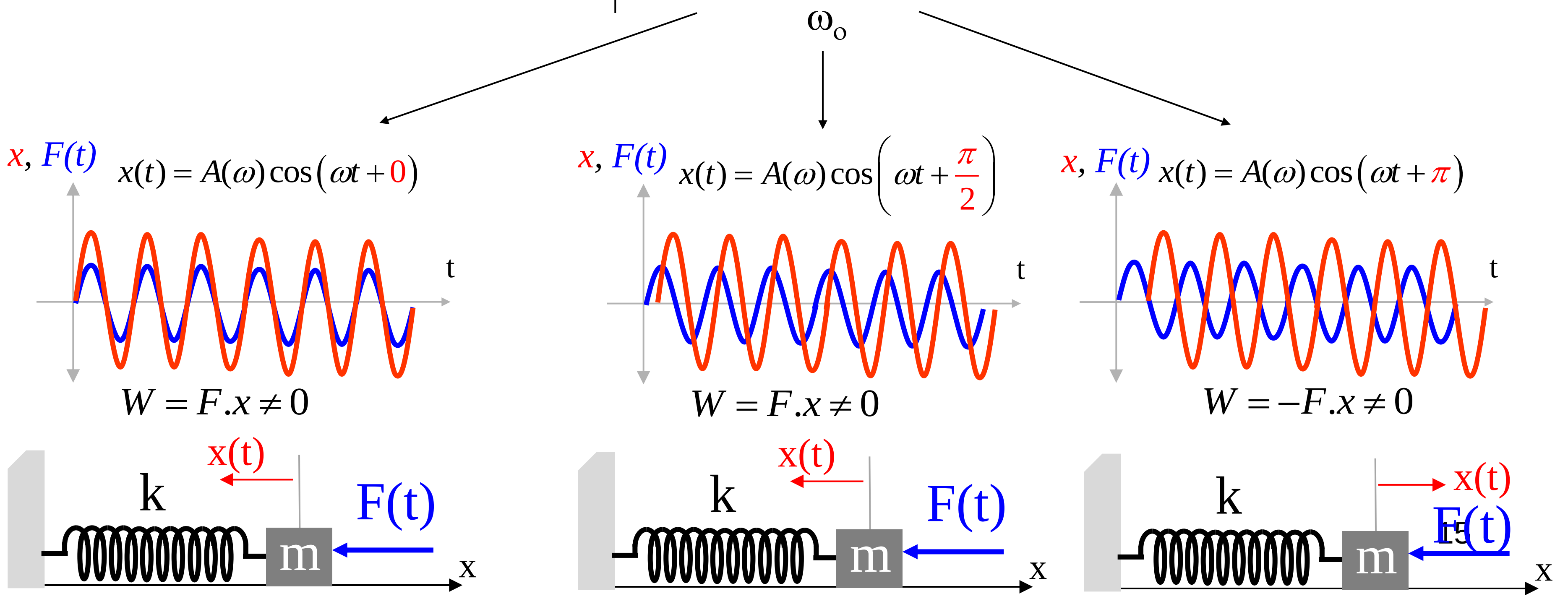
Faz-2

$$F_{dış} = F_o \cos(\omega t)$$

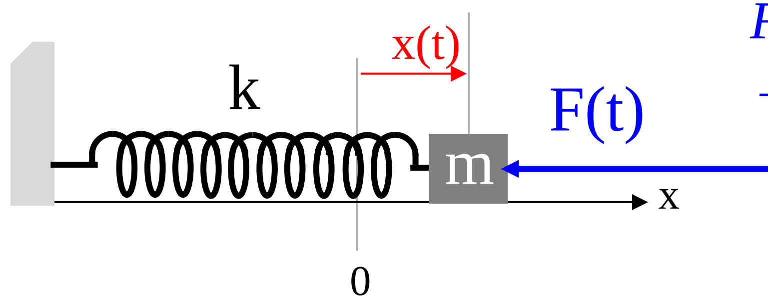
$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \phi(\omega))$$

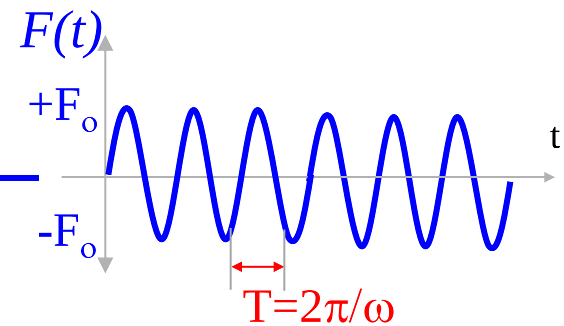
Faz farkının (yerdeğiştirme ile uygulanan dış kuvvet arasında) frekansa bağlılığı:





Zorlamalı (Sönümlü) Harmonik Hareket (ZSHH)





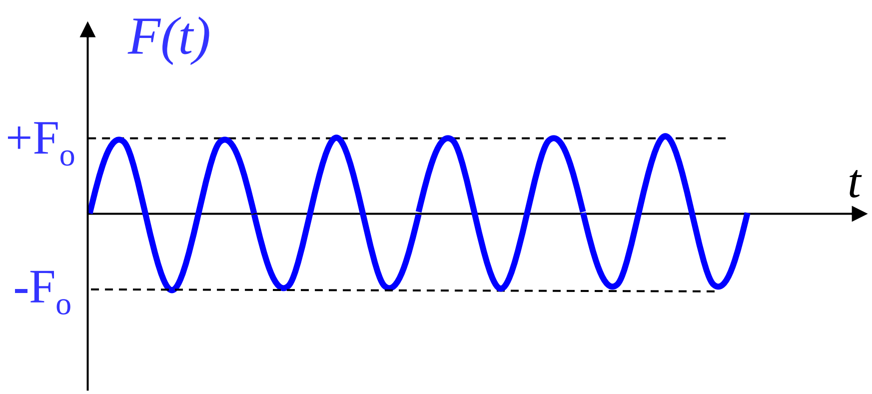
Sürtünme var! (b ≠ 0)

(Hafif Sönüm) $\gamma < 2\omega_o$

$$F_{net} = ma = F_{yay} + F_{sürtünme} + F_{dış}$$

$$F_{dış} = F_o \cos(\omega t)$$

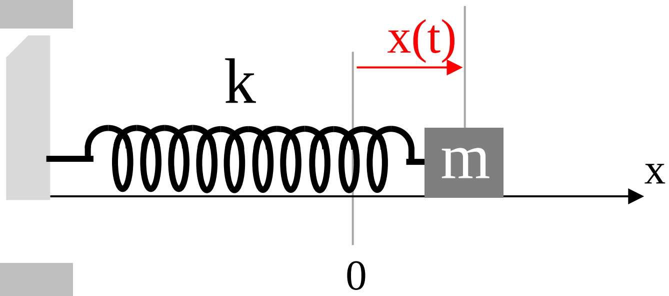
Dış kuvvetin, genliği F_o ve zamanla periyodik değişen bir kuvvet olduğunu düşünelim.



Zorlamalı Sönümlü Harmonik Hareket (ZSHH)

b=0
$F_{dış}=0$

BHH

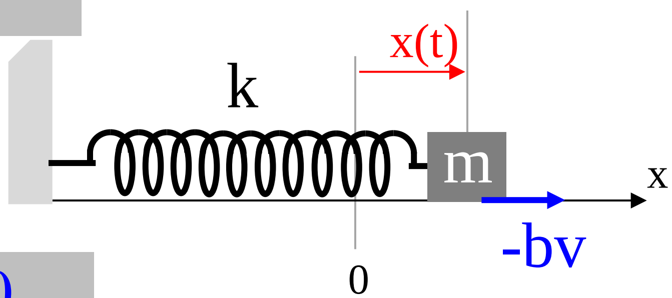


$$x(t) = A\cos\left(\omega_o t + \phi\right)$$

$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

b≠0
$F_{dış}=0$

SHH

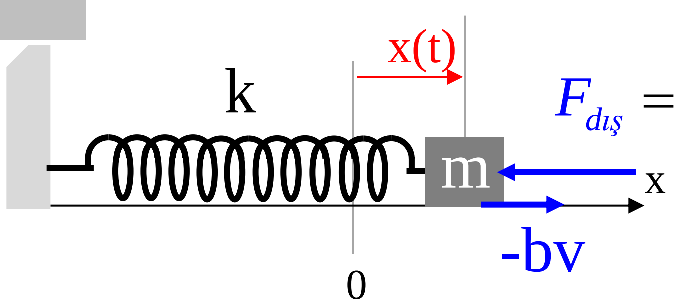


$$x(t) = A(t)\cos\left[\omega_s t + \phi\right]$$

$$\omega_s = \omega_o\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{2\omega_o}\right)^2}$$

b≠0
$F_{dış}\neq 0$

ZHH



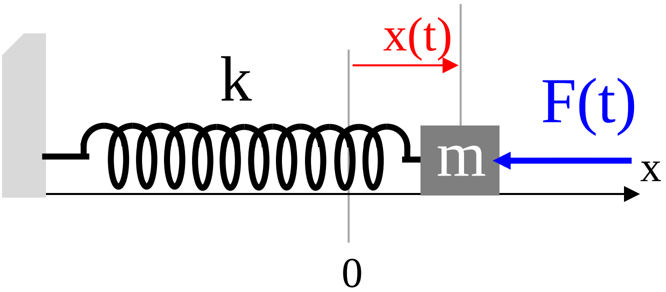
$$F_{dış} = F_o\cos\left(\omega t\right)$$

$$F(t) = F_o\cos\left[\omega t\right]$$

$$x(t) = A(\omega)\cos\left[\omega t + \phi_ö(\omega)\right]$$

$$\omega = \omega$$

Zorlamalı (Sönümlü) Harmonik Hareket (ZSHH)



$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

Sürtünme var! (b=0)

$$F_{net} = F_{yay} + F_{sürtünme} + F_{dış} = ma$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \left(\frac{b}{m}\right)\frac{dx(t)}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x(t) = \left(\frac{F_o}{m}\right)\cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma\frac{dx(t)}{dt} + \omega_o^2 x(t) = F\cos(\omega t)$$

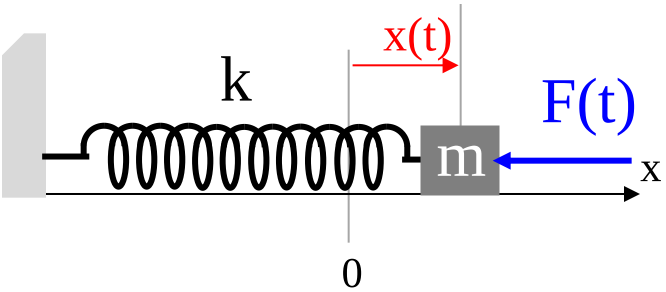
$$\gamma \equiv \frac{b}{m} \qquad \omega_o^2 \equiv \frac{k}{m} \qquad F \equiv \frac{F_o}{m}$$

Bu, ikinci dereceden (*2 kez türev içeren*), doğrusal (*türevli terimin karesi yok*), homojen olmayan (*eşitliğin sağ tarafı sıfırdan farklı*) **diferansiyel denklem**-dir.

Bu, **diferansiyel denklem**-in çözümü homojen kısmın (x_h) ve homojen olmayan özel kısmın ($x_ö$) çözümlerinin toplamı şeklinde olacaktır. …

$$x(t) = x_h(t) + x_{özel}(t)$$

Homojen Kısmın Çözümü



$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

$$x(t) = x_h(t) ?+ x_{özel}(t)$$

$$\frac{d^2 x_h(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx_h(t)}{dt} + \omega_o^2 x_h(t) = F\cos(\omega t) = 0$$

Bu, **diferansiyel denklem**-in çözümünü SHH'i incelerken yapmıştık.

Çözüm önerisi: $$x_h(t) = Ae^{st}$$

A ve s bilinmiyor. A başlangıç koşullarından, s ise cebirsel denklemden bulunacak.

$$\left(s^2 + \gamma s + \omega_o^2\right) Ae^{st} = 0$$

ZSHH-Homojen Kısmın Çözümü

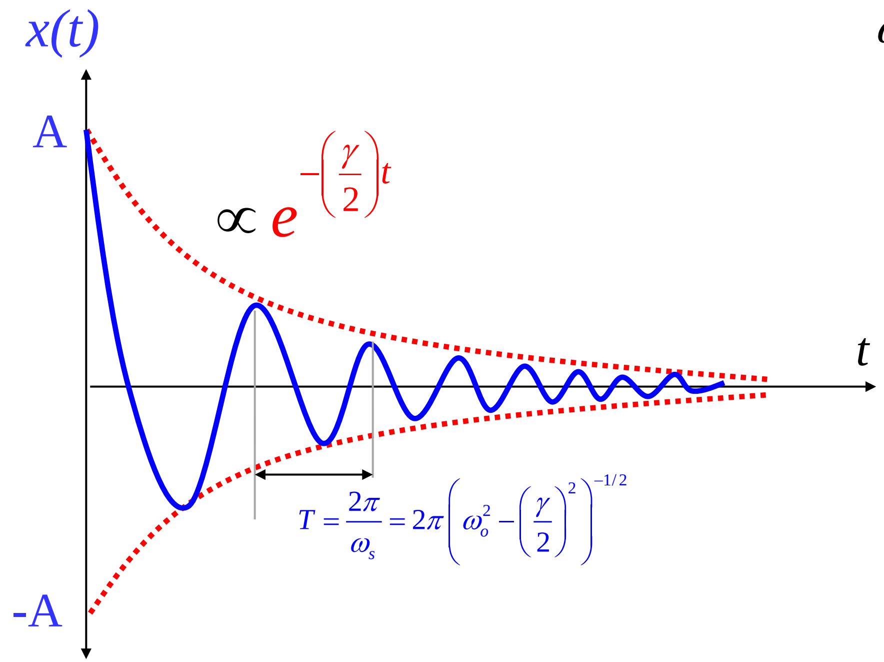
$$\left(s^2+\gamma s+\omega_o^2\right)Ae^{st}=0 \qquad x_h(t)=Ae^{st}$$

Homojen kısmın çözümü
($F_{dış}=0$)

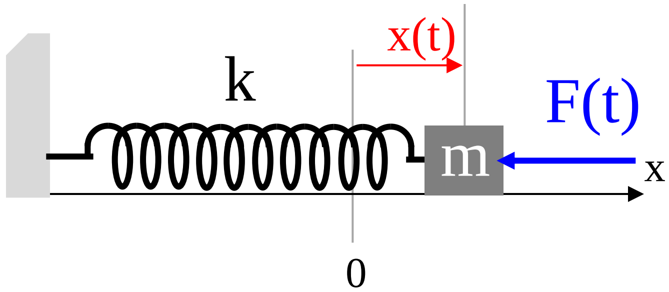
$$x_h(t)=Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\cos\left(\omega_s t+\phi_h\right) \qquad \omega_s=\sqrt{\omega_o^2-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

$$\omega_o\equiv\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

Bu çözüm çok kısa süreliğine etkili olacak, daha sonra özel çözüm baskın olacaktır. Ama bu denklemden elde edilen doğal açısal frekans (ω_o) bu hareketin davranışında karakteristik bir rol oynamaktadır.



ZSHH-Özel Kısmın Çözümü



$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

$$\frac{d^2 x_{ö}(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx_{ö}(t)}{dt} + \omega_o^2 x_{ö}(t) = F\cos(\omega t)$$

Çözüm önerisi: $x_{özel}(t) = Ae^{-i\omega t}$

(Önemli) Homojen çözümün aksine ω biliniyor (çünkü sistem dış kuvvetin frekansı ne ise aynı frekansla salınım yapacaktır) sadece genlik A bulunacak.

$$\left[-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_o^2\right] Ae^{-i\omega t} = Fe^{-i\omega t}$$

$$A(\omega) = \frac{F}{\left(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_o^2\right)}$$

$$\cos\omega t = \mathrm{Re}\left\{e^{-i\omega t}\right\}$$

$$\mathrm{Re}\left\{Fe^{-i\omega t}\right\} = F\cos\omega t$$

$$x_{özel}(t) = \frac{F}{\left(-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_o^2\right)} e^{-i\omega t}$$

Zorlamalı Sönümlü Harmonik Hareket (ZSHH)-Genel Çözüm

$$x_{özel}(t) = \frac{F_o/m}{\left[\left(\omega_o^2-\omega^2\right)-i\gamma\omega\right]}e^{-i\omega t}$$

$$z=\frac{1}{a+ib}$$

$$z=\frac{(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{(a-ib)}{\left(a^2+b^2\right)^{1/2}}$$

$$x_{özel}(t)=\left(\frac{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)}{\left[\gamma^2\omega^2+\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2\right]^{1/2}}+i\frac{\gamma\omega}{\left[\gamma^2\omega^2+\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2\right]^{1/2}}\right)\left(\frac{F_o}{m}\right)e^{-i\omega t}$$

$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

$$x_{özel}(t)=\mathrm{Re}\left\{Ae^{-\omega t}\right\}$$

$$x_{özel}(t)=\frac{F_o/m}{\left[\gamma^2\omega^2+\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2\right]^{1/2}}\cos(\omega t+\phi)$$

$$x_h(t)=Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\cos\left(\omega_s t+\phi_h\right)$$

$$A(\omega)=\frac{F_o/m}{\left[\gamma^2\omega^2+\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$x(t)=x_h(t)+x_{özel}(t)$$

$$x_{özel}(t)=\frac{F_o/m}{\left[\gamma^2\omega^2+\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2\right]^{1/2}}\cos\left(\omega t+\phi_ö\right)$$

$$x(t)=Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\cos\left(\omega_s t+\phi_h\right)+\frac{F_o/m}{\left[\gamma^2\omega^2+\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2\right]^{1/2}}\cos\left(\omega t+\phi_ö\right)$$

Bu terim artan t ile hızlıca sıfıra gidecektir…

ZSHH-Genel Çözüm

$$x(t) = x_h(t) + x_{özel}(t) \cong x_{özel}(t) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\cos(\omega_s t + \phi_h) + \frac{F_o/m}{\left[\gamma^2\omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}}\cos(\omega t + \phi_ö)$$

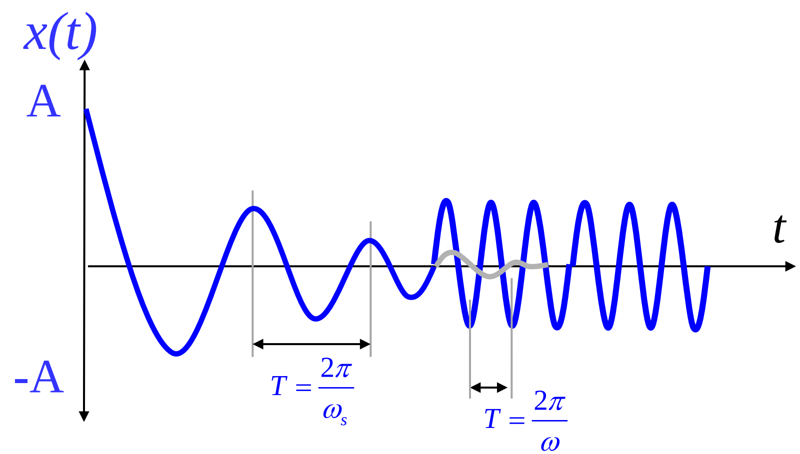
$$x_h(t) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t}\cos(\omega_s t + \phi_h)$$

$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

Büyük t durumunda $\left(t \gg \frac{1}{\gamma}\right)$ başlangıç şartları ne olursa olsun ilerleyen t ile başlangıç koşullarının etkisi kaybolur çünkü

$$\left(t \gg \frac{1}{\gamma}\right) \Rightarrow x_h(t) = Ae^{-\left(\frac{\gamma}{2}\right)t} \to 0$$

Örneğin, iki salınıcının başlangıç koşulları çok farklı olsa da zaman $t \gg \frac{1}{\gamma}$ sonra her ikisi de aynı durumdadır.



$$F(t) = F_o\cos(\omega t)$$

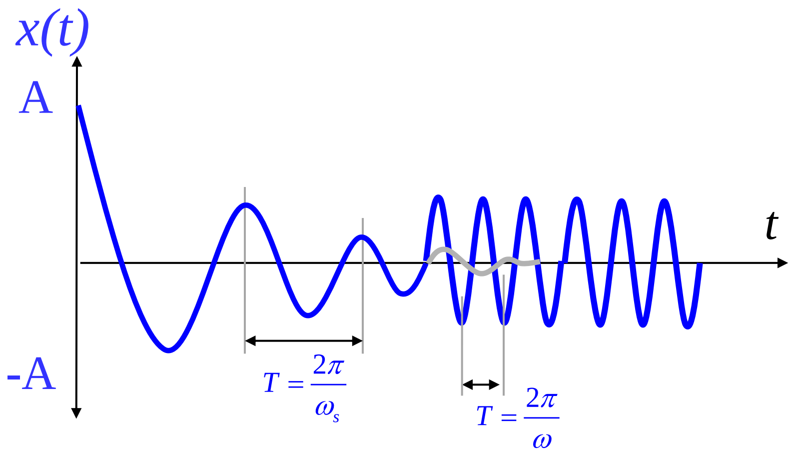
$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \phi_ö)$$

$$A(\omega) = \frac{F_o/m}{\left[\gamma^2\omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}}$$

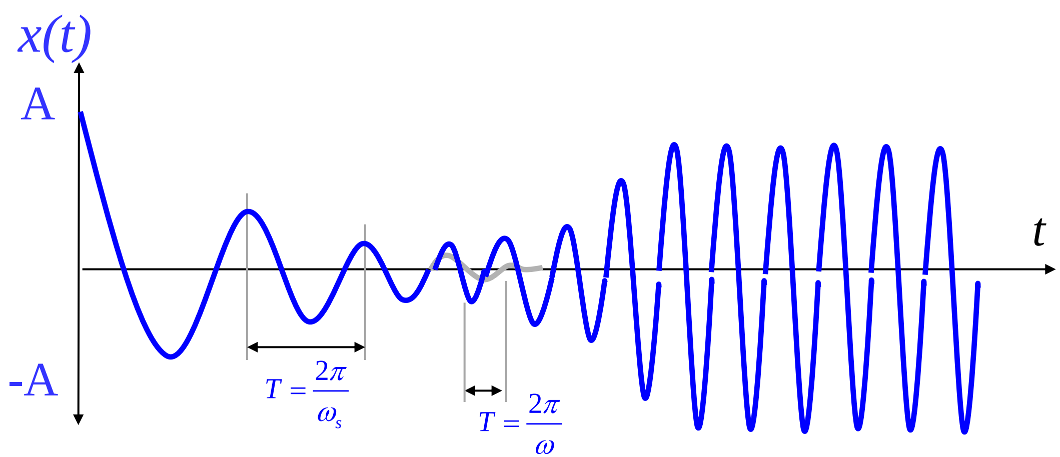
ZSHH-Genel Çözüm

$$F(t) = F_o \cos(\omega t)$$

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \phi_{\ddot{o}}) \qquad A(\omega) = \frac{F_o / m}{\left[\gamma^2\omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}}$$

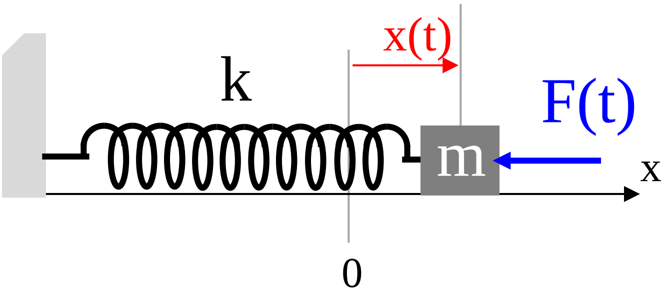


$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$



$$\omega = \omega_o$$

Zorlamalı Sönümlü Harmonik Hareket-Faz Açısı



Uygulanan kuvvet ile yerdeğiştirme arasında faz farkı vardır.

$$F(t) = F_o \cos(\omega t)$$

$$x(t) = A(\omega)\cos\left(\omega t + \phi(\omega)\right)$$

Ödev-1: Faz açısının

$$\tan(\phi) = \frac{-\gamma\omega}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}$$

olduğunu gösteriniz. Yol gösterme:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

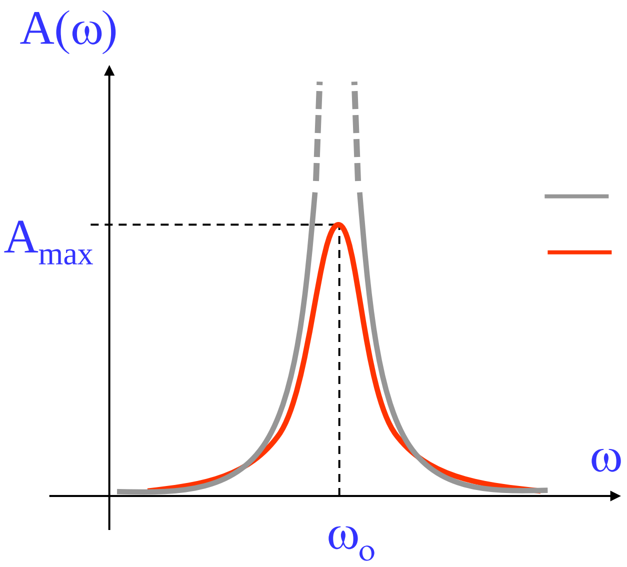
yi diferansiyel denklemde yerine koyarak ϕ için çözüm bulunuz.

Kuvvet ile yerdeğiştirme arasındaki faz farkı

$$\boxed{\tan(\phi) = \frac{\gamma\omega}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}}$$

ZSHH-Genlik ve Faz

Genliğin frekansa bağlılığı:



$$x(t) = A(\omega)\cos\left(\omega t + \phi(\omega)\right)$$

$$A(\omega) = \frac{F_o / m}{\left[\gamma^2\omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}}$$

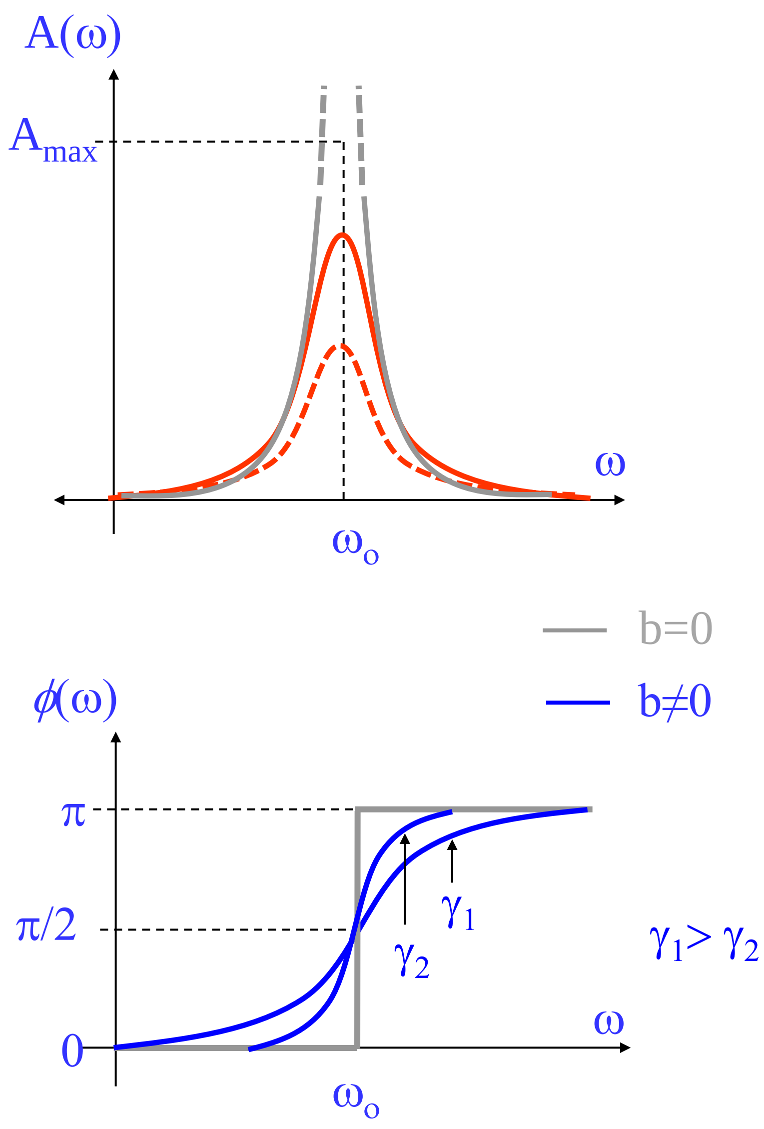
ZSHH-Faz

Faz farkı (yerdeğiştirme ile uygulanan dış kuvvet arasında) frekansa bağlılığı:

$$F(t) = F_o \cos(\omega t)$$

$$x(t) = A(\omega)\cos\left(\omega t + \phi(\omega)\right)$$

$$\tan(\phi) = \frac{\gamma\omega}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}$$

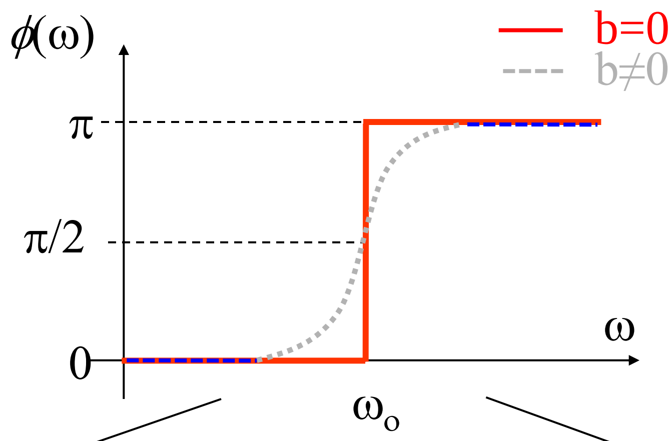


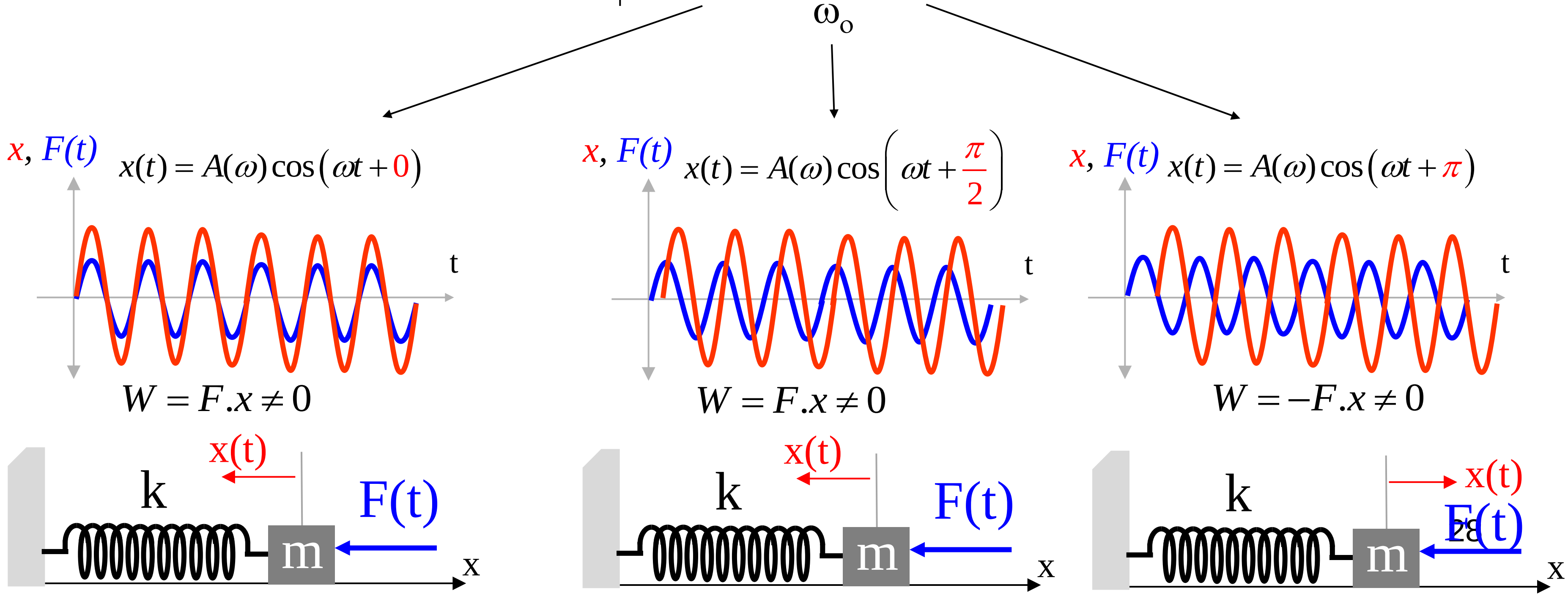
Faz-2

$$F_{dış} = F_o \cos(\omega t)$$

$$x(t) = A(\omega)\cos\left(\omega t + \phi(\omega)\right)$$

Faz farkının (yerdeğiştirme ile uygulanan dış kuvvet arasında) frekansa bağlılığı:

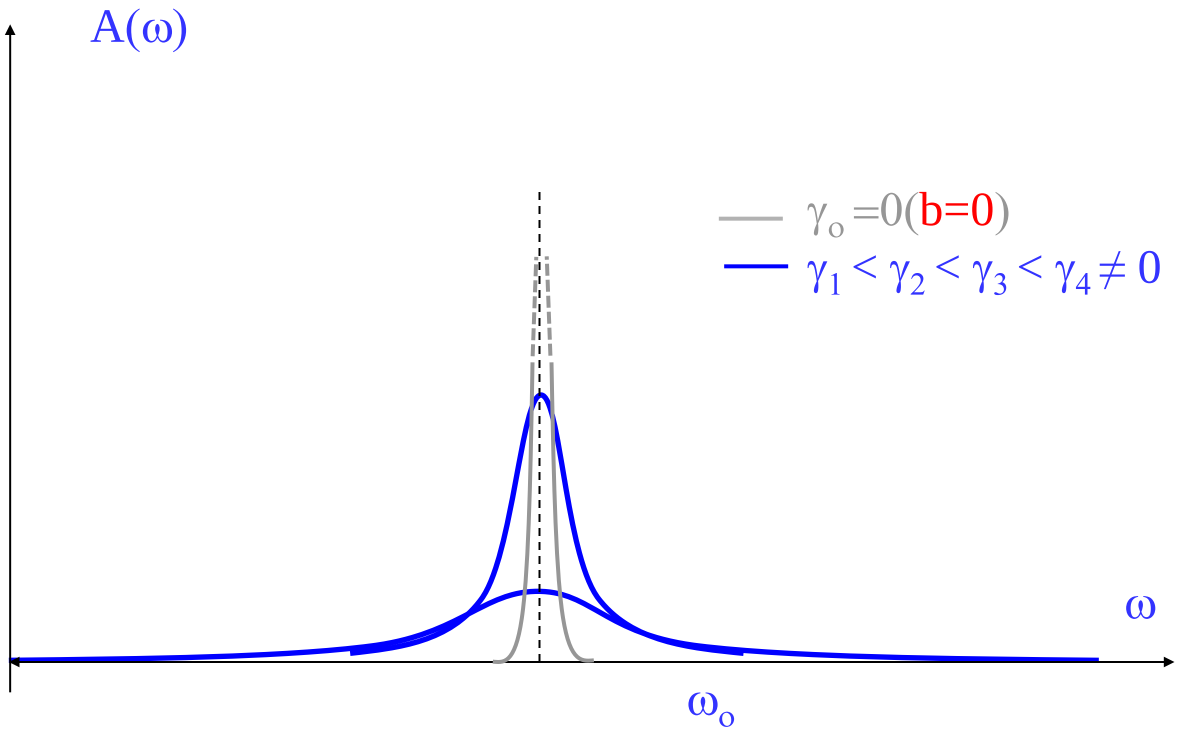




Genlik-1

$$x(t) = A(\omega)\cos\left(\omega t + \phi(\omega)\right)$$

Genliğin frekansa bağlılığı: $$A(\omega) = \frac{F_o / m}{\left[\gamma^2\omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}}$$



Genlik-2

Hangi frekans değerinde genlik (A) maksimum olur?

$$x(t) = A(\omega)\cos\left(\omega t + \phi(\omega)\right)$$

Genliği maksimum yapan frekans: $\dfrac{dA(\omega)}{d\omega} = 0$

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = \left(\frac{\omega F_o}{m}\right)\frac{\left[\gamma^2 - 2\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)\right]}{\left[\gamma^2\omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{3/2}} = 0$$

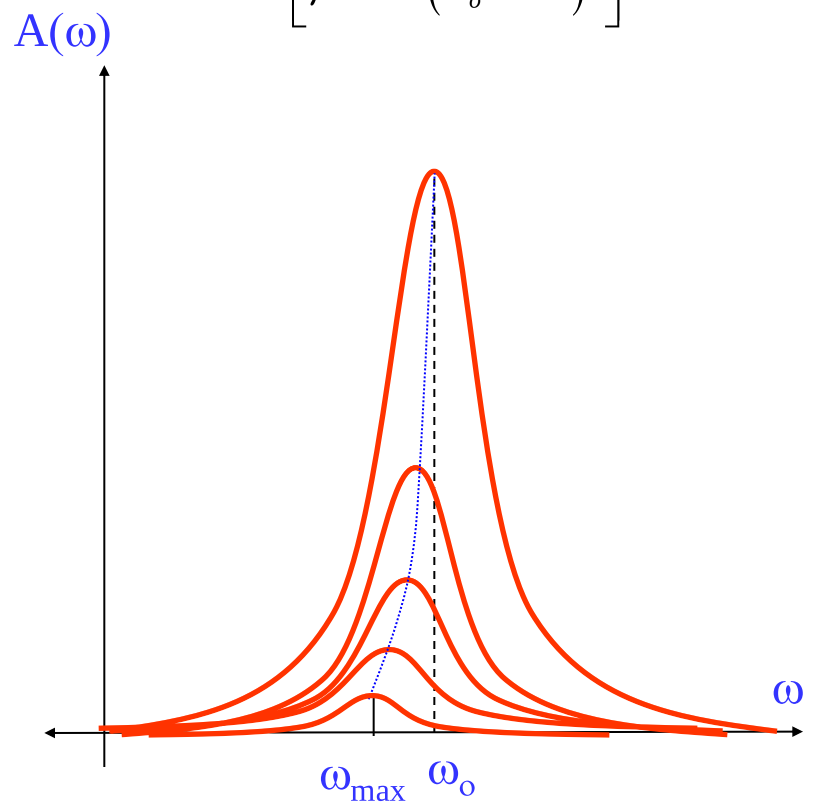
$$\gamma^2 - 2\left(\omega_o^2 - \omega^2\right) = 0 \Rightarrow \omega = \left[\omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right]^{1/2}$$

$$\boxed{\omega_{\max} = \left[\omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right]^{1/2}}$$

Küçük sönüm durumunda:

$$\gamma(= b/m) \to 0; \omega \to \omega_o$$

$$\omega_{\max} = \left[\omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right]^{1/2} \cong \omega_o$$



Genliğin Maksimum Değeri

Genliğin frekansa bağlılığı:

$$\omega_{\max} = \left[\omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right]^{1/2}$$

$\omega_{\max}$ değerinde genlik:

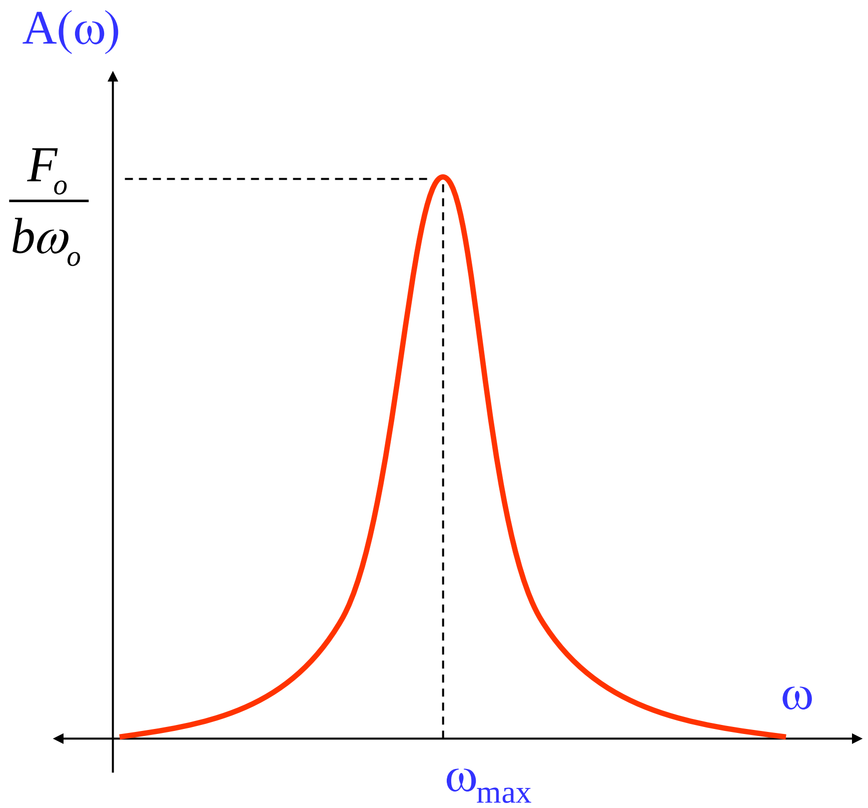
$$A(\omega_{\max}) = \frac{F_o/m}{\left[\gamma^2\left(\left(\omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right)^{1/2}\right)^2 + \left(\omega_o^2 - \left(\left(\omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right)^{1/2}\right)^2\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$A(\omega_{\max}) = \frac{F_o/m}{\left[\gamma^2\omega_o^2 - \frac{\gamma^4}{2} + \left(\omega_o^2 - \omega_o^2 + \frac{\gamma^2}{2}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{F_o/m}{\left[\gamma^2\omega_o^2 - \frac{\gamma^4}{2} + \frac{\gamma^4}{4}\right]^{1/2}} = \frac{F_o/m}{\left[\gamma^2\omega_o^2 - \frac{\gamma^4}{4}\right]^{1/2}}$$

$$\gamma << \omega_o \rightarrow; \omega \rightarrow \omega_o$$

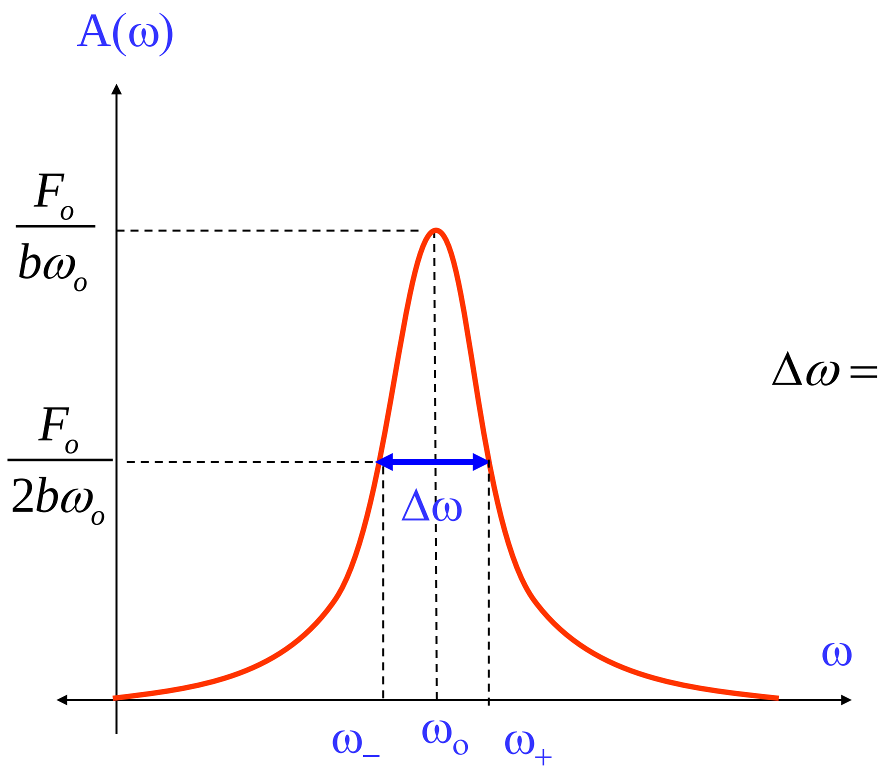
$$A(\omega_{\max}) = \frac{F_o/m}{\gamma\omega_o\left[1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_o^2}\right]^{1/2}} \cong \frac{F_o/m}{\gamma\omega_o} = \frac{F_o}{b\omega_o}$$

$$A(\omega_{\max}) = \frac{F_o/m}{\left[\gamma^2\omega_0^{\ 2} + \left(\omega_o^2 - \omega_o^{\ 2}\right)^2\right]^{1/2}} \cong \frac{F_o}{b\omega_o}$$



Bant Genişliği

Genliğin frekansa bağlılığı:

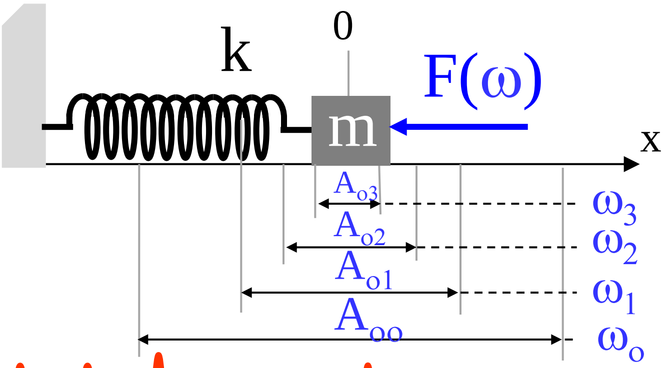


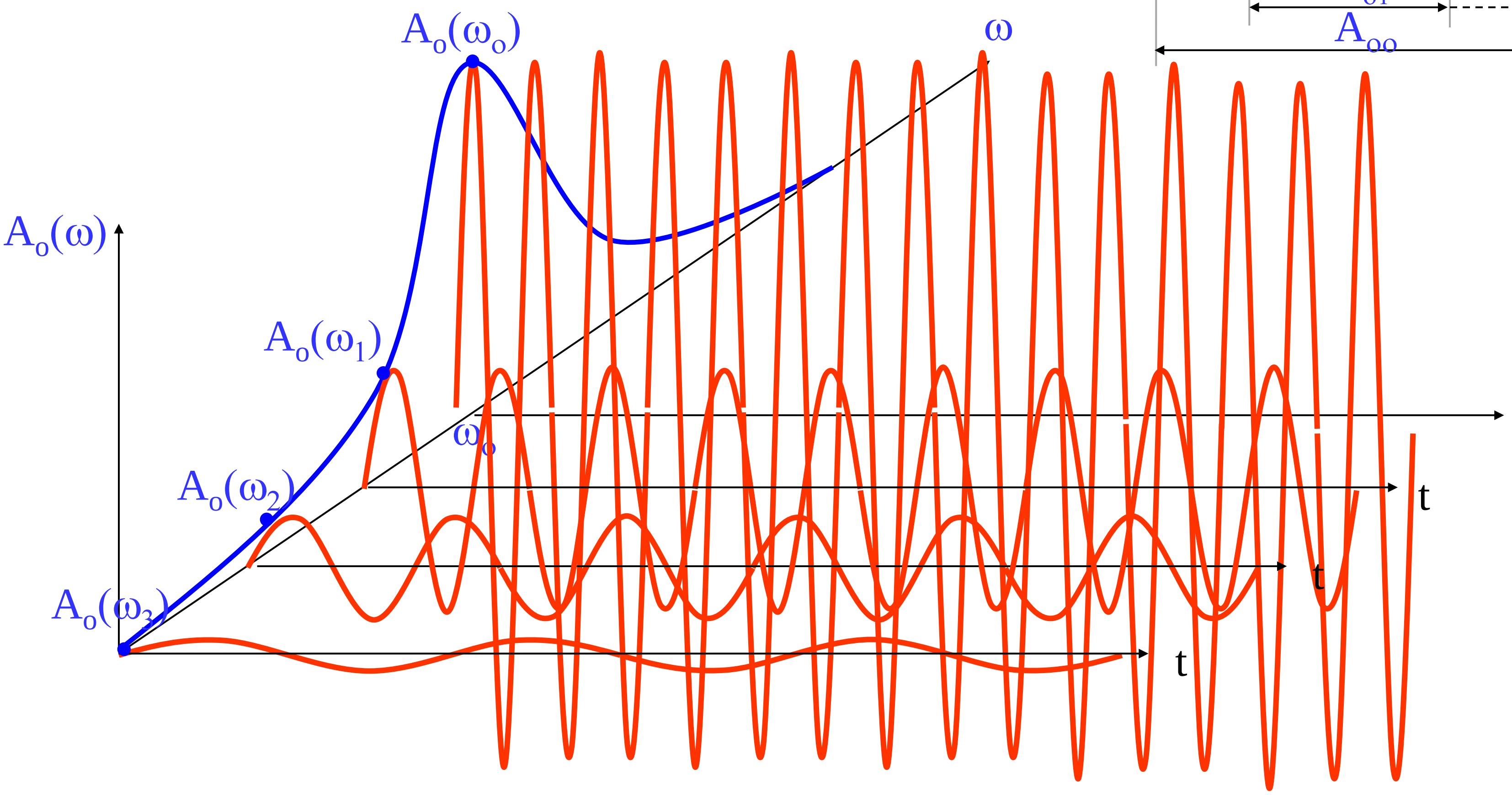
$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$$

$$\omega_{\max} = \left[\omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right]^{1/2}$$

Rezonans

$$A_o(\omega) = \frac{F_o / m}{\left[\gamma^2\omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}}$$





Genlik gittikçe artmıyor, sadece verilen her frekans değerinde genlik farklı bir değerde oluyor (Sadece b=0 olursa frekansla birlikte genlik sonsuza gider):

ZSHH-Enerji ve Güç

Kinetik enerji:

$$K(\omega)=\frac{1}{2}mv^2(t) \qquad v(t)=-\omega x_o(\omega)\sin\left(\omega t+\phi\right)$$

$$K(\omega)=\frac{1}{2}mv^2(t)=\frac{1}{2}m\omega^2x_o^2\sin^2(\omega t+\phi) \qquad K(\omega)=\frac{1}{2}m\omega^2x_o^2$$

Potansiyel enerji:

$$U(\omega)=\frac{1}{2}kx^2(t) \qquad x(t)=x_o(\omega)\cos\left(\omega t+\phi\right)$$

$$U(\omega)=\frac{1}{2}kx^2(t)=\frac{1}{2}mkx_o^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

$$<Sin^2(\omega t)>=\frac{1}{T}\int_0^T Sin^2(\omega t)dt=\frac{1}{2}$$

$$<Cos^2(\omega t)>=\frac{1}{T}\int_0^T Cos^2(\omega t)dt=\frac{1}{2}$$

$$<Sin(\omega t)Cos(\omega t)>=\frac{1}{T}\int_0^T Sin(\omega t)Cos(\omega t)dt=0$$

$$<K(\omega)>=\frac{1}{2}m\omega^2x_o^2<\sin^2(\omega t+\phi)>=\frac{1}{2}m\omega^2x_o^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$<U(\omega)>=\frac{1}{2}mkx_o^2<\cos^2(\omega t+\phi)>=\frac{1}{2}mkx_o^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

Toplam Mekanik enerjinin zaman ortalaması:

$$<E(\omega)>=<K(\omega)>+<U(\omega)>=\frac{1}{4}m\omega^2x_o^2+\frac{1}{4}kx_o^2$$

$$\boxed{<E(\omega)>=\frac{1}{4}m\omega^2x_o^2+\frac{1}{4}kx_o^2}$$

ZSHH-Enerji ve Güç

Mekanik enerjinin zaman ortalaması:

$$< E(\omega) >=< K(\omega) > + < U(\omega) >= \frac{1}{4} m\omega^2 x_o^2 + \frac{1}{4} k x_o^2$$

$$< E(\omega) >= \frac{1}{4}\left(m\omega^2 + k\right) x_o^2$$

$$< E(\omega) >= \frac{m}{4}\left(\omega^2 + \omega_o^2\right) x_o^2$$

$$x_o(\omega) = \frac{F_o / m}{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}} \qquad < E(\omega) >= \frac{m}{4}\left(\frac{F_o^2}{m^2}\right) \frac{\left(\omega^2 + \omega_o^2\right)}{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]}$$

$$\frac{b}{m} << 2\omega_o \qquad \omega \cong \omega_o \Rightarrow < E(\omega) >= \frac{mF_o^2}{4b^2}$$

Veya $\dfrac{d < E(\omega) >}{d\omega} = 0$ $\qquad \dfrac{d < E(\omega) >}{d\omega} = \dfrac{4F_o^2}{m} \dfrac{\left(\omega_o - \omega\right)}{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^2}$ $\qquad \omega = \omega_o$ elde edilir.

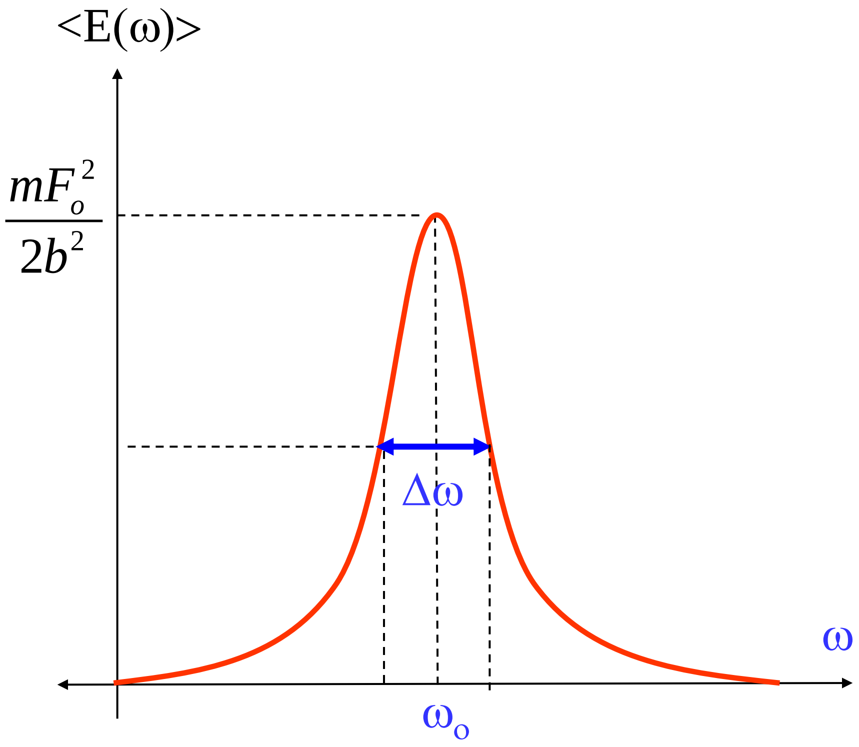
$\omega=\omega_o$ durumunda maksimum enerji: $\qquad \omega = \omega_o \;\; \Rightarrow \;\; < E(\omega) >= \dfrac{mF_o^2}{2b^2}$

Enerji

Ortalama enerjinin frekansa bağlılığı:

$\omega=\omega_o$ durumunda maksimum enerji:

$$\omega = \omega_o \quad \Rightarrow \quad <E(\omega)>=\frac{mF_o^2}{2b^2}$$



Ortalama Güç

Ortalama Güç: $< P(\omega) >= \frac{1}{T}\int_0^T Fvdt$

$v(t) = -\omega x_o(\omega)\sin(\omega t + \phi)$

$x_o(\omega) = \frac{F_o / m}{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}}$

$$< P(\omega) >= \frac{1}{T}\int_0^T Fvdt = \frac{1}{T}\int_0^T F_o \cos(\omega t) \frac{\left(\frac{\omega F_o}{m}\right)}{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}} \sin(\omega t + \phi)\, dt$$

$$< P(\omega) >= \frac{1}{T}\int_0^T Fvdt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\left(\frac{\omega F_o^2}{m}\right)}{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}} \cos(\omega t)\sin(\omega t + \phi)\, dt$$

$$\sin(\omega t + \phi) = \sin(\omega t)\cos(\phi) + \cos(\omega t)\sin(\phi)$$

$$< P(\omega) >= \underbrace{\cancel{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\omega F_o^2}{m} \frac{\cos(\omega t)\sin(\omega t)\cos(\phi)}{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}} dt}}_{0} - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\omega F_o^2}{m} \frac{\cos^2(\omega t)\sin(\phi)}{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}} dt$$

$$< P(\omega) >= \frac{\left(\frac{\omega F_o^2}{2m}\right)}{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}} \sin(\phi)$$

Ortalama Güç-2

Ortalama Güç:

$$< P(\omega) >= \frac{\left(\dfrac{\omega F_o}{2m}\right)}{\left[\gamma^2\omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}} \sin(\phi)$$

$\omega \cong \omega_o$ $$\omega_o^2 - \omega^2 \cong (\omega_o - \omega)(\omega_o + \omega) \cong 2\omega_o(\omega_o + \omega)$$

$$< P(\omega \cong \omega_o) >= \left(\frac{F_o^2}{2m}\right) \frac{\sin(\phi)}{\left[\gamma^2 + 2(\omega_o - \omega)\right]^{1/2}}$$

Kalite Faktörü (Q-Faktörü)

$$Q = 2\pi \frac{Sistemde\ Depo\ Edilen\ Enerji}{Bir\ Salınımda(Periyotta)\ Kaybedilen\ Enerji}$$

$$Q = 2\pi \frac{<E>}{<P>T} = \frac{2\pi}{T}\tau = \omega\tau$$

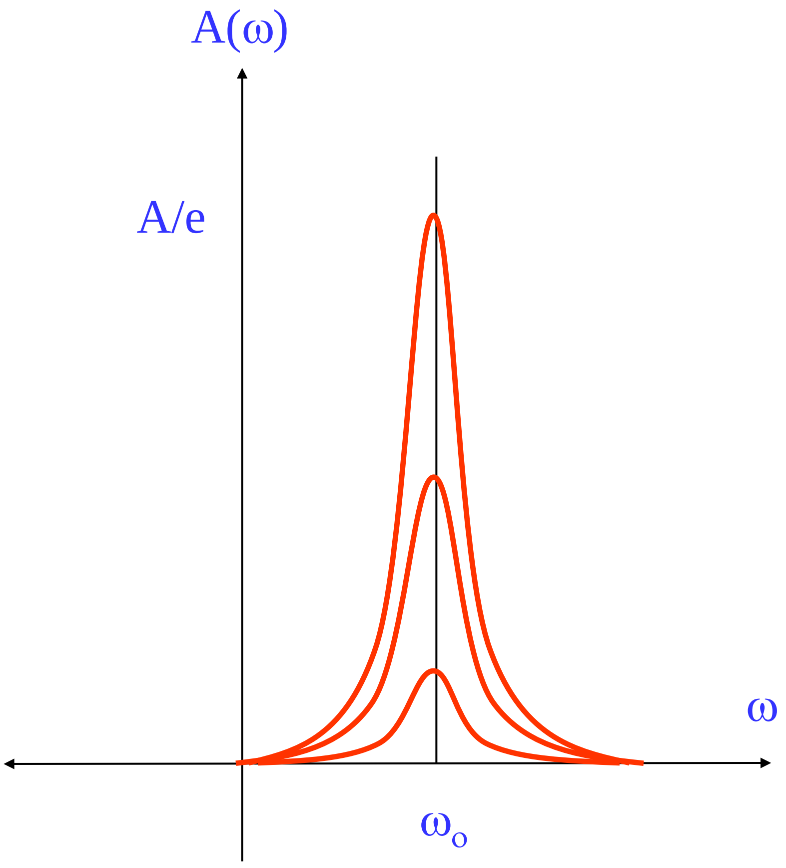
$$\omega = \omega_o\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{2\omega_o}\right)^2} = \omega_o\sqrt{1-\left(\frac{1}{2(\omega_o/\gamma)}\right)^2} = \omega_o\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$$

$$Q \to \infty \Rightarrow \omega = \omega_o$$

Kalite Faktörü Q (Quality)

$$Q = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\omega}{b/m}$$

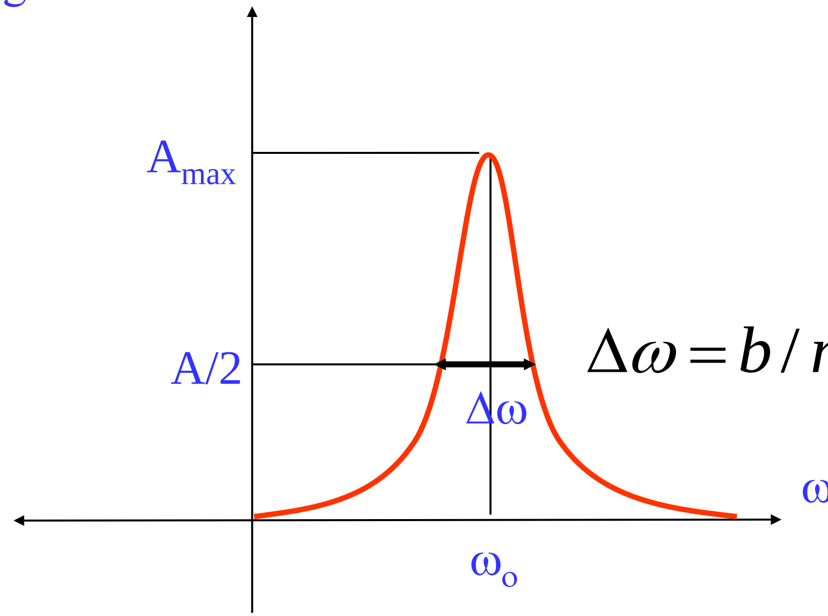
$$\frac{b}{2m} << \frac{k}{m}$$



Kalite Faktörü Q (Quality)

Sönümün küçük olduğu
duruma bakalım:

$$\gamma << 2\omega_o$$



$$\Delta\omega = b/m$$

$$Q = \frac{\omega_o}{\Delta\omega} = \frac{\omega_o}{b/m}$$

$$b \to 0 \quad Q \to \infty$$

$$E = E_o e^{-\gamma t} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -\gamma E_o e^{-\gamma t} = -\gamma E$$

$$\Delta E = -\gamma E \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = -\gamma \Delta t = -\gamma \left(\frac{2\pi}{\omega} \right) = -2\pi \left(\frac{1}{\omega\gamma} \right)$$

Bir perioyot
süresince
kaybedilen enerji

$$\frac{\Delta E}{E} = -2\pi \left(\frac{1}{\omega\gamma} \right) = -2\pi \left(\frac{1}{Q} \right)$$

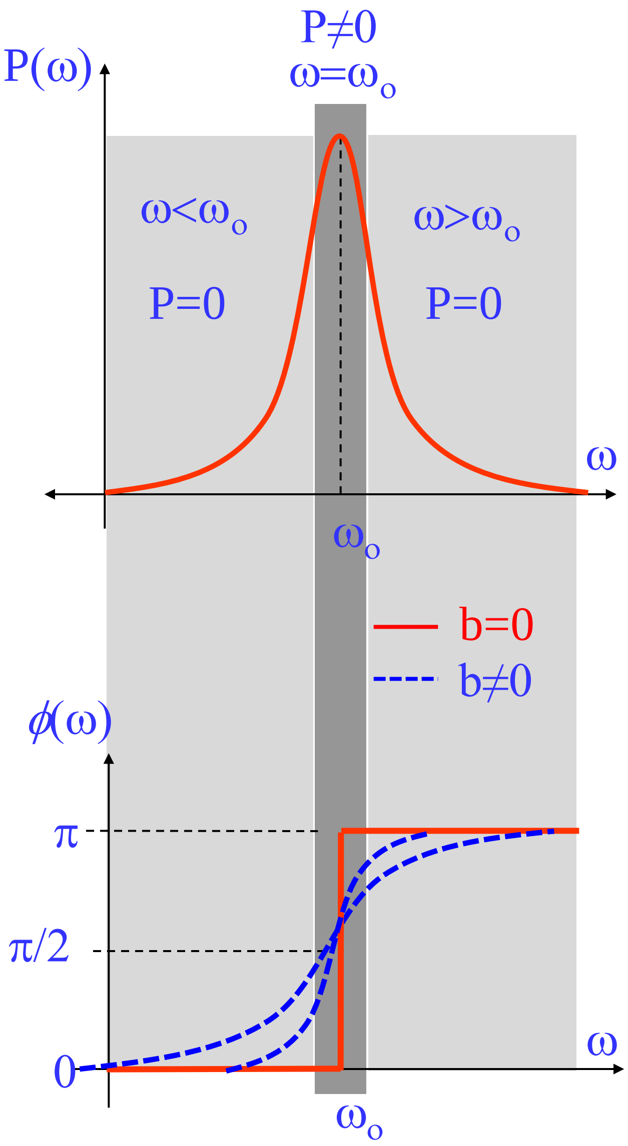
Rezonans

Rezonans olayıyla birçok yerde karşılaşmak mümkündür. fizikte önemlidir.

İki örnek verilecektir.

– Radyo Alıcısı

Ortalama Güç-1



$$< P(\omega) >= \frac{\left(\frac{\omega F_o}{2m}\right)}{\left[\left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2 + \left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2\right]^{1/2}} \sin(\phi)$$

$$\phi = 0 \;\Rightarrow\; < P(\omega) >= 0$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; < P(\omega) > \neq 0$$

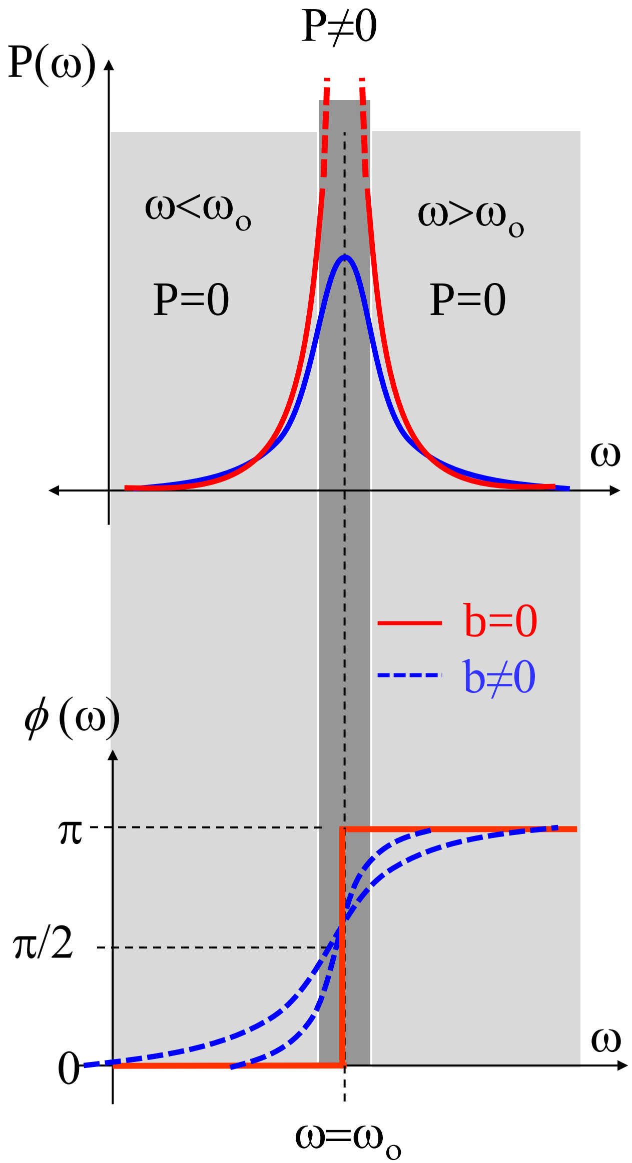
$$\phi = \pi \;\Rightarrow\; < P(\omega) >= 0$$

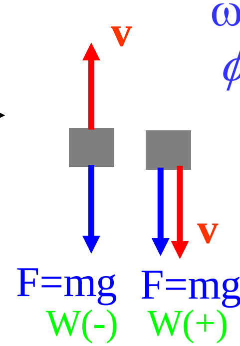
Sadece rezonans frekansında (ve civarında, $\Delta\omega$ bant genişliği içinde) güç aktarımı var;

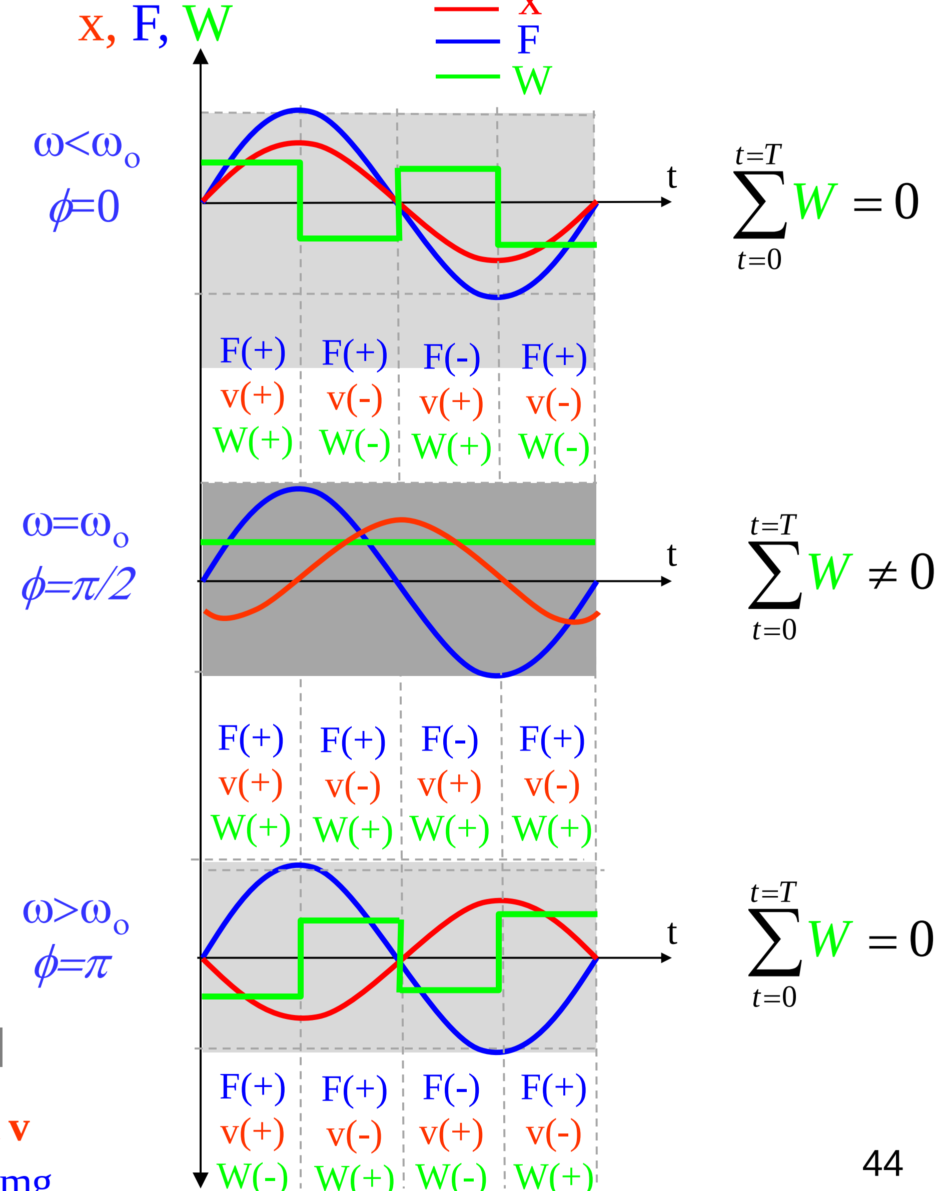
Ortalama Güç-2

$$W = \vec{F}.\vec{r}$$

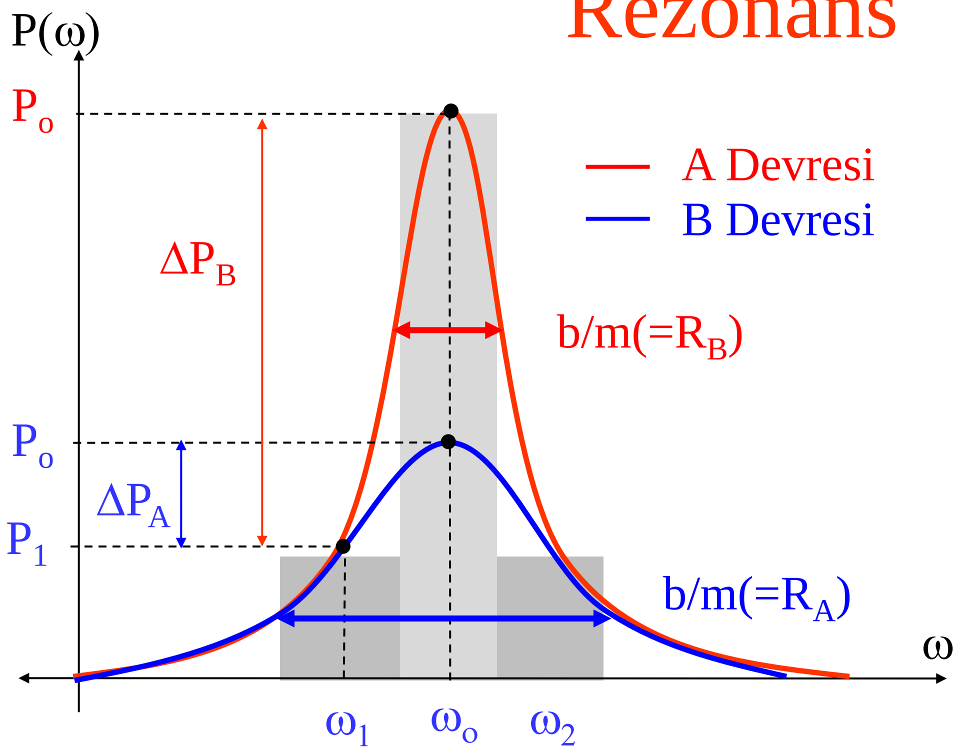
$$P = \vec{F}.\vec{v}$$







Rezonans



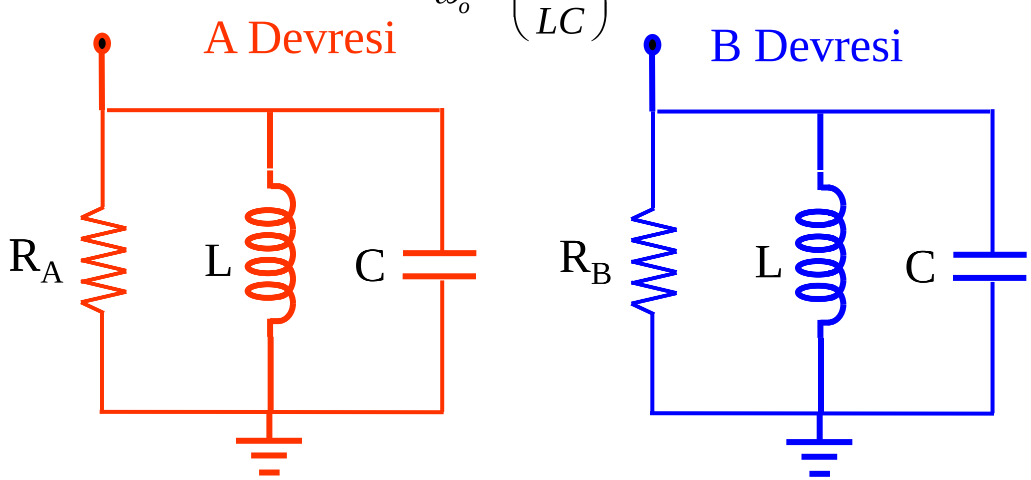
A radyo alıcı devresinin rezonans kazanç eğrisi A ise dinlemek istenilen istasyon (ω_o) ile diğer istasyonlar (ω_1 ve ω_2) arasında güç oranı (diğer istasyonları bastırma oranı) ΔP_A dır.

$$\Delta P_A = \frac{P_0 - P_1}{P_0}$$

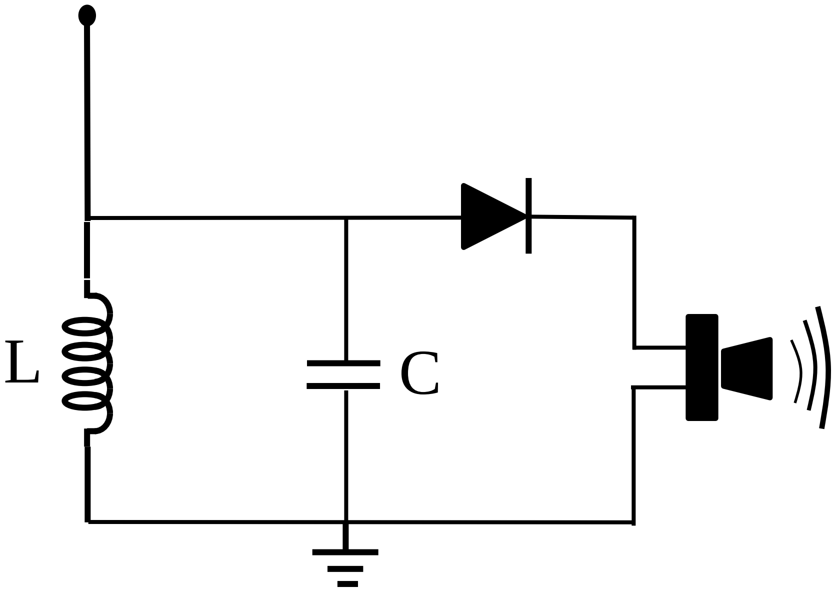
Eğer devrenin direnci küçültülürse iki istasyonun güç oranı artacaktır..

$$\Delta P_B = \frac{P_0 - P_1}{P_0}$$

$$\omega_o \equiv \left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2}$$



Radyo Alıcısı



$$\omega_o \equiv \left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2}$$