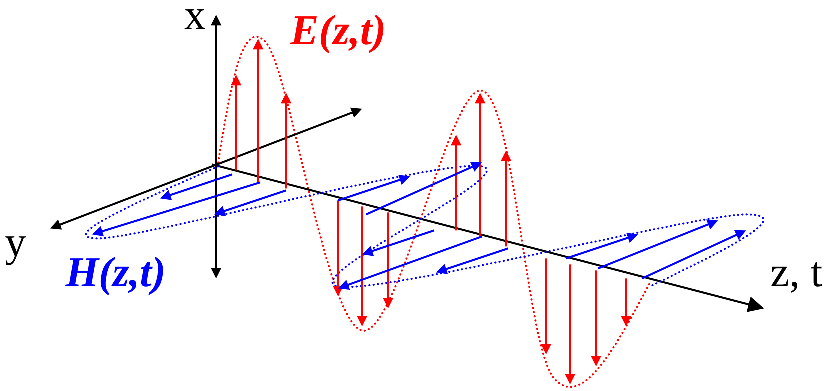
Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Fizik Mühendisliği Bölümü

FZM210 Dalgalar ve Optik

Prof. Dr. Hüseyin Sarı

İlerleyen Dalgalar (2/2)

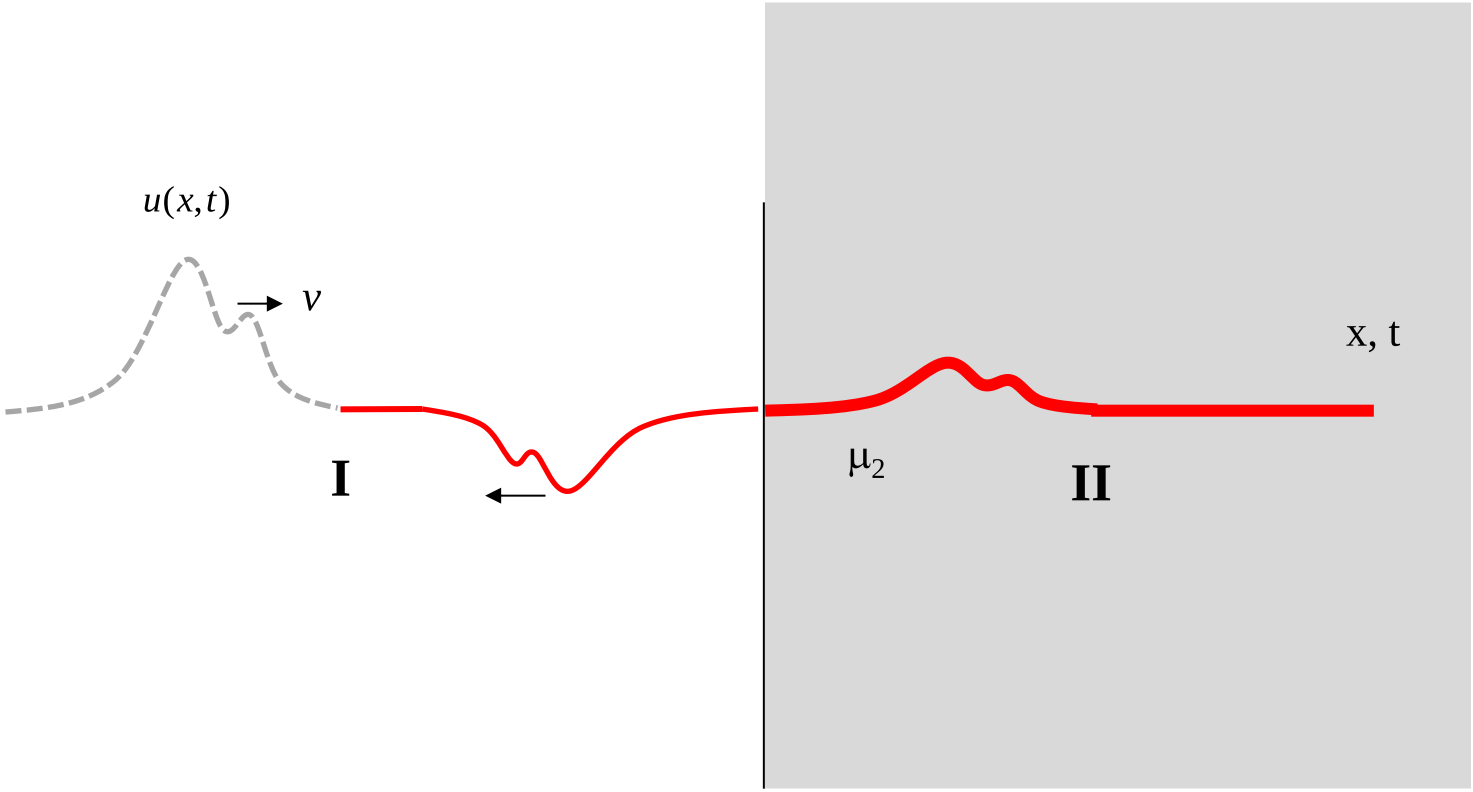


İlerleyen Dalgalar

Yansıma,Geçiş ve Empedans

Yansıma, Geçiş ve Empedans Kavramları

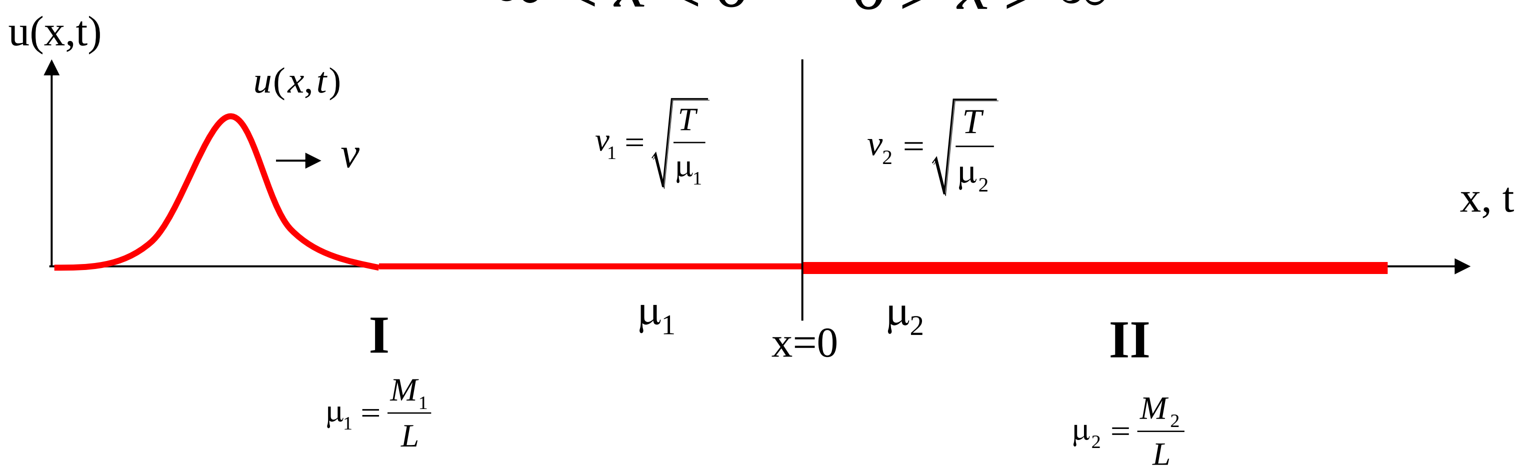
İlerleyen bir dalga farklı iki ortam arayüzde



İlerleyen Dalgalar-Yansıma ve Geçiş

Esnek bir ipte +x yönünde v hızıyla ilerleyen enine bir dalgayı düşünelim. İpin, x=0 noktasında, kütlesi farklı başka bir ip ile birleştirildiğini düşünelim

$$\infty < x < 0 \qquad 0 > x > \infty$$



- İp esnek, ve ipteki T geriliminin ipin her yerinde aynı olduğunu,
- Yerçekimi etkisini göz ardı ederek ipteki dalganın arayüzdeki (x=0) davranışını incelemeye çalışalım.

İpte ilerleyen dalganın formu: $$u(x,t) = f(x \pm vt)$$

Amacımız, Yansıyan ve Geçen dalgaları, özelliği bilinen Gelen Dalga cinsinden ifade etmek:

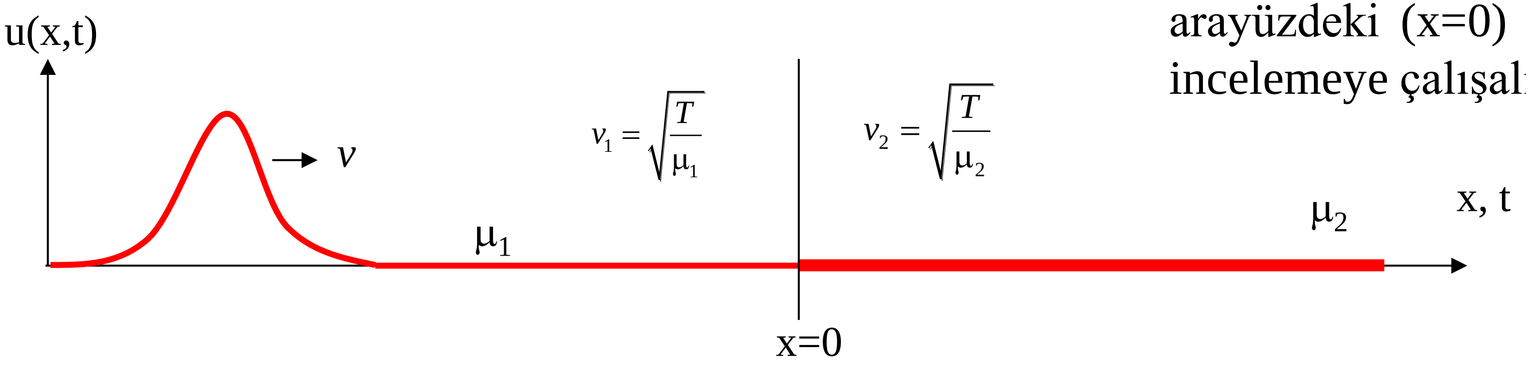
İlerleyen Dalgalar-Yansıma ve Geçiş

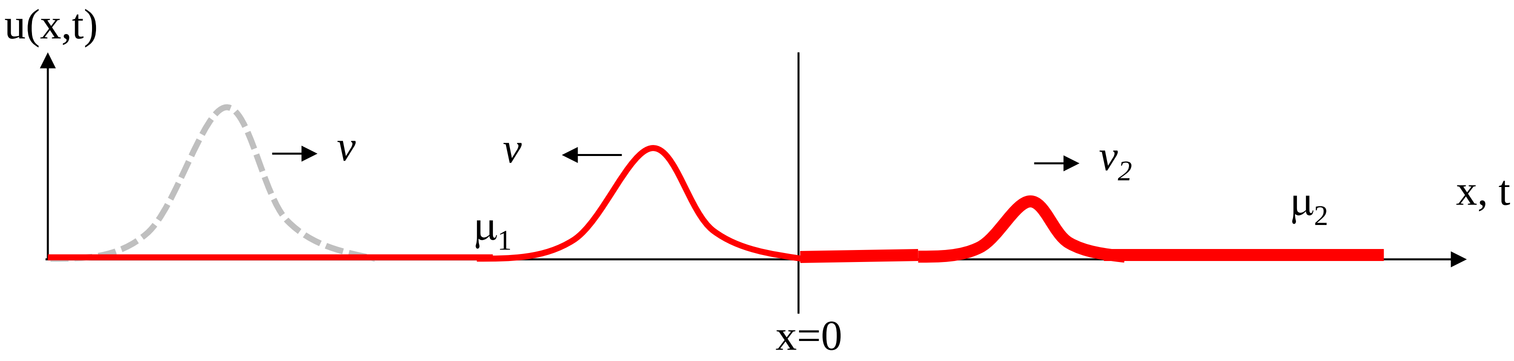
Esnek bir ipte +x yönünde v hızıyla ilerleyen enine bir dalgayı düşünelim. İpin, x=0 noktasında, kütlesi farklı başka bir ip ile birleştirildiğini düşünelim

$$u(x,t) = f(x \pm vt)$$

$$\infty < x < 0 \qquad 0 > x > \infty$$

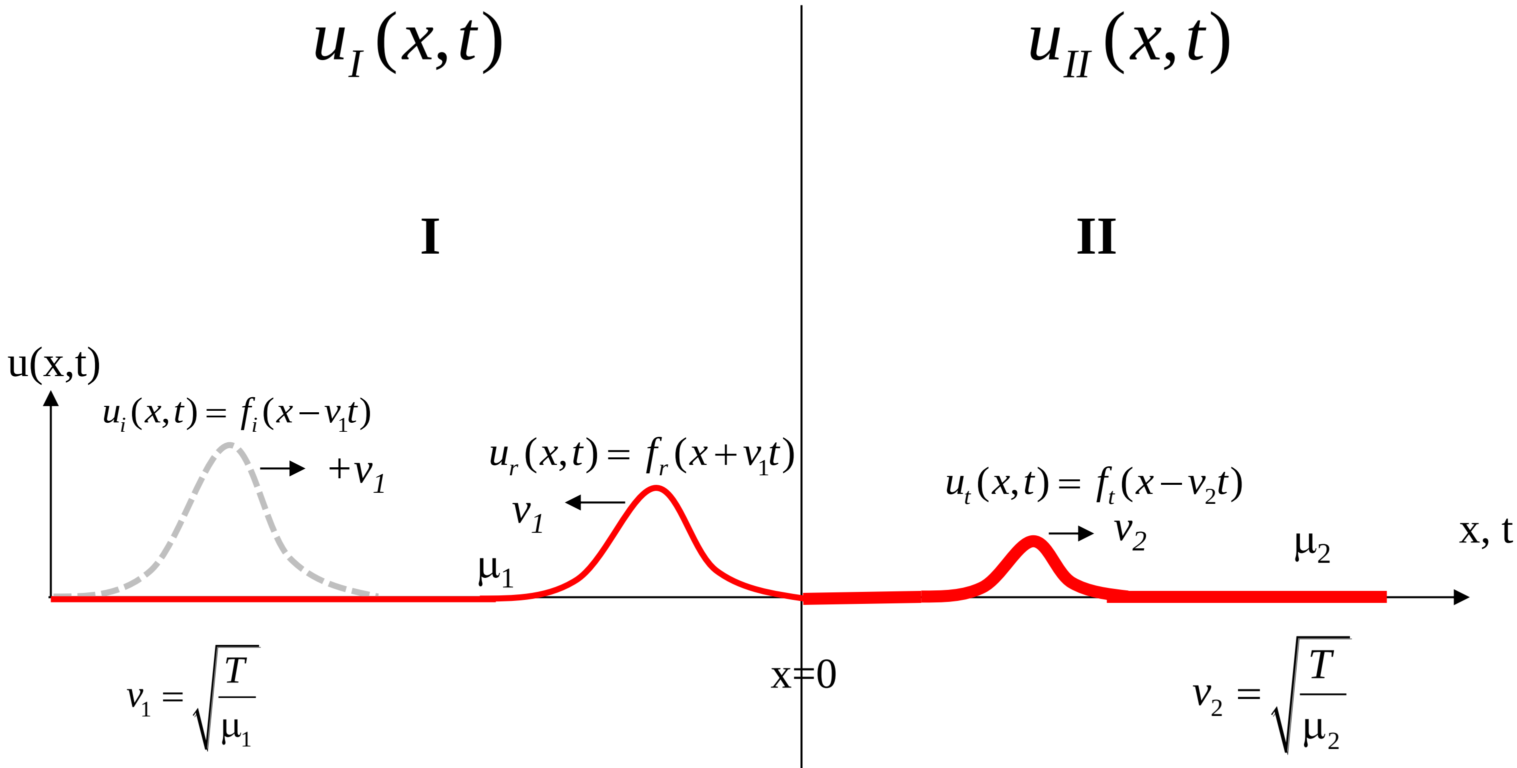
Yerçekimi etkisini göz ardı ederek ipteki dalganın arayüzdeki (x=0) davranışını incelemeye çalışalım.





İlerleyen Dalgalar-Sınır Koşulları

$$u(x,t) = f(x \pm vt)$$



$\longrightarrow$

Gelen: $u_i(x,t) = f_i(x - v_1 t)$

$\longleftarrow$

Yansıyan: $u_r(x,t) = f_r(x + v_1 t)$

$\longrightarrow$

$u_t(x,t) = f_t(x - v_2 t)$ **Geçen**

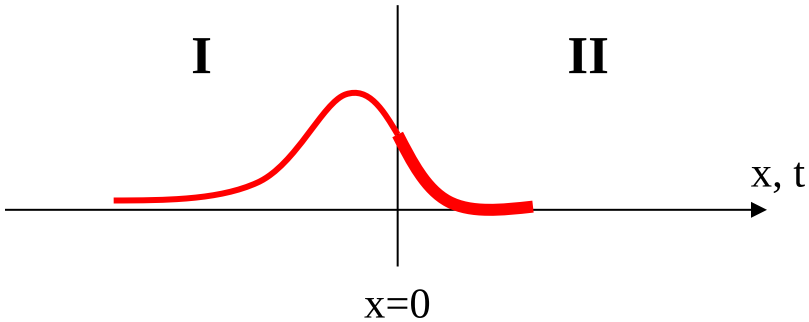
İlerleyen Dalgalar-Sınır Koşulları

Sınır Koşulu-1: x=0 noktasında ipteki enine yerdeğiştirmeler eşit olmalıdır.

$$u(x,t) = f(x \pm vt)$$

$$u_I(0,t) = u_{II}(0,t)$$

$$u_I(x,t) \qquad u_{II}(x,t)$$

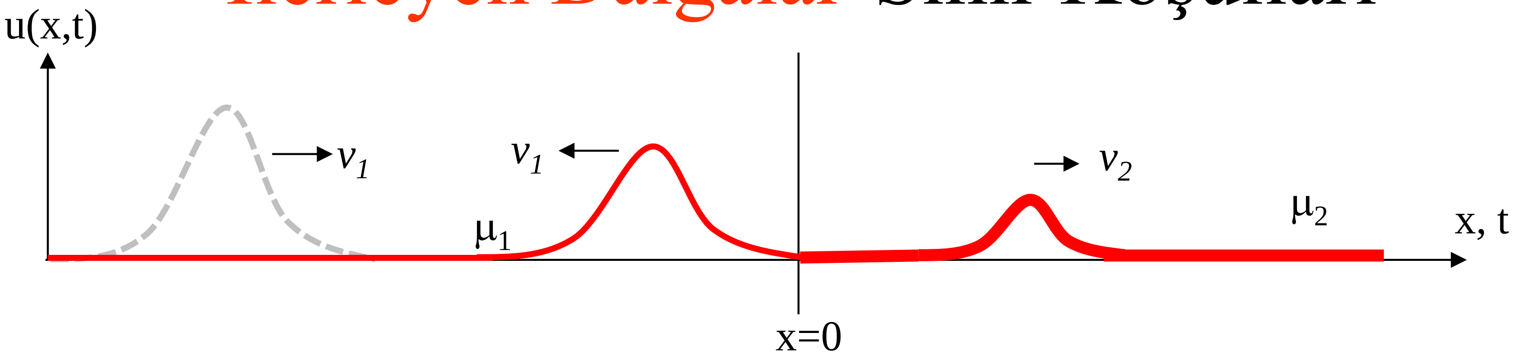


$$u_I(x,t) = u_i(x,t) + u_r(x,t) = f_i(x - v_1 t) + f_r(x + v_1 t)$$

$$u_{II}(x,t) = u_t(x,t) = f_r(x - v_2 t)$$

$$f_i(t) + f_r(t) = f_t(t) \qquad \text{..........} \; 1$$

İlerleyen Dalgalar-Sınır Koşulları



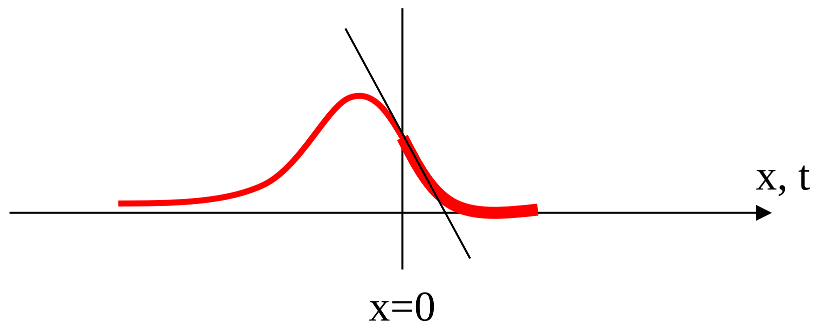
Sınır Koşulu-2: x=0 noktasında eğim (türev) eşittir.

$$\left.\frac{\partial u_I(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u_{II}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$$

Açı küçük ve iplerdeki gerilim aynı

$$T\sin\theta_1\big|_{x=0} = T\sin\theta_2\big|_{x=0}$$

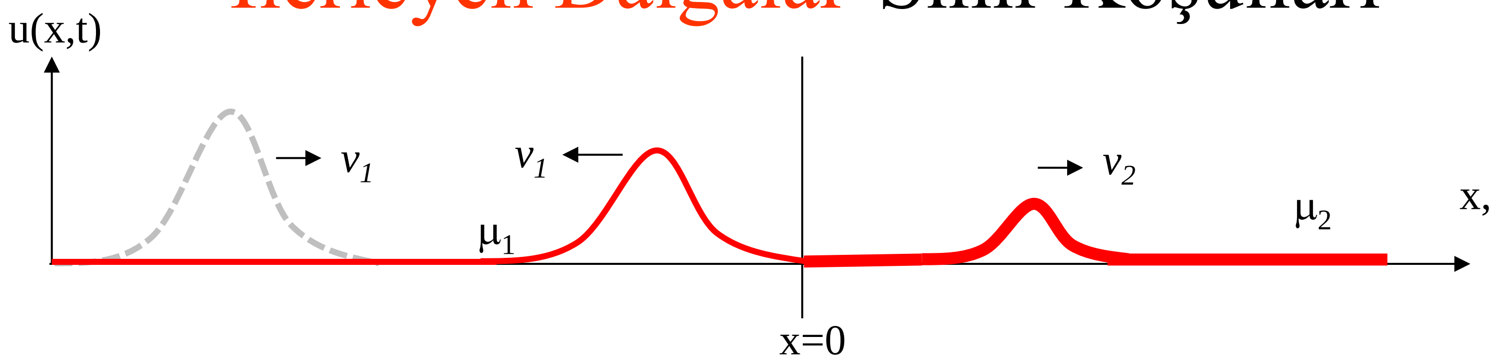
$$T\tan\theta_1\big|_{x=0} = T\tan\theta_2\big|_{x=0}$$



$$-\frac{1}{v_1} f_i^{'}(x-v_1t) + \frac{1}{v_1} f_r^{'}(x+v_1t) = -\frac{1}{v_2} f_t^{'}(x+v_2t)$$

$$v_2 f_i(t) - v_2 f_r(t) = v_1 f_t(t) \quad \dots\dots\dots\dots 2$$

İlerleyen Dalgalar-Sınır Koşulları



$$f_i(t) + f_r(t) = f_t(t)$$ **1. Sınır koşulu**

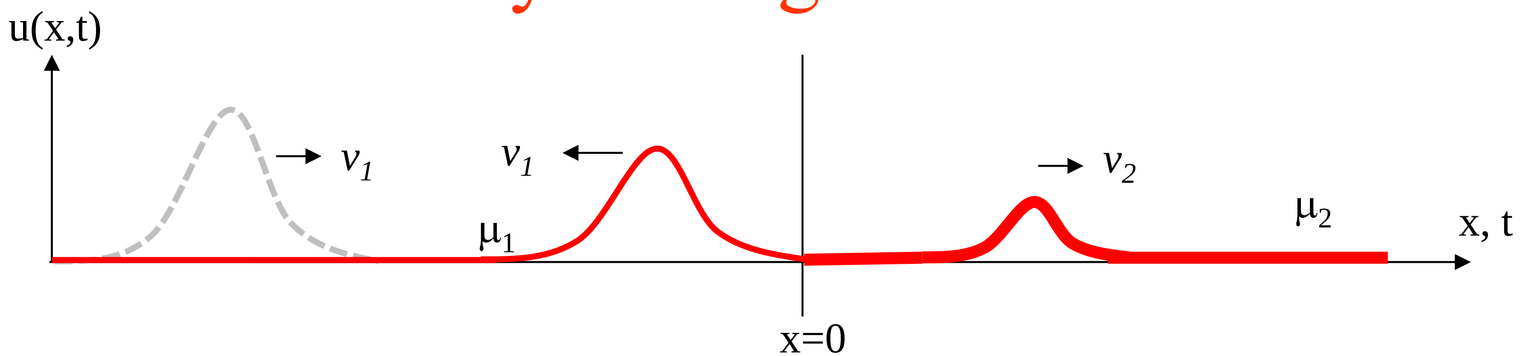
$$v_2 f_i(t) - v_2 f_r(t) = v_1 f_t(t)$$ **2. Sınır koşulu**

Yansıyan ve geçen dalga özelliği bilinen gelen dalga cinsinden yazılabilir:

$$f_r(t) = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right) f_i(t)$$

$$f_t(t) = \left(\frac{2v_2}{v_1 + v_2}\right) f_i(t)$$

İlerleyen Dalgalar-Yansıma



Sadece x=0 da değil bütün uzay (x) için yazmak istersek

$$f_r(x+v_1t)=\left(\frac{v_2-v_1}{v_1+v_2}\right)f_i\left((-x)-v_1t\right)$$

$$u_r(x,t)=\left(\frac{v_2-v_1}{v_1+v_2}\right)u_i(x,t)$$

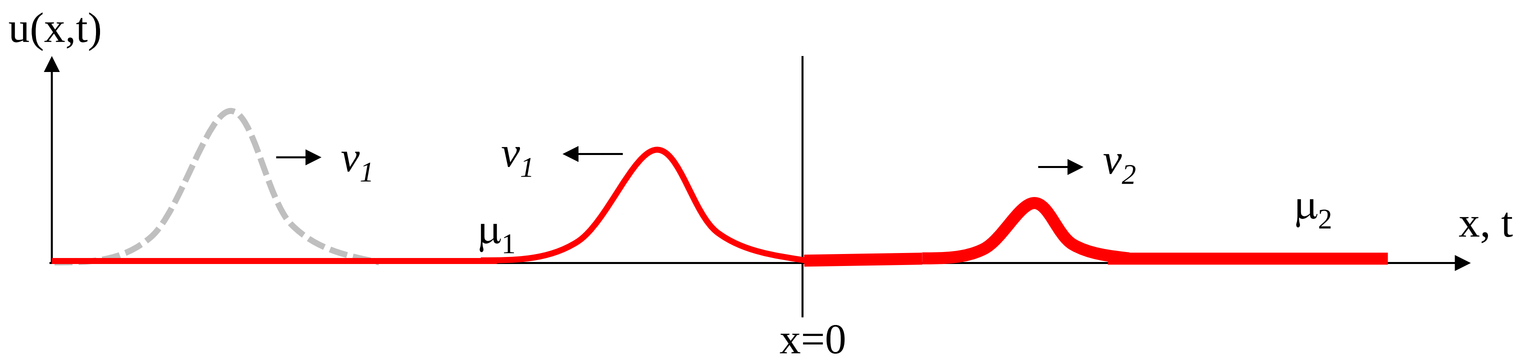
Yansıma katsayısı tanımı yaparsak:

$$R\equiv\frac{v_2-v_1}{v_1+v_2}$$

Yansıtma katsayısı cinsinden:

$$u_r(x,t)=Ru_i(x,t)$$

İlerleyen Dalgalar-Geçme



$$u_t(x,t) = \left(\frac{2v_2}{v_1+v_2}\right) u_i\left((\frac{v_1}{v_2})x,t)\right)$$

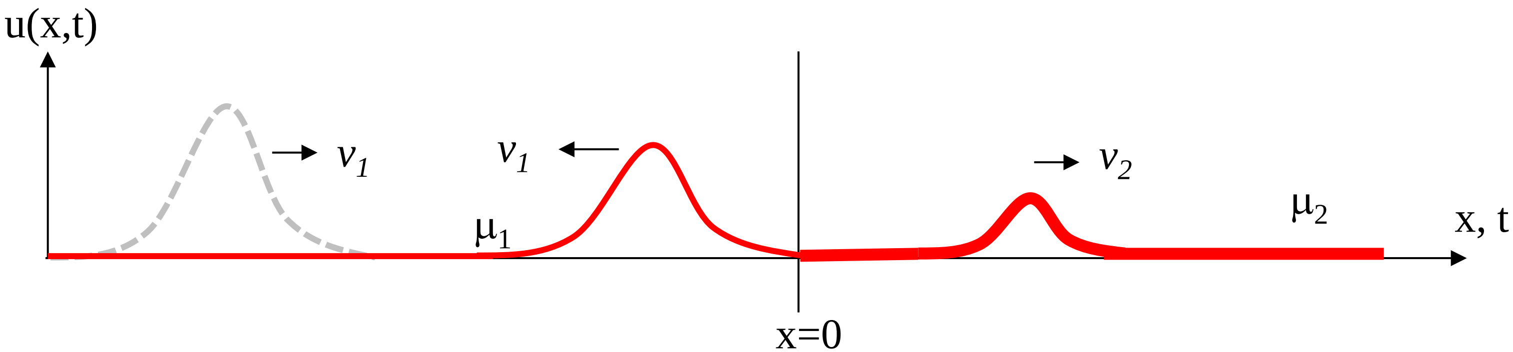
Geçme katsayısı tanımı yaparsak:

$$T \equiv \frac{2v_2}{v_1+v_2}$$

Geçme katsayısı cinsinden:

$$u_t(x,t) = T u_i\left((\frac{v_1}{v_2})x,t)\right)$$

İlerleyen Dalgalar-Yansıma ve Geçme



$$u_i(x,t) \qquad u_r(x,t) = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right) u_i(x,t) \qquad u_t(x,t) = \left(\frac{2v_2}{v_1 + v_2}\right) u_i\left((\frac{v_1}{v_2})x, t\right)$$

$$u_r(x,t) = R u_i(x,t) \qquad u_t(x,t) = T u_i\left((\frac{v_1}{v_2})x, t\right)$$

$$u_I(0,t) = u_{II}(0,t)$$

$$u_i(0,t) + u_r(0,t) = u_t(0,t)$$

$$u_i(0,t) + R u_i(0,t) = T u_i(0,t)$$

$u_i(0,t)$'ye oranlarsak: $$\boxed{1 + R = T}$$

Olası Durumlar

I. ve II. Ortamın olabileceği olası durumlara bakalım:

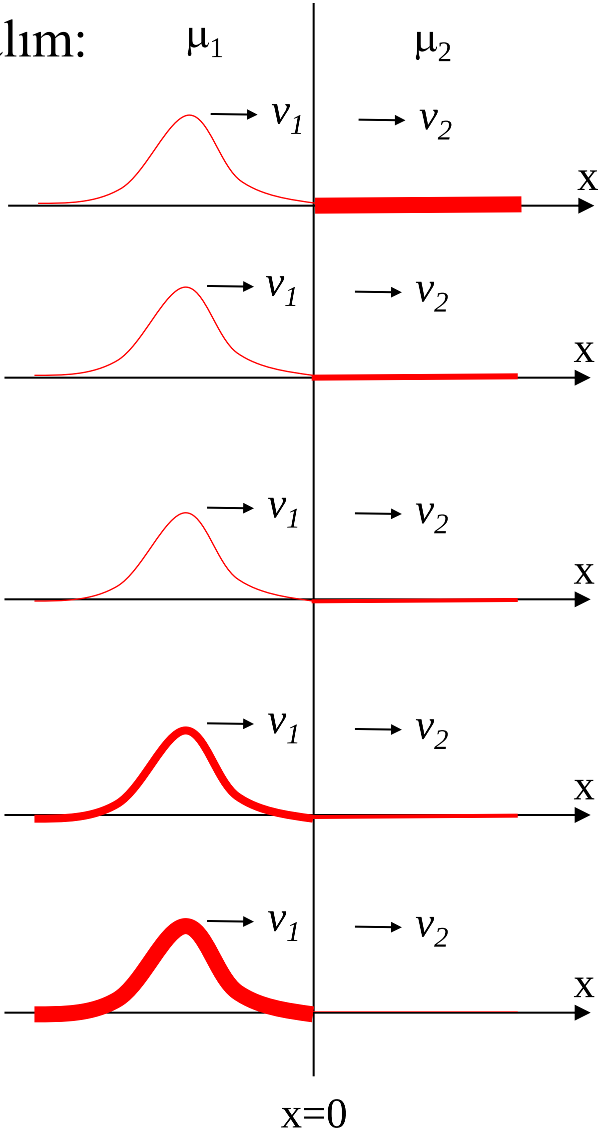
a) $\mu_2 >> \mu_1$ $\quad (\mu_2 = \infty \Rightarrow v_2 = 0)$

b) $\mu_1 < \mu_2$ $\quad (\mu_1 < \mu_2 < \infty \Rightarrow v_2 < v_1)$

c) $\mu_1 = \mu_2$ $\quad (\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow v_2 = v_1)$

d) $0 < \mu_2 < \mu_1$ $\quad (0 < \mu_2 < \mu_1 \Rightarrow v_2 > v_1)$

e) $\mu_2 = 0$ $\quad (\mu_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \infty)$



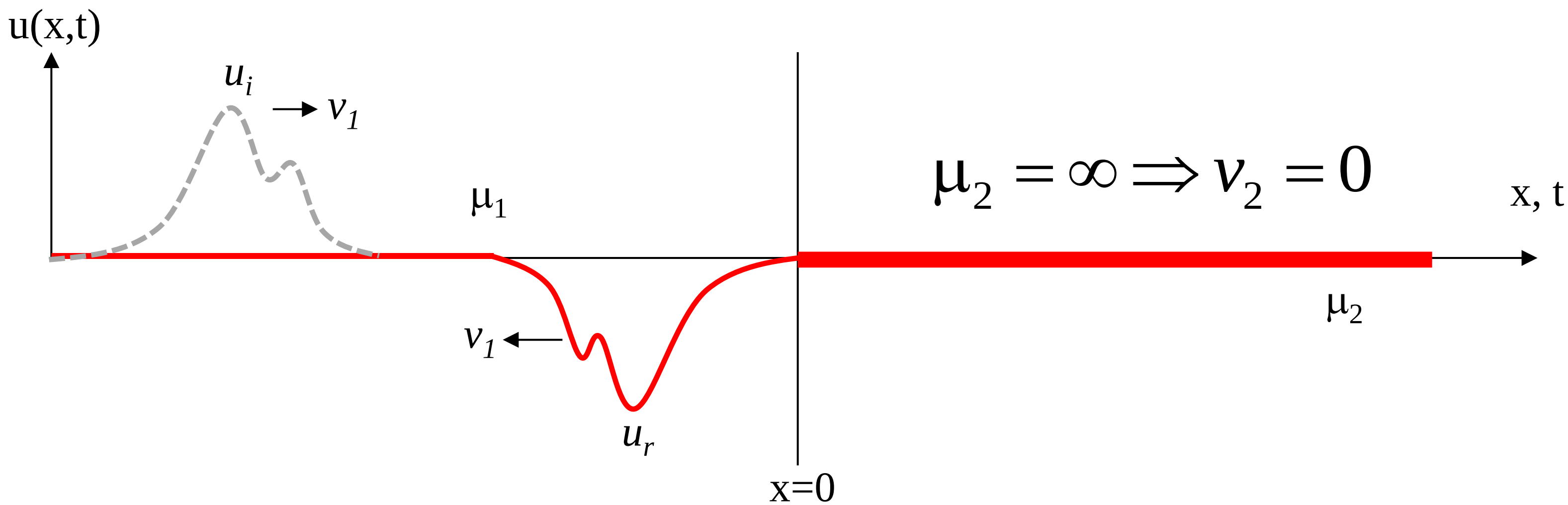
Olası Durumlar-1

a) $\mu_2 >> \mu_1$ $(\mu_2 = \infty \Rightarrow v_2 = 0)$ (II. ortamdaki ip I. ortamdaki ipten çok çok kalınsa):

$$\mu_2 >> \mu_1 \Rightarrow v_2 << v_1 \qquad R \equiv \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} = -1 \qquad T \equiv \frac{2v_2}{v_1 + v_2} = 0$$

$$u_r(x,t) = R u_i(x,t)$$

$$u_r(x,t) = -u_i(x,t)$$



Yansıtma katsayısı negatif olduğu için gelen ve yansıyan dalga arasında faz farkı 180°'dir ve yansıyan dalga genliğini koruyarak negatif işaretten dolayı ayna simetrisine sahiptir.

Olası Durumlar-II

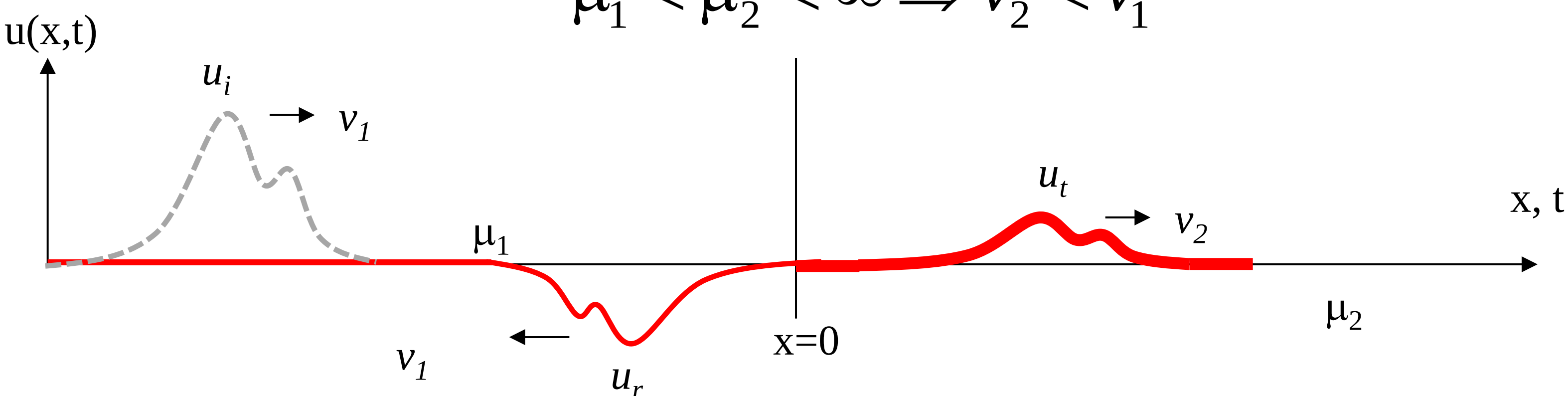
b) $\mu_1 < \mu_2$ $\quad (\mu_1 < \mu_2 < \infty \Rightarrow v_2 < v_1)$ $\quad$ (II. ortamdaki ip I. ortamdaki ipten daha kalın):

$$\mu_1 < \mu_2 < \infty \Rightarrow v_2 < v_1 \qquad R \equiv \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} < 0 \qquad T \equiv \frac{2v_2}{v_1 + v_2} > 0$$

$$u_r(x,t) = R u_i(x,t)$$

$$u_t(x,t) = T u_i(x,t)$$

$$\mu_1 < \mu_2 < \infty \Rightarrow v_2 < v_1$$



$$-1 < R < 0$$

$$0 < T < 1$$

Olası Durumlar-III

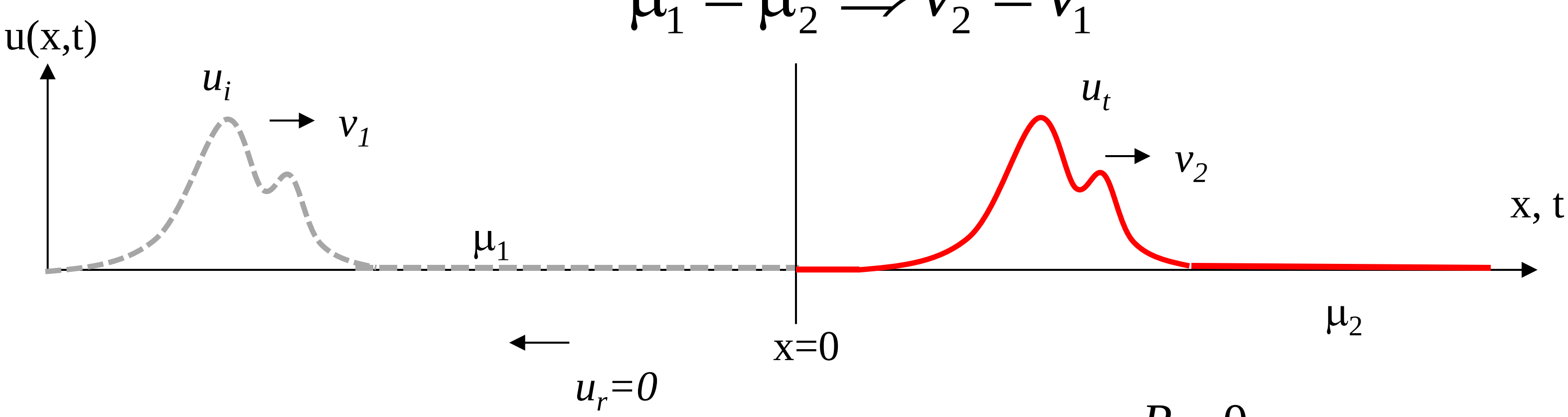
c) $\mu_1 = \mu_2$ $(\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow v_2 = v_1)$ (I. ve II. ortamdaki ipler aynı):

$$\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \qquad R \equiv \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} = 0 \qquad T \equiv \frac{2v_2}{v_1 + v_2} = 1$$

$$u_r(x,t) = R(=0)u_i(x,t) = 0$$

$$u_t(x,t) = T(=1)u_i(x,t) = u_i(x,t)$$

$$\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow v_2 = v_1$$



$R = 0$

$T = 1$

Görüldüğü gibi dalga hiç geri yansımadan ikinci ortamda devam eder. Bu durum Empedans Eşleme başlığı altında yeniden bahsedilecektir.

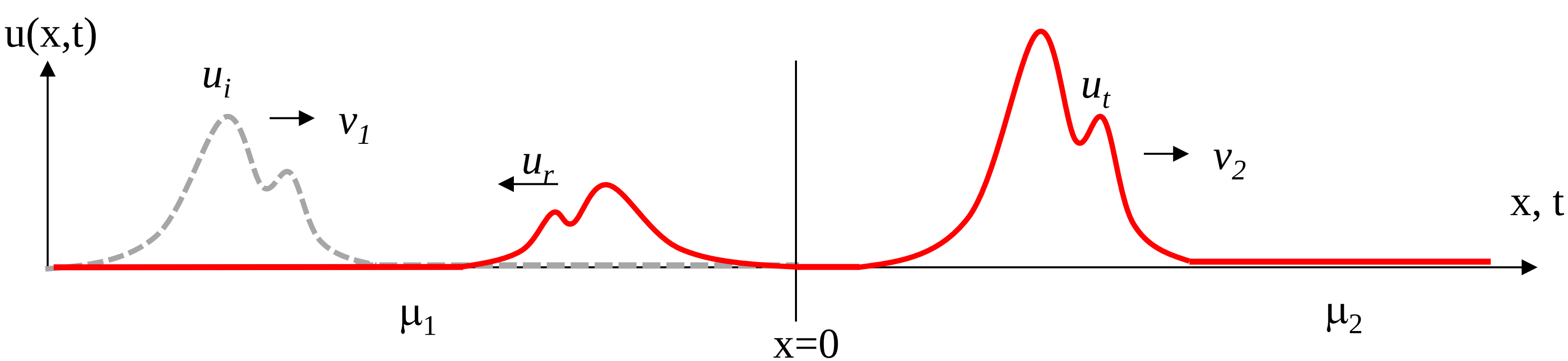
Olası Durumlar-IV

d) $0 < \mu_2 < \mu_1$ $(0 < \mu_2 < \mu_1 \Rightarrow v_2 > v_1)$ (I. ortamdaki ip II. ortamdaki ipten daha kalın):

$$0 < \mu_2 < \mu_1 \Rightarrow v_2 > v_1 \qquad R \equiv \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} > 0 \qquad T \equiv \frac{2v_2}{v_1 + v_2} > 1$$

$$u_r(x,t) = Ru_i(x,t)$$
$$u_t(x,t) = Tu_i(x,t)$$

$$0 < \mu_2 < \mu_1 \Rightarrow v_2 > v_1$$



$$0 < R < 1$$
$$1 < T < 2$$

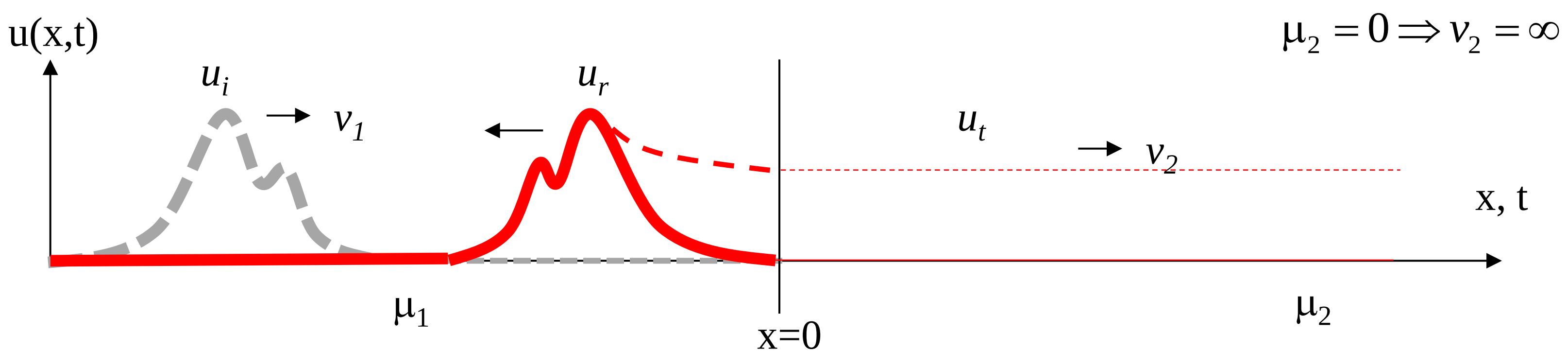
Olası Durumlar-V

e) $\mu_2 = 0$ $\quad(\mu_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \infty)$ (I. ortamdaki ip II. ortamdaki ipten çok çok kalın):

$$\mu_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \infty \qquad R \equiv \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} = 1 \qquad T \equiv \frac{2v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} = 2$$

$$u_r(x,t) = R(=1)u_i(x,t) = u_i(x,t)$$

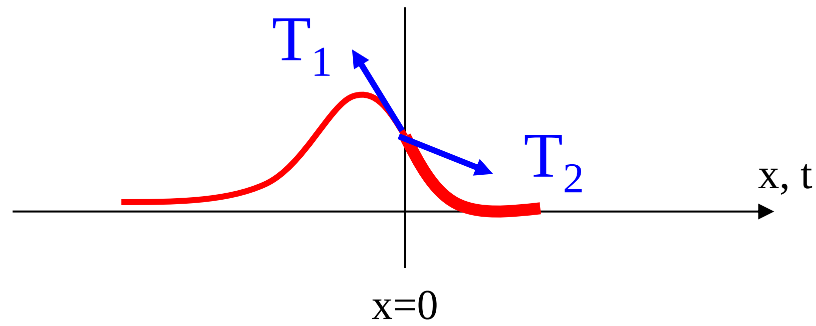
$$u_t(x,t) = T(=2)u_i(x,t) = 2u_i(x,t)$$

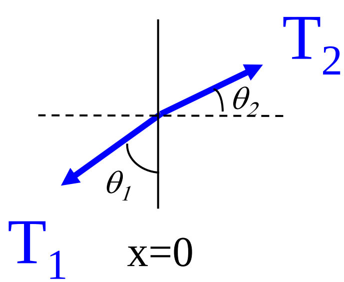


$R = 1$

$T = 2$

İlerleyen Dalgalar-Empedans





$$T_1 \left.\frac{\partial u_I(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = T_2 \left.\frac{\partial u_{II}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$T_1=T_2=T$

$v_2 f_i(t) - v_2 f_r(t) = v_1 f_t(t)$

$$-\frac{T_1}{v_1} f_i(t) - \frac{T_1}{v_1} f_r(t) = -\frac{T_2}{v_2} f_t(t) \qquad \text{..........} \; 2'$$

$$\frac{v}{T} = \frac{\sqrt{T/\mu}}{T} = \frac{1}{\sqrt{T\mu}} \equiv \frac{1}{Z}$$

Empedans Tanımı: $\boxed{Z \equiv \frac{T}{v} = \sqrt{\mu T}}$

İlerleyen Dalgalar-Empedans

Yansıma ve Geçirme katsayılarının empedans cinsinden ifade edilmesi:

$$Z \equiv \frac{T}{v} = \sqrt{\mu T}$$

Yansıma:

$$R \equiv \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} = \frac{\frac{1}{Z_2} - \frac{1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$\boxed{R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}}$$

Geçirme:

$$T \equiv \frac{2v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2\left(\frac{1}{Z_2}\right)}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$\boxed{T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}}$$

Empedans-Fiziksel Anlamı

Ortam değiştiren dalganın arayüzeydeki davranışı yansıyan ve geçen dalgayı önemli ölçüde etkilemektedir.

$$F_y = T_2 \left. \frac{\partial u_I(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = T_2 \left. \frac{\partial f_t(t - x/v_2)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

$$\frac{\partial f_t(t - x/v_2)}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial f_t(t - x/v_2)}{\partial t}$$

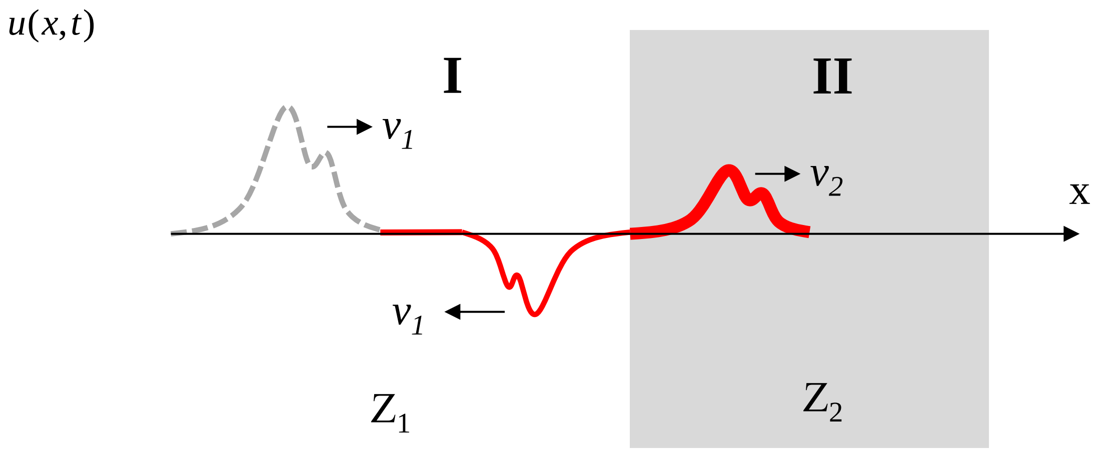
$$F_y = -\frac{T_2}{v} \frac{\partial f_t(t - x/v_2)}{\partial t} = -\frac{T_2}{v}.v_y = -b.v_y$$

$$v_y \equiv \frac{\partial f_t(t - x/v_2)}{\partial t}$$

$$\boxed{F_y = -b.v_y}$$

Empedans Eşleme

Bir sistemden başka bir sisteme maksimum enerji transfer edilebilmesi için bu iki sistemin empedanslarının eşit olması gerekir. Maksimum enerji transferi için iki sistemin empedanslarını eşitlemeye ‘**Empedans Eşleme** (Empedance Matching)’ denir.

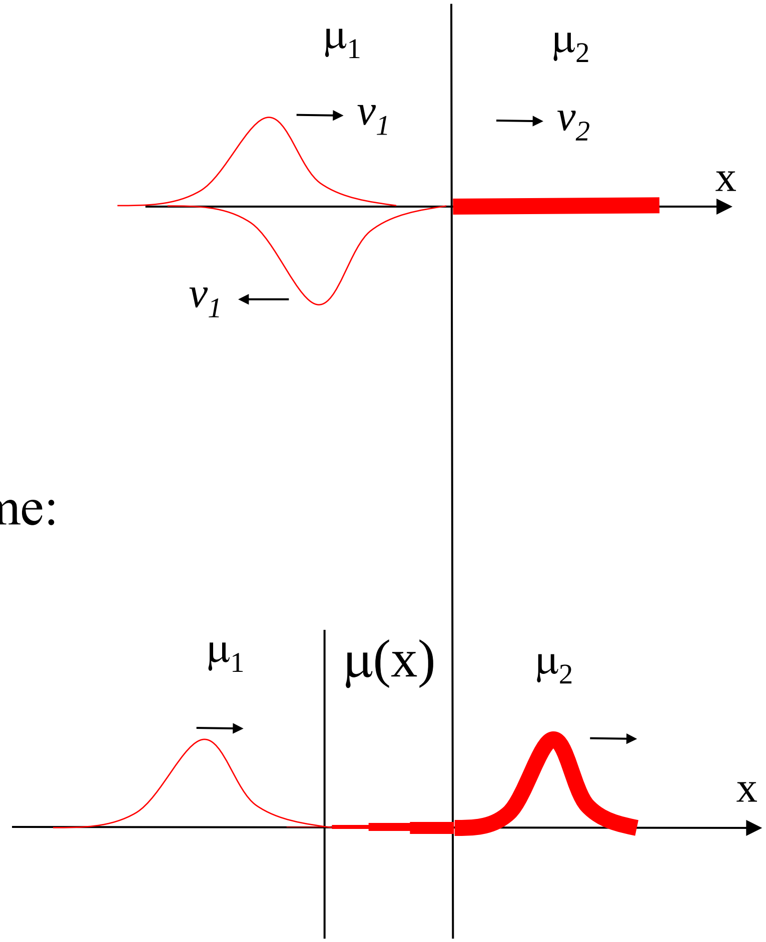


Ortam değiştiren dalganın arayüzeydeki davranışı yansıyan ve geçen dalgayı önemli ölçüde etkilemektedir.

Empedans Eşleme

Eğer iki ortam arasındaki empedans farkı büyükse dalga geri yansır ve enerji iletimi istenilen seviyede olmaz.

a) $\mu_2 >> \mu_1 \qquad (\mu_2 = \infty \Rightarrow v_2 = 0)$



x=0

$$R = -1$$
$$T = 0$$

Empedans Eşleme:

b) $\mu_1 = \mu_2$

$$R = 0$$
$$T = 1$$

$$R \equiv \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} = 0$$

$$T \equiv \frac{2v_2}{v_1 + v_2} = 1$$

Empedans Eşleme-Örnekler

Elektrik Devresi

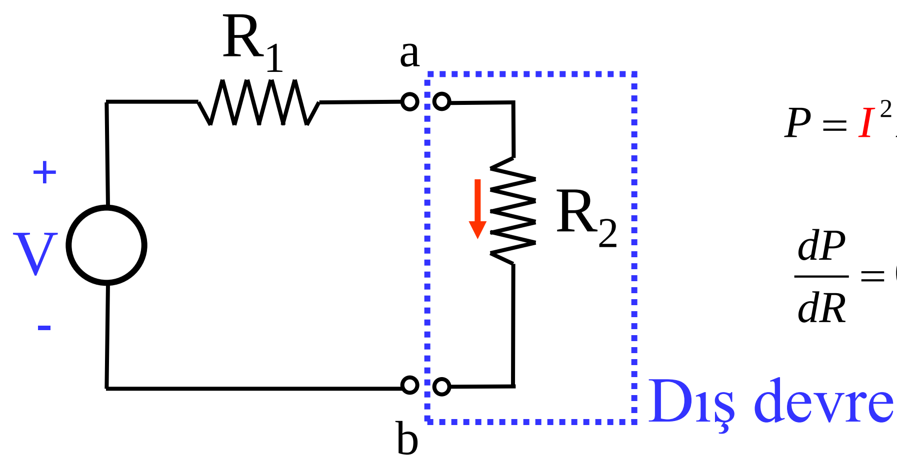
Empedans ifadesi: $Z \equiv \dfrac{F}{v}$

Elektrik eşdeğerleri

$$Z \Rightarrow R$$
$$F \Rightarrow V$$
$$v \Rightarrow I$$

$$R \equiv \frac{V}{I}$$

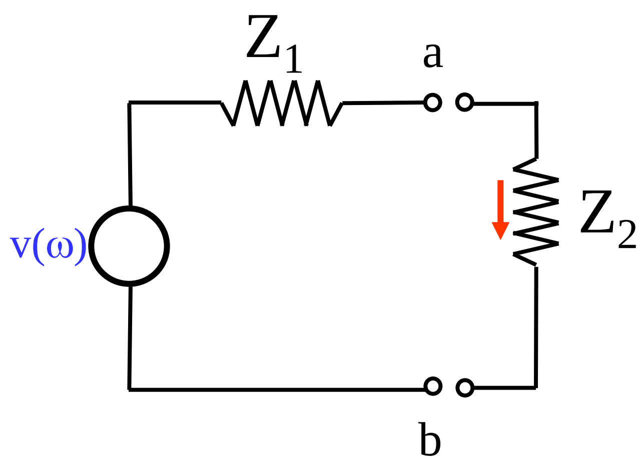
Empedans gerçek bir sayıysa (basit direnç) devrenin direnci dış yük direncine eşit olursa maksimum güç aktarımı olur.



$$P = I^2 R_2 = \left(\frac{V}{(R_1 + R_2)} \right)^2 R_2$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \qquad R_1 = R_2 \Rightarrow P_{\max}$$

Eğer empedans karmaşık bir sayıysa (dirence ek olarak bobin ve/veya sığa da varsa),



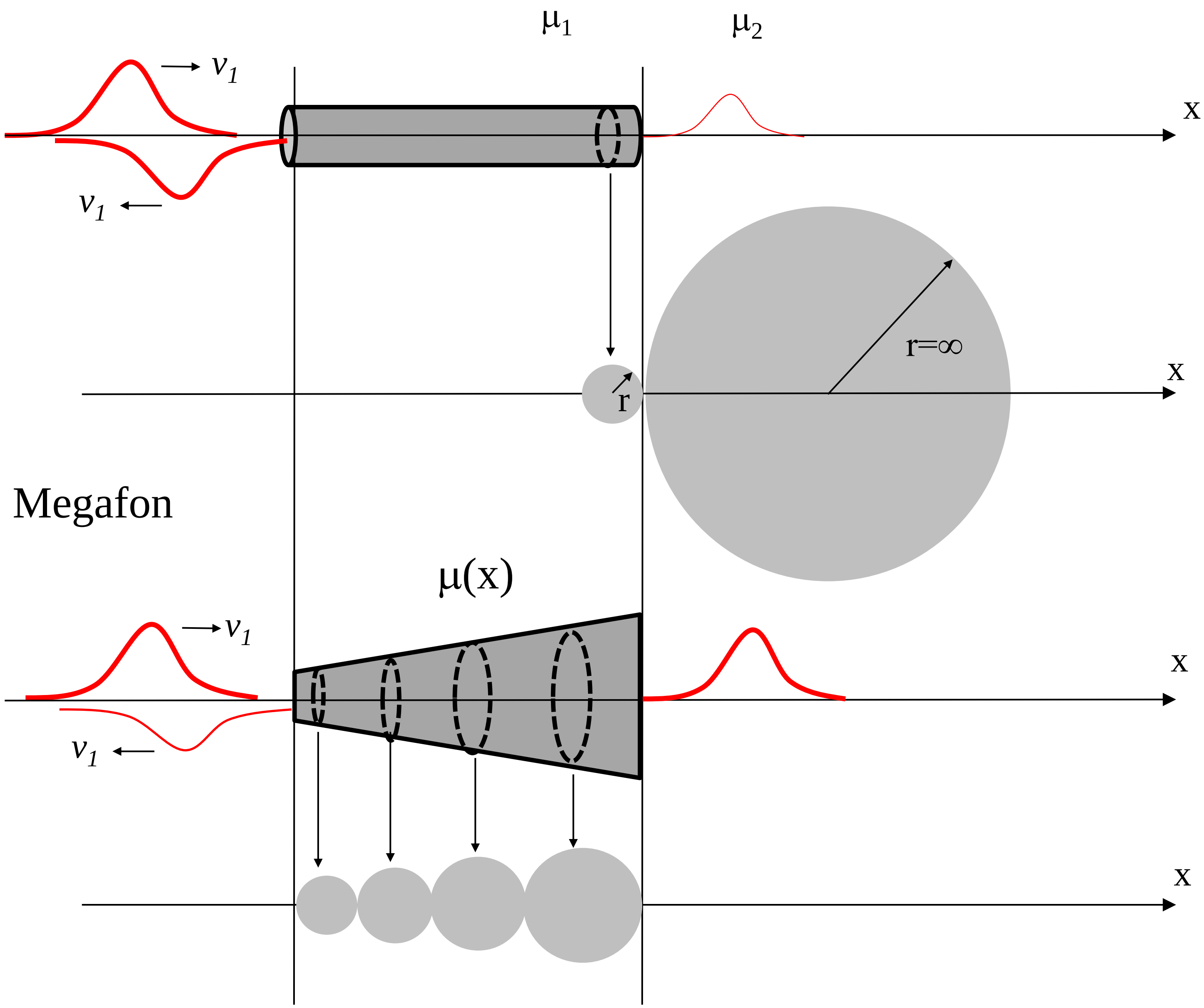
$$P = I^2 Z_2 = \left(\frac{V}{(Z_1 + Z_2)} \right)^2 Z_2$$

$$Z_1 = Z_2 \Rightarrow P_{\max}$$

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Empedans Eşleme-Örnekler

Silindirik Geometri



Kesit alan:

Megafon

Kesit alan: