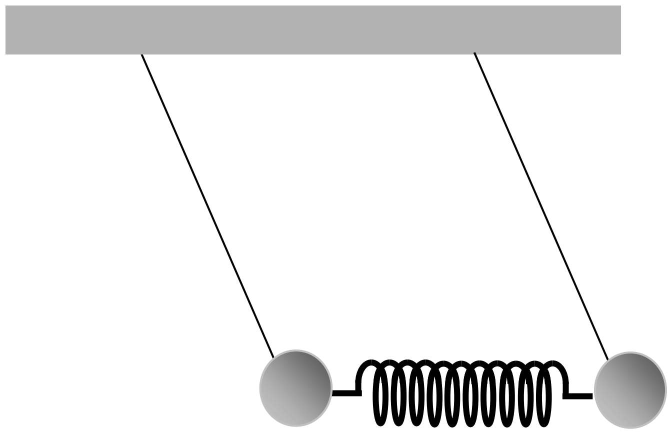
Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği Bölümü

FZM210 Dalgalar ve Optik

Prof. Dr. Hüseyin Sarı

Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Fizik Mühendisliği Bölümü

Çiftlenimli Sistemler



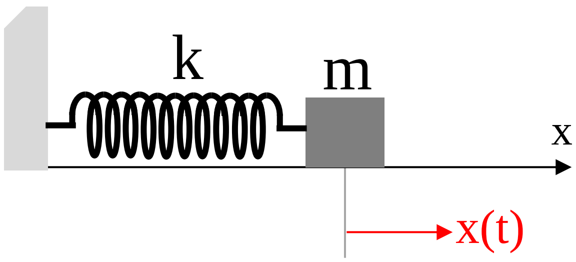
Dersin Amacı

Bu derste,

- Çiftlenimli salınıcıların hareketleri incelenecek,
- Çiftlenmiş sistemlerde öz frekanslar ve öz vektörler bulunacak

Derin Alt Başlıkları

- Çiftlenimli Kütle-Yay Sistemi
  - Normal Modlar
  - Normal Koordinatlar
- Çiftlenimli Sarkaç Sistemi
  - Normal Modlar
  - Normal Koordinatlar
- Çiftlenimli LC Devresi



$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

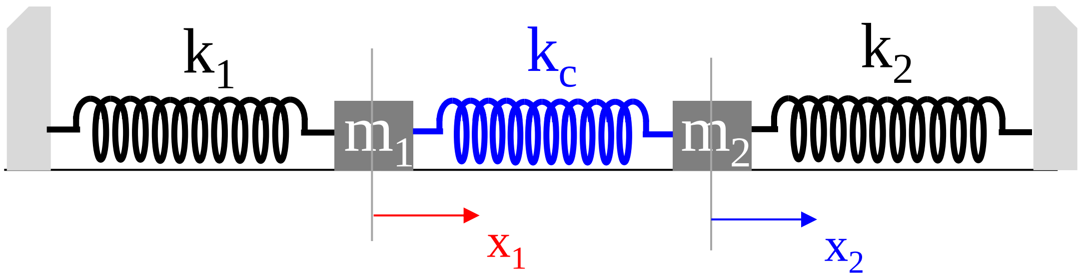
Bu sistem tek bir kütleden oluştuğu için bir tane salınım frekansı (ω_o) vardır ve ***tek bir serbestlik derecesine*** ($x(t)$) sahiptir. m kütlesi için hareket denklemi:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_o^2 x(t) = 0 \qquad \omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

m kütlesinin zamana bağlı yerdeğiştirmesi: $x(t) = A\cos(\omega_o t + \phi)$

Çiftlenimli Salınıcılar-1

Sürtünmesiz yatay düzlemde, bir yayla (k_c) birbirine bağlı iki kütle-yay (k_1 ve k_2) sisteminden oluşan çiftlenimli bir kütle-yay sistemini düşünelim.



$$\omega_{o1} \equiv \left(\frac{k_1}{m_1}\right)^{1/2} \qquad \omega_{o2} \equiv \left(\frac{k_2}{m_2}\right)^{1/2}$$

k_c yayı ile birbirine bağlanan bu iki kütle-yay sisteminin (yeni) frekansı nedir?

$$\omega = ?$$

$x_1(t)$ ve $x_2(t)$'nin zamana bağlılığı nasıldır?

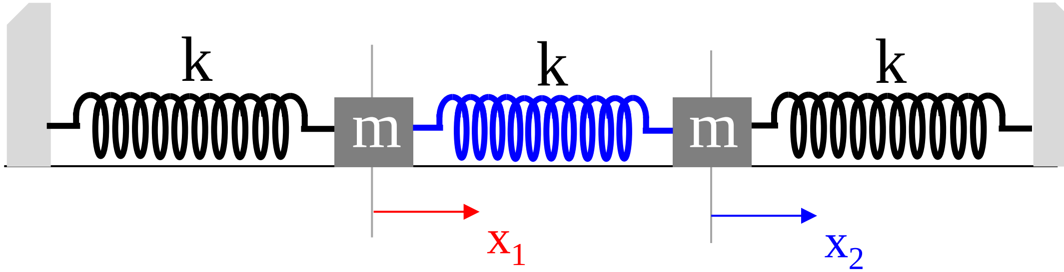
Bu dersin amaçı, etkileşim içinde olan yukarıdaki iki kütle-yay'dan oluşan sistemin:

- Salınım yaptığı özgün açısal frekansları (özfrekanslar),
- Her kütle için hareket denklemini ve özvektörleri

bulmaktır.

Çiftlenimli Salınıcılar-2

Sürtünmesiz yatay düzlemde, yay sabiti aynı olan ($k_1=k_2=k_c=k$) ve kütleleri aynı ($m_1=m_2$) özel duruma bakalım.



$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} \qquad \omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

Bu sitemin doğal titreşim frekans(lar)ı ne(ler)dir? $\omega = \omega_o + \omega_o$?

$\omega = \omega_o - \omega_o$?

$x_1(t)$ ve $x_2(t)$'nin zamana bağlılığı nasıldır?

Amaç, etkileşim içinde olan yukarıdaki iki kütle-yaydan oluşan sistemin:

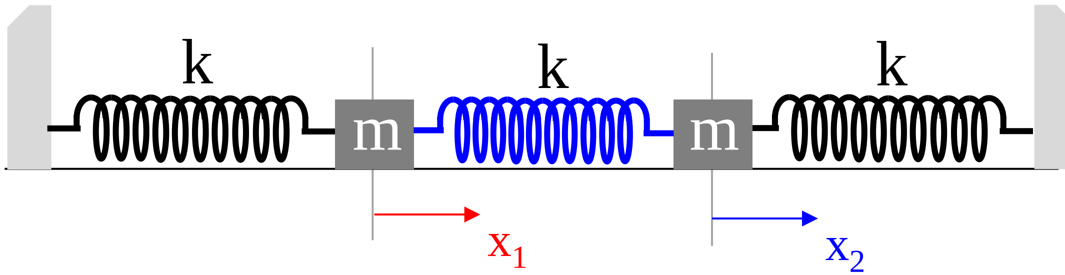
•Salınım yaptığı özgün açısal frekanslarını,

•Her kütle için hareket denklemini

bulmaktır.

Çiftlenimli Salınıcılar

Sürtünmesiz yatay düzlemde, yay sabiti aynı olan ($k_1=k_2=k_c=k$) 3 yay ile kütleleri aynı ($m_1=m_2=m$) iki cisimden oluşan çiftlenimli kütle-yay sistemini düşünelim.



Bu sistem ***iki serbestlik derecesine*** (x_1 ve x_2) sahiptir (iki kütle olduğu ve her kütlenin hareket denklemini yazmamız gerektiği için)

Her bir m kütlesi için hareket denklemi:

1. kütle için: $$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k\left(x_1 - x_2\right)$$

2. kütle için: $$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k\left(x_2 - x_1\right)$$

Bu ifadeler düzenlenirse:

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0$$

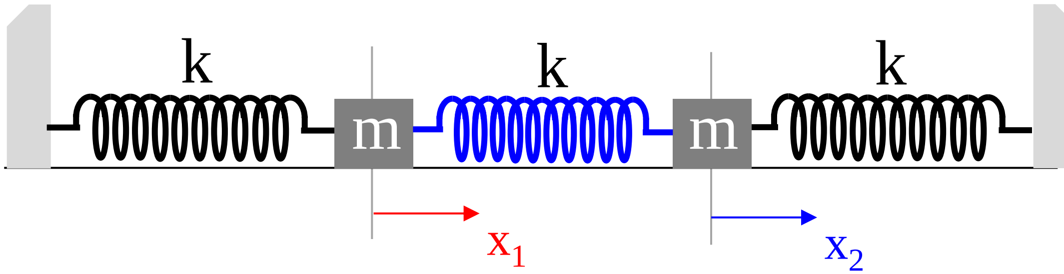
Çiftlenim**SİZ** sistem:

$$m\ddot{x} + kx - kx_2 = 0$$

Bu eşitliklerin her birinde hem $\mathbf{x_1}$, hem de $\mathbf{x_2}$ olduğu ve bu durum diğer niceligi de etkilediğinden bu sistemlere ***çiftlenmiş sistemler*** denir.

Çiftlenimli Salınıcılar

Sürtünmesiz yatay düzlemde, yaysabiti aynı olan ($k_1=k_2=k_3=k$) 3 yay ile kütleleri aynı ($m_1=m_2=m$) iki cisimden oluşan çiftlenimli kütle-yay sistemini düşünelim.



$$ma_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) \Rightarrow \frac{d^2x_1}{dt^2} + 2kx_1 - kx_2 = 0$$

$$ma_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) \Rightarrow \frac{d^2x_2}{dt^2} + 2kx_2 - kx_1 = 0$$

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0$$

Her taraf m kütlesine bölünürse ve $\omega_o=(k/m)^{1/2}$ (doğal açısal frekans) kısaltması kullanılırsa:

$$\ddot{x}_1 + 2\omega_o^2 x_1 - \omega_o^2 x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + 2\omega_o^2 x_2 - \omega_o^2 x_1 = 0$$

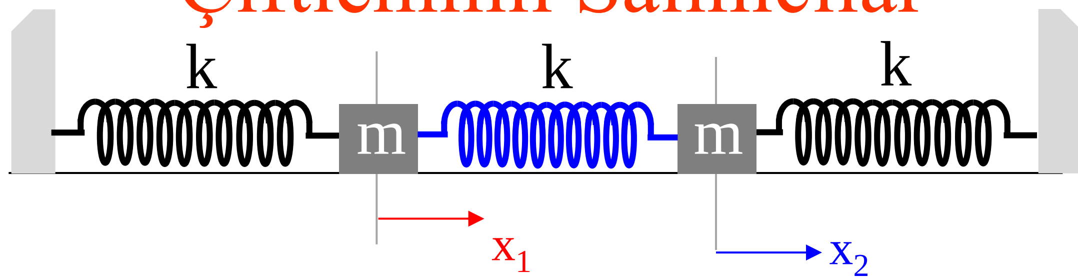
$$\omega_o \equiv \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

Çözüm önerisi:

$$x_1(t) = A_1 e^{i\omega t}$$

$$x_2(t) = A_2 e^{i\omega t}$$

Çiftlenimli Salınıcılar



$$\frac{dx_1(t)}{dt} = iA_1\omega e^{i\omega t} = i\omega x_1$$

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} = -A_1\omega^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 x_1$$

Çözüm önerisi:

$$x_1(t) = A_1 e^{i\omega t} \qquad x_2(t) = A_2 e^{i\omega t}$$

Alar ve ω nedir?)

$$\ddot{x}_1 + 2\omega_o^2 x_1 - \omega_o^2 x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\omega^2 A_1 e^{i\omega t} + 2\omega_o^2 A_1 e^{i\omega t} - \omega_o^2 A_2 e^{i\omega t} = 0$$

$$\ddot{x}_2 + 2\omega_o^2 x_2 - \omega_o^2 x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\omega^2 A_2 e^{i\omega t} + 2\omega_o^2 A_2 e^{i\omega t} - \omega_o^2 A_1 e^{i\omega t} = 0$$

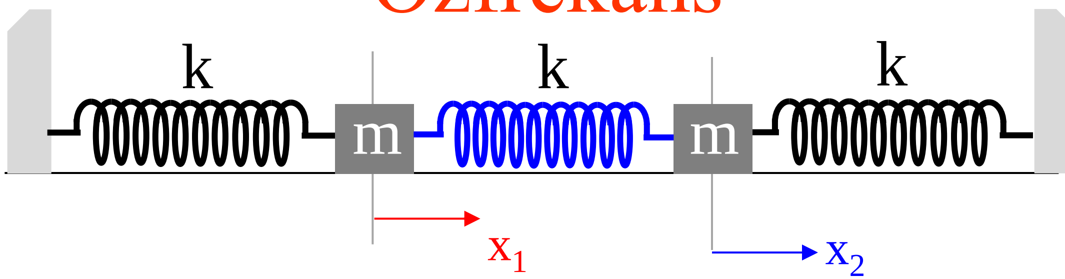
$$\left(2\omega_o^2 - \omega^2\right) A_1 - \omega_o^2 A_2 = 0$$

$$-\omega_o^2 A_1 + \left(2\omega_o^2 - \omega^2\right) A_2 = 0$$

Bu denklem sistemini sağlayan ω sistemin salınım ***özfrekanslarını***; A_1 ve A_2 ise sistemin ***özvektörleri***dir.

$$\begin{pmatrix} 2\omega_o^2 - \omega^2 & -\omega_o^2 \\ -\omega_o^2 & 2\omega_o^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

Özfrekans



Özfrekanslar:

$$\begin{pmatrix} 2\omega_o^2-\omega^2 & -\omega_o^2 \\ -\omega_o^2 & 2\omega_o^2-\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}=0$$

A_1=0 ve A_2=0'dan farklı çözümlerin olabilmesi için gerekli koşul:

$$\det\begin{pmatrix} 2\omega_o^2-\omega^2 & -\omega_o^2 \\ -\omega_o^2 & 2\omega_o^2-\omega^2 \end{pmatrix}=0$$

$$\left(2\omega_o^2-\omega^2\right)^2-\omega_o^4=0$$

=> İki (dört) kök:

$$\omega_1=\pm\omega_o$$

$$\omega_2=\pm\sqrt{3}\omega_o$$

İki özdurum (özfrekans) vardır: *sistem bu iki öz frekanstan biri ile salınım yapar*

Öz Vektörler

Birinci kök (Özfrekans)

$$\omega_1 = \pm\omega_o$$

$$\left(2\omega_o^2 - \omega^2\right) A_1 - \omega_o^2 A_2 = 0$$

$$-\omega_o^2 A_1 + \left(2\omega_o^2 - \omega^2\right) A_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2\omega_o^2 - \omega_o^2 & -\omega_o^2 \\ -\omega_o^2 & 2\omega_o^2 - \omega_o^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_o^2 & -\omega_o^2 \\ -\omega_o^2 & \omega_o^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\omega_o^2 A_1 - \omega_o^2 A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = A_2$$

Çözümler:

$$A_1 = A_2 = A$$

$$x_1(t) = Ae^{i\omega_o t} + Be^{-i\omega_o t}$$

$$x_2(t) = Ae^{i\omega_o t} + Be^{-i\omega_o t}$$

$$x_1(t) = Ae^{i\omega_o t} + Ae^{-i\omega_o t} \Rightarrow x_1(t) = A\cos\left(\omega_o t + \phi\right)$$

$$x_2(t) = Ae^{i\omega_o t} + Ae^{-i\omega_o t} \Rightarrow x_2(t) = A\cos\left(\omega_o t + \theta\right)$$

Öz Vektörler

İkinci Kök (Özfrekans)

$$\omega_2 = \pm\sqrt{3}\omega_o$$

$$\left(2\omega_o^2 - \omega^2\right)A_1 - \omega_o^2 A_2 = 0$$

$$-\omega_o^2 A_1 + \left(2\omega_o^2 - \omega^2\right)A_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2\omega_o^2 - 3\omega_o^2 & -\omega_o^2 \\ -\omega_o^2 & 2\omega_o^2 - 3\omega_o^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\omega_o^2 & -\omega_o^2 \\ -\omega_o^2 & -\omega_o^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\omega_o^2 A_1 + \omega_o^2 A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2$$

$$A_1 = A \qquad x_1(t) = Ae^{i\left(\sqrt{3}\omega_o\right)t} + Be^{-i\sqrt{3}\omega_o t}$$

$$A_2 = -A \qquad x_2(t) = -Ae^{i(3\omega_o)t} + Be^{-i\sqrt{3}\omega_o t}$$

$$x_1(t) = B_1 e^{i\left(\sqrt{3}\omega_o\right)t} + B_2 e^{-i\left(\sqrt{3}\omega_o\right)t} \Rightarrow x_1(t) = A\cos\left(\sqrt{3}\omega_o t + \phi\right)$$

$$x_2(t) = C_1 e^{i\left(\sqrt{3}\omega_o\right)t} + C_2 e^{-i\left(\sqrt{3}\omega_o\right)t} \Rightarrow x_2(t) = B\cos\left(\sqrt{3}\omega_o t + \theta\right)$$

Öz Vektörler

$u_1(0)$, $u_1(0)$, $du_1(0)/dt$ ve $du_2(0)/dt$ başlangıç koşullarından A_1, A_2, ϕ_1, ve ϕ_2, parametreleri bulunabilir.

$$\omega_1 = \omega_o \qquad \omega_o^2 A_1 - \omega_o^2 A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = A_2$$

$$\omega_2 = \sqrt{3}\omega_o \qquad \omega_o^2 A_1 + \omega_o^2 A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2$$

Bu çözümlerden her biri *normal* veya karakteristik salınım modudur. Sistem çok özel başlangıç koşullarında bu modlardan sadece biri ile salınım yapar, ama en genel durumda bunların karışımından oluşan bir hareket yapar. Genel çözüm iki çözümün doğrusal (lineer) bileşimlerinden oluşur:

$$x_1(t) = Ae^{i\omega_1 t} + Be^{i\omega_2 t} \qquad x_1(t) = Ae^{i\omega_o t} + Be^{i\left(\sqrt{3}\omega_o\right)t}$$

$$x_2(t) = Ae^{i\omega_1 t} - Be^{i\omega_2 t} \qquad x_2(t) = Ae^{i\omega_o t} - Be^{i\left(\sqrt{3}\omega_o\right)t}$$

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$2A_1 e^{i\omega_o t} = x_1 + x_2$$

$$2A_2 e^{i\left(\sqrt{3}\omega_o\right)t} = x_1 - x_2$$

Sistem 1. modda (normal mod) titreşiyorsa B=0, $x_1+x_2=0$

2. modda titreşiyorsa A=0, $x_1-x_2=0$

Bunları normalize edersek matrisi oluşturarak dik vektörler (öz vektörler) elde edilir!

Öz Vektörler

$$\omega_1 = \omega_o \qquad \omega_o^2 A_1 - \omega_o^2 A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = A_2$$

$$\omega_2 = \sqrt{3}\omega_o \qquad \omega_o^2 A_1 + \omega_o^2 A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2$$

$u_1(0)$, $u_2(0)$, $du_1(0)/dt$ ve $du_2(0)/dt$ başlangıç koşullarından A_1, A_2, ϕ_1, ve ϕ_2, parametreleri bulunabilir.

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega_o t + \phi_1) + A_2\cos(\sqrt{3}\omega_o t + \phi_2)$$

$$x_2(t) = A_1\cos(\omega_o t + \phi_1) - A_2\cos(\sqrt{3}\omega_o t + \phi_2)$$

İki öz fonksiyon (öz vektör) olduğu için genel çözümler:

$$u_1 = A_1 + A_2$$

$$u_2 = A_1 - A_2$$

İki öz fonksiyon (öz vektör) olduğu için genel çözümler:

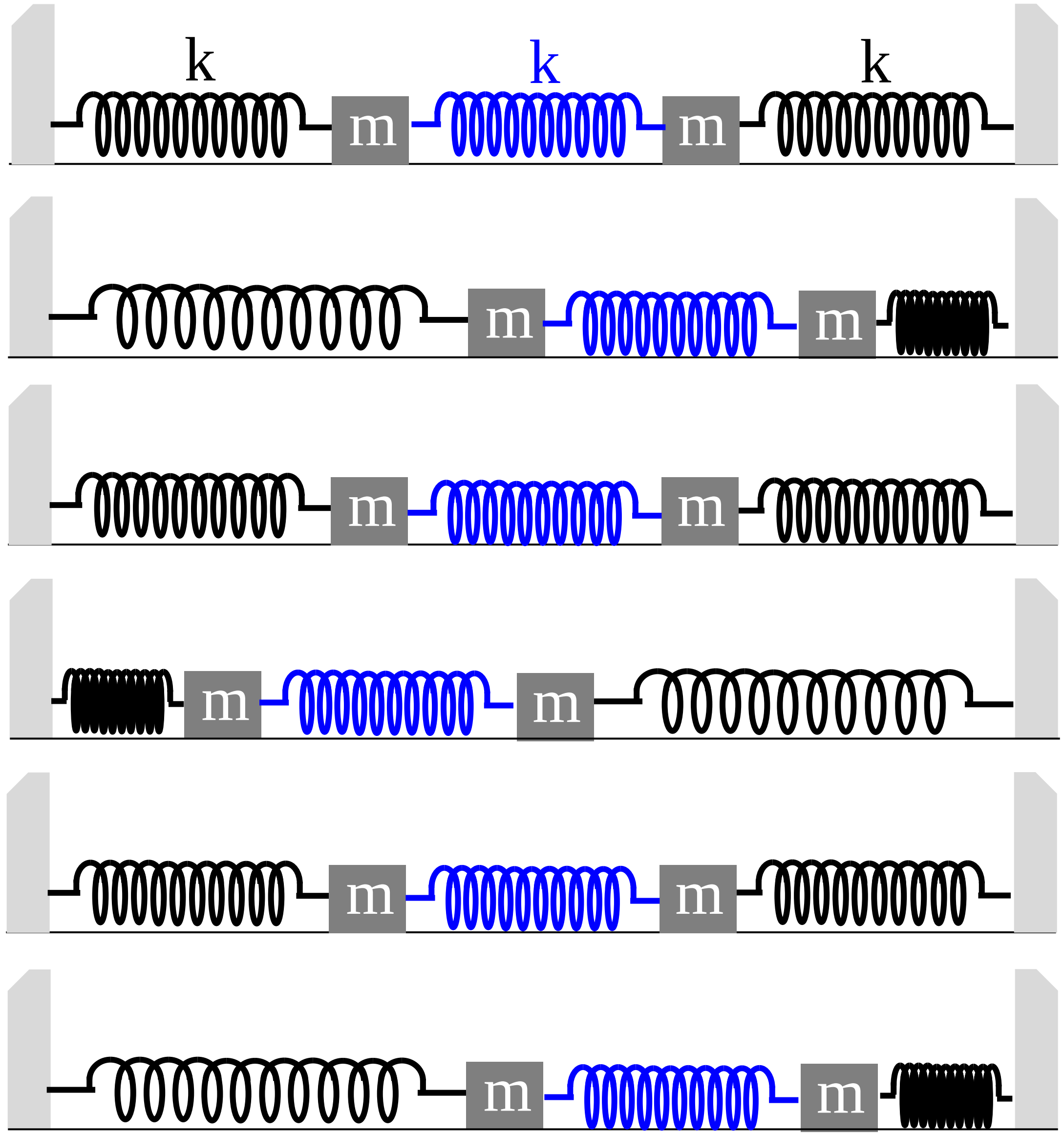
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1 + A_2\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1 - A_2\right)$$

Normal Modlar ve Koordinatlar

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1 + A_2\right)$$

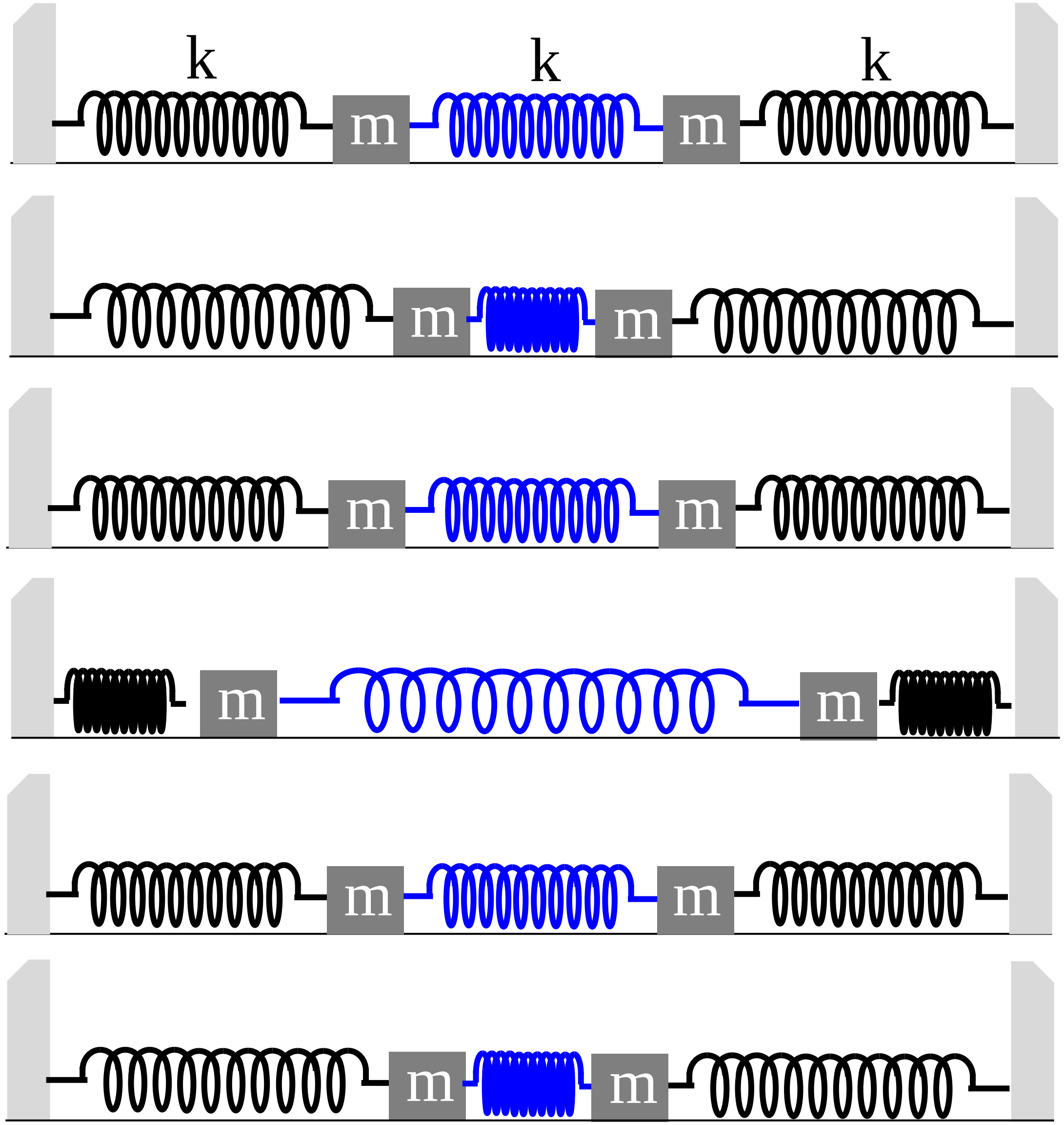
u_1 normal koordinatı ω_o frekansına karşı gelir ve sistem ω_o ile salınım yapar.



Normal Modlar

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 - A_2)$$

u_2 normal koordinatı $3\omega_o$ frekansına karşı gelir ve sistem $3\omega_o$ ile salınım yapar.



Normal Koordinatlar

$$\omega_1 = \omega_o \qquad \omega_o^2 A_1 - \omega_o^2 A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = A_2$$

$$\omega_2 = \sqrt{3}\omega_o \qquad \omega_o^2 A_1 + \omega_o^2 A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2$$

$u_1(0)$, $u_2(0)$, $du_1(0)/dt$ ve $du_2(0)/dt$ başlangıç koşullarından A_1, A_2, ϕ_1, ve ϕ_2, parametreleri bulunabilir.

$$u_1(t) = A_1 \cos(\omega_o t + \phi_1) + A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_o t + \phi_2)$$

$$u_2(t) = A_1 \cos(\omega_o t + \phi_1) - A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_o t + \phi_2)$$

İki öz fonksiyon (öz vektör) olduğu için genel çözümler:

$$u_1 = A_1 + A_2$$

$$u_2 = A_1 - A_2$$

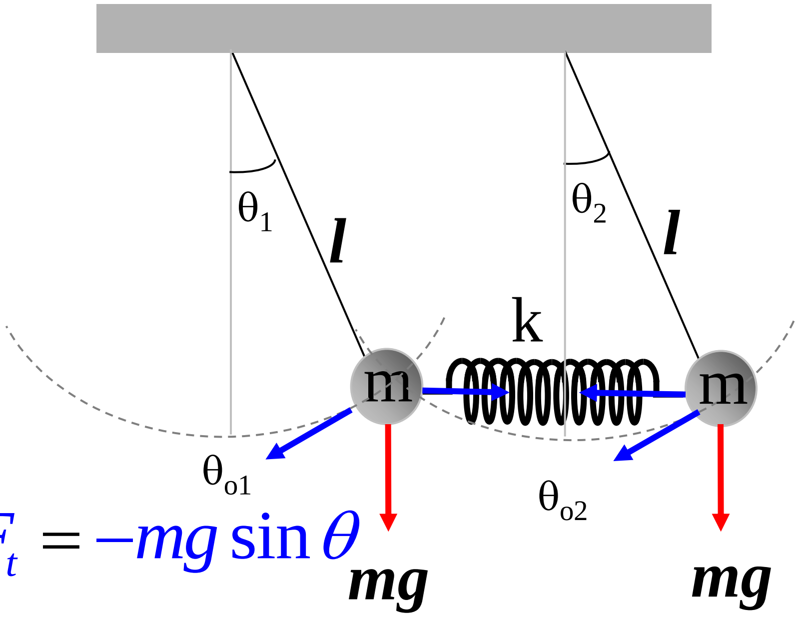
İki öz fonksiyon (öz vektör) olduğu için genel çözümler:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1 + A_2\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1 - A_2\right)$$

Bu titreşimlerden sadece birini gözlemek istersek başlangıç koşullarını ona göre ayarlamamız gerekecek diğer türlü ω_1 ve ω_2'nin karışımından oluşan bir hareket gözlenir. θ başlangıç yerdeğiştirme sıfır, eşit ve ters yönlü ilk hız durumunda sadece 2. modu gözleyeceğiz.

Çiftlenmiş Sarkaç

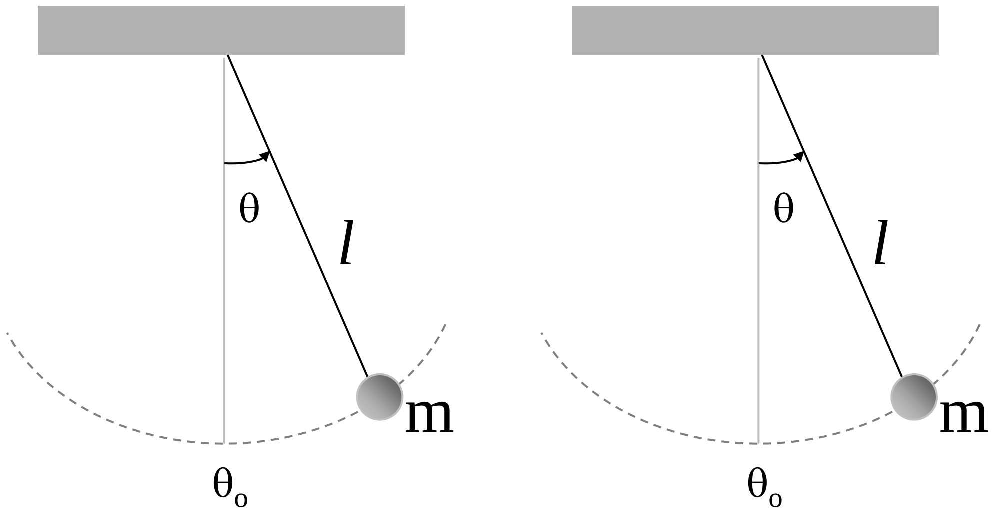


$$F_t = -mg\sin\theta$$

F=-kx

Basit Sarkaç-Hatırlatma

Sarkaçın hareket denklemini bulabilirsek θ(t), cisme ait bütün bilgileri edinmiş oluruz.

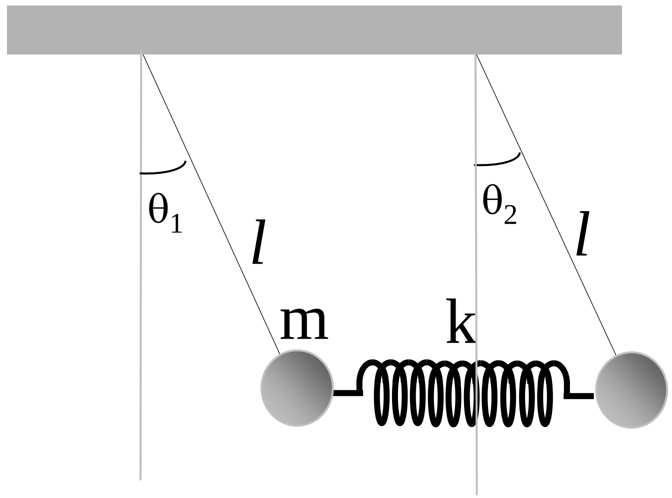


$$\omega_o \equiv \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2}$$

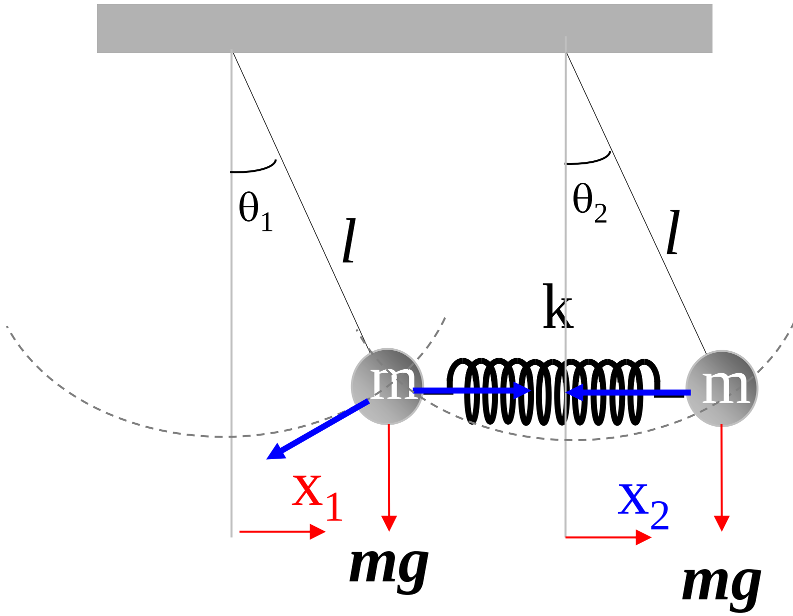
$$\boxed{\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \omega_o^2\theta(t) = 0}$$

$$\theta(t) = A\cos(\omega_o t + \phi)$$

Çiftlenmiş Sarkaç-1



Çiftlenmiş Sarkaç-1



$$\sin\theta \cong \theta$$

$$F_t = -mg\sin\theta \cong -mg\theta \cong -mg\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$F \cong -mg\theta$$

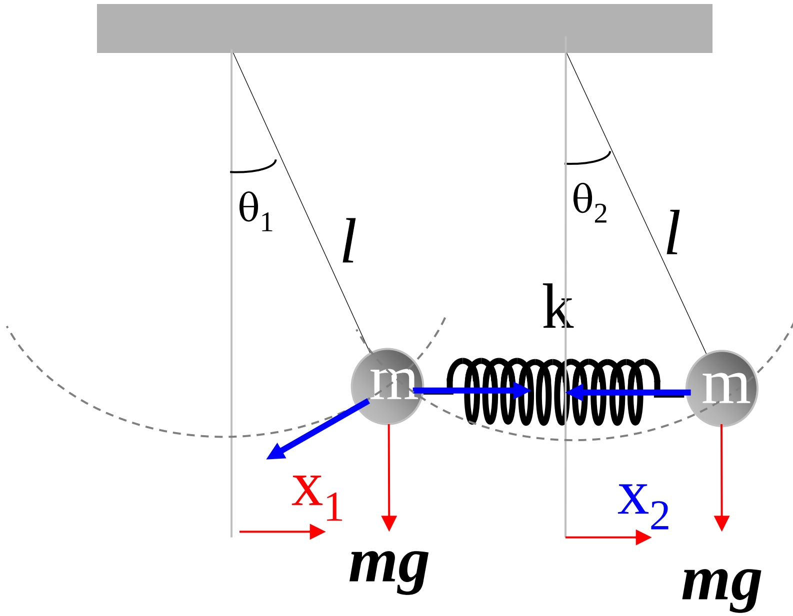
$$F_1 = -\frac{mg}{l}x_1 + k\left(x_2 - x_1\right)$$

$$F_2 = -\frac{mg}{l}x_2 + k\left(x_1 - x_2\right)$$

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x_1 + k\left(x_2 - x_1\right)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x_2 + k\left(x_1 - x_2\right)$$

Çiftlenmiş Sarkaç-2



$$F \cong -mg\theta$$

$$\sin\theta \cong \theta$$

$$F_t = -mg\sin\theta \cong -mg\theta \cong -mg\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)x_1 - \frac{k}{m}x_2 = 0$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)x_2 - \frac{k}{m}x_1 = 0$$

Çiftlenmiş Sarkaç-3

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) x_1 - \frac{k}{m} x_2 = 0$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) x_2 - \frac{k}{m} x_1 = 0$$

x_1 ve x_2 ifadesi her iki eşitliğin içinde olduğu için çiftlenimli olduğunu söyleyebiliriz.

Çözüm önerisi:

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}$$

$$x_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

$$-\left[\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) - \omega^2\right] A_1 - \frac{k}{m} A_2 = 0$$

$$-\frac{k}{m} A_1 - \left[\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) - \omega^2\right] A_2 = 0$$

Çiftlenmiş Sarkaç-4

Çözüm Önerisi:

$$-\left[\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)-\omega^2\right]A_1-\frac{k}{m}A_2=0$$

$$-\frac{k}{m}A_1-\left[\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)-\omega^2\right]A_2=0$$

$$\det\begin{pmatrix}\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)-\omega^2 & -\frac{k}{m}\\ -\frac{k}{m} & \left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)-\omega^2\end{pmatrix}=0$$

$$\left(\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\right)-\omega^2\right)^2-\left(\frac{k}{m}\right)^2=0$$

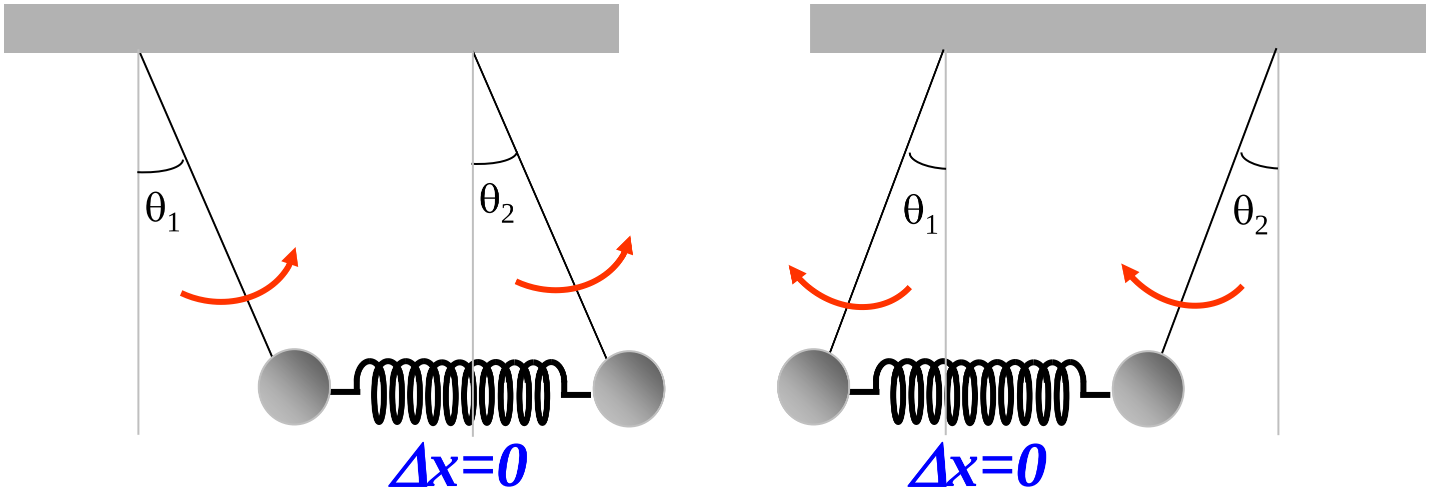
$$\omega_1=\pm\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_2=\pm\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}$$

Normal Mod-1

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Theta_1 = \Theta_2 (\omega = \omega_1)$$



$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\theta_1 = \theta_2 \neq 0$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$$

Bu titreşimlerden sadece birini gözlemek istersek başlangıç koşullarını ona göre ayarlamamız gerekecek diğer türlü ω_1 ve ω_2'nin karışımından oluşan bir hareket gözlenir.

θ başlangıç açıları eşit ve aynı yönlü ise sadece 1. modu gözleriz.

Normal Mod-2

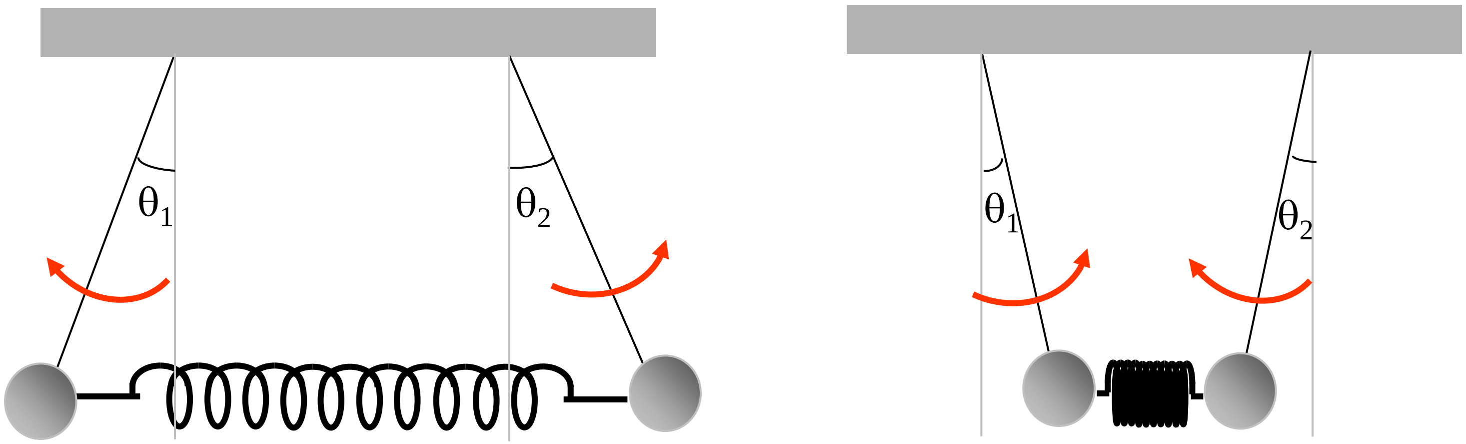
$$\omega_2 = \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Theta_1 = -\Theta_2 (\omega = \omega_2)$$

$$\theta_1 = -\theta_2$$

$$\dot{\theta}_1 \neq 0; \dot{\theta}_2 \neq 0$$

$$\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_2$$



Bu titreşimlerden sadece birini gözlemek istersek başlangıç koşullarını ona göre ayarlamamız gerekecek diğer türlü ω_1 ve ω_2'nin karışımından oluşan bir hareket gözleriz.

θ başlangıç yerdeğiştirmesi eşit ve ters yönlü ve ilk hız durumunda sadece 2. modu gözleriz.

Normal Mod-3

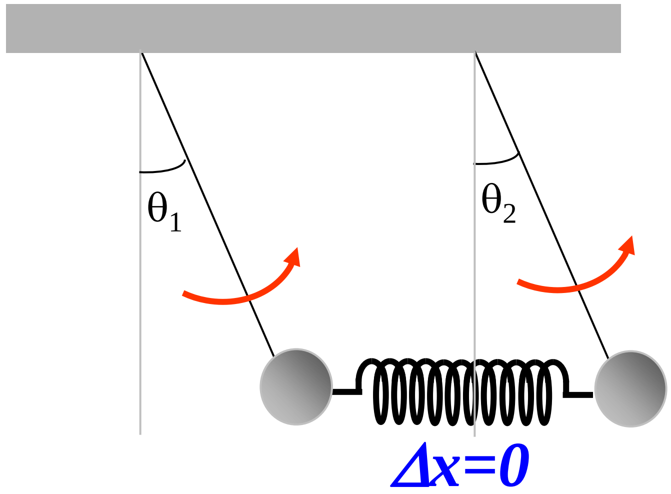
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \omega_o$$

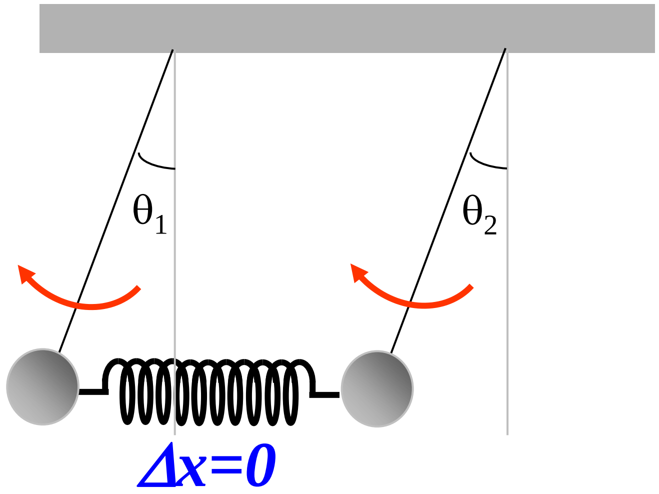
$$\Theta_1 = \Theta_2 (\omega = \omega_1)$$

$$\theta_1 = \theta_2$$

$$\theta_1 = \theta_2 \neq 0$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$$





$$\dot{\theta}_1 \neq 0; \dot{\theta}_2 \neq 0$$

$$\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_2$$

$$\omega_2 = \sqrt{1 + \frac{2kl}{mg}} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Theta_1 = -\Theta_2 (\omega = \omega_2)$$

$$\theta_1 = -\theta_2$$

$$\dot{\theta}_1 \neq 0; \dot{\theta}_2 \neq 0$$

$$\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}_2$$