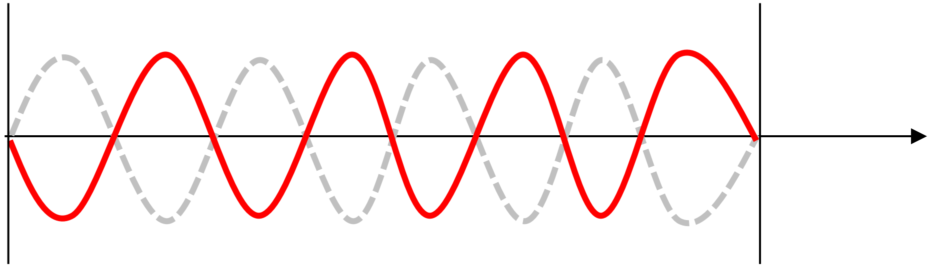
Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği Bölümü

FZM210 Dalgalar ve Optik

Prof. Dr. Hüseyin Sarı

Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Fizik Mühendisliği Bölümü

Duran Dalgalar

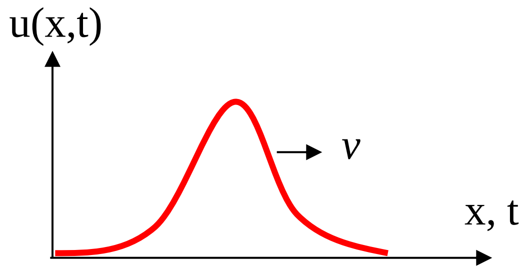


Bu bölümü bitirdiğinizde,

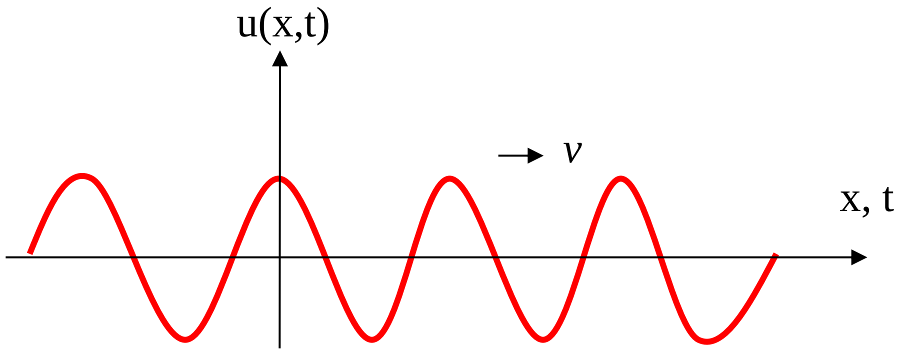
- Duran dalga denklemi,
- Duran dalganın taşıdığı güç

konularında bilgi sahibi olacaksınız.

İlerleyen Dalga-Özet

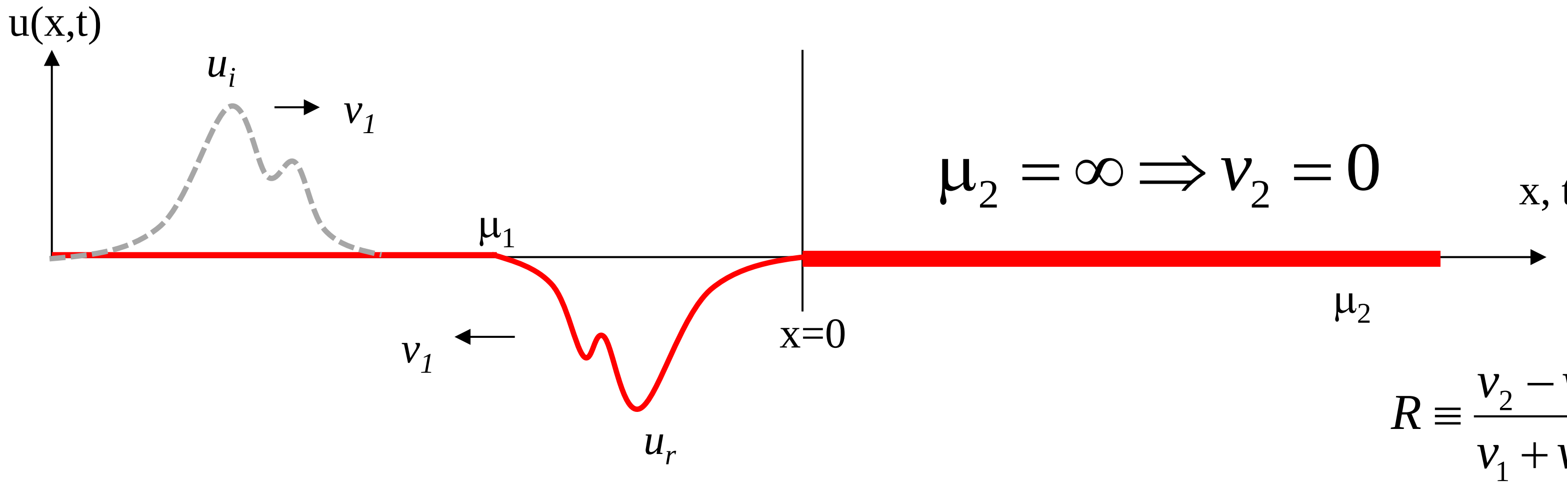


$$u(x,t) = f(x - vt) = f(kx - \omega t + \phi)$$



$$u(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

Arayüzden Yansıma



$$R \equiv \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} = -1$$

$$T \equiv \frac{2v_2}{v_1 + v_2} = 0$$

$$u_r(x,t) = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right) u_i(x,t)$$

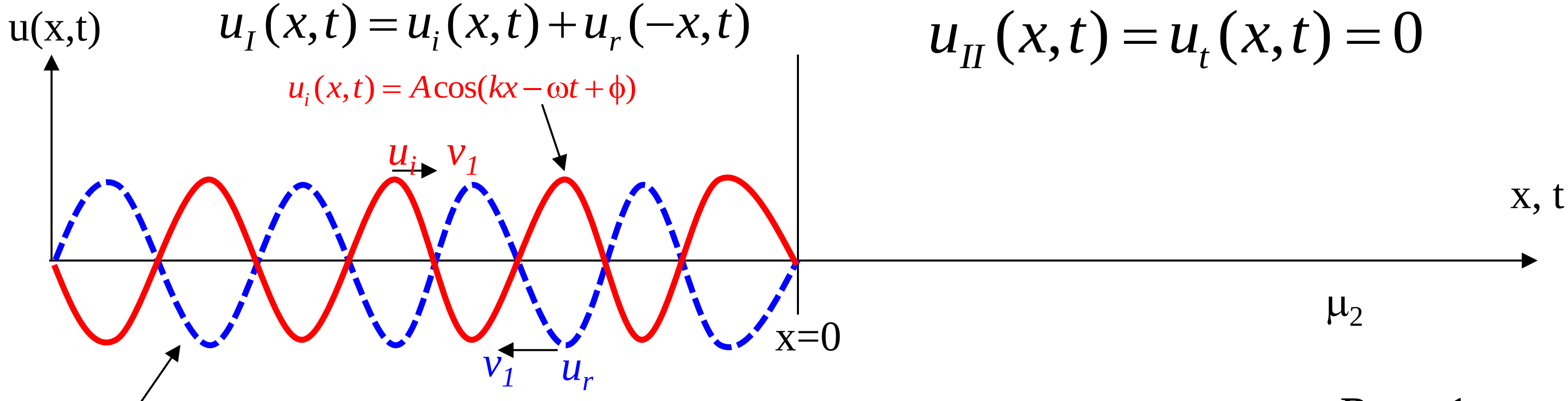
$$R \equiv \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}$$

$$u_r(x,t) = R u_i(x,t)$$

Duran Dalgalar

$$u_I(x,t) = u_i(x,t) + u_r(-x,t)$$

$$u_{II}(x,t) = u_t(x,t) = 0$$



$$u_r(x,t) = -A\cos(kx + \omega t + \phi)$$

$$R = -1$$

$$T = 0$$

$$u_i(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

$$u_r(x,t) = Ru_i(-x,t)$$

$$u_r(x,t) = -A\cos(kx + \omega t + \phi)$$

$$u_I(x,t) = u_i(x,t) + u_r(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi) - A\cos(kx + \omega t + \phi)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

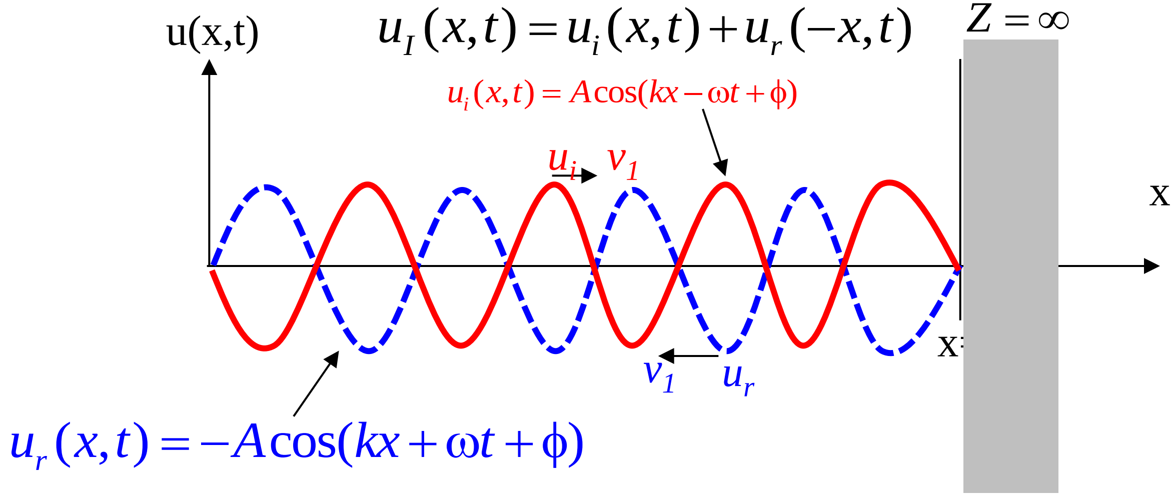
$$u_I(x,t) = u_i(x,t) + u_r(x,t) = -2A\sin(\omega t + \phi).\sin(kx)$$

Duran Dalga: $\boxed{u(x,t) = -2A\sin(\omega t + \phi).\sin(kx)}$

Duran Dalgalar-2

$R=-1$

$T=0$



$$u_i(x,t)=A\cos(kx-\omega t+\phi)$$

$$u_r(x,t)=-A\cos(kx+\omega t+\phi)$$

$$u_I(x,t)=u_i(x,t)+u_r(x,t)=A\cos(kx-\omega t+\phi)-A\cos(kx+\omega t+\phi)$$

$\cos a-\cos b=-2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$

$$u_I(x,t)=u_i(x,t)+u_r(x,t)=-2A\sin(\omega t+\phi).\sin(kx)$$

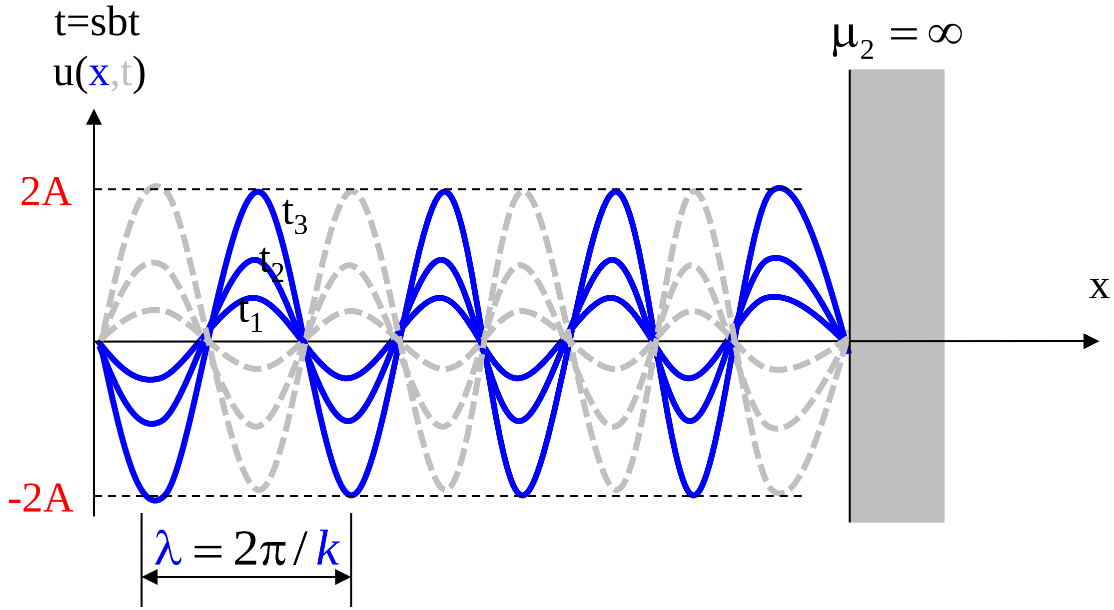
Duran Dalga: $\boxed{u(x,t)=-2A\sin(\omega t+\phi).\sin(kx)}$

Duran Dalgalar-3

$$u_I(x,t) = -2A\sin(\omega t + \phi).\sin(kx)$$

Görüldüğü gibi dalga artık ilerleyen dalga formunda f(x-vt) değildir!

Bu dalga artık uzayda hareket etmeyen (sadece her noktada 2A genlikle salınım yapan) bir titreşim hareketidir…



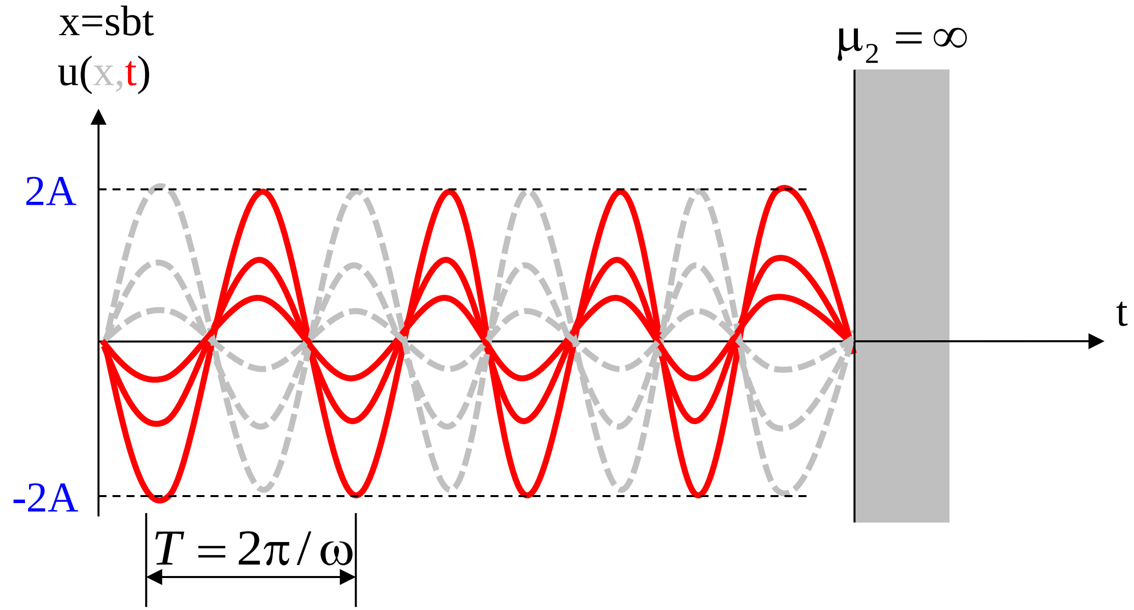
Sabit bir t değerinde: $$u(x,t) = \left|-2A\sin(\omega t + \phi)\right|.\sin(kx)$$

Duran Dalgalar-4

$$u_I(x,t) = -2A\sin(\omega t + \phi).\sin(kx)$$

Görüldüğü gibi dalga artık ilerleyen dalga formunda f(x-vt) değildir!

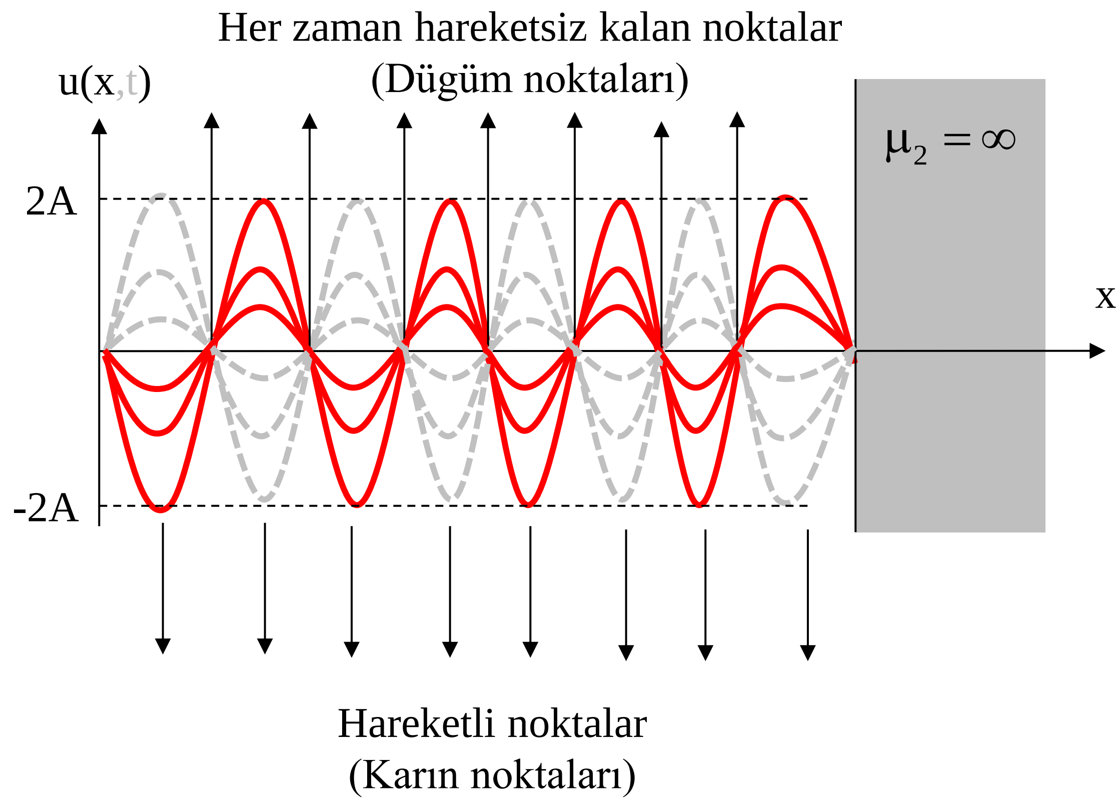
Bu dalga artık uzayda hareket etmeyen (sadece her noktada 2A genlikle salınım yapan) bir titreşim hareketidir…



Sabit bir x noktasıda: $$u(x,t) = \left|-2A\sin(kx)\right|.\sin(\omega t + \phi)$$

Duran Dalgalar-5

- Faz farkı, zamanı içeren fonksiyonun $(\sin(\omega t+\phi)$ içindedir.
- x=0'da yer değiştirme sıfırdır $(\sin(kx)=0)$



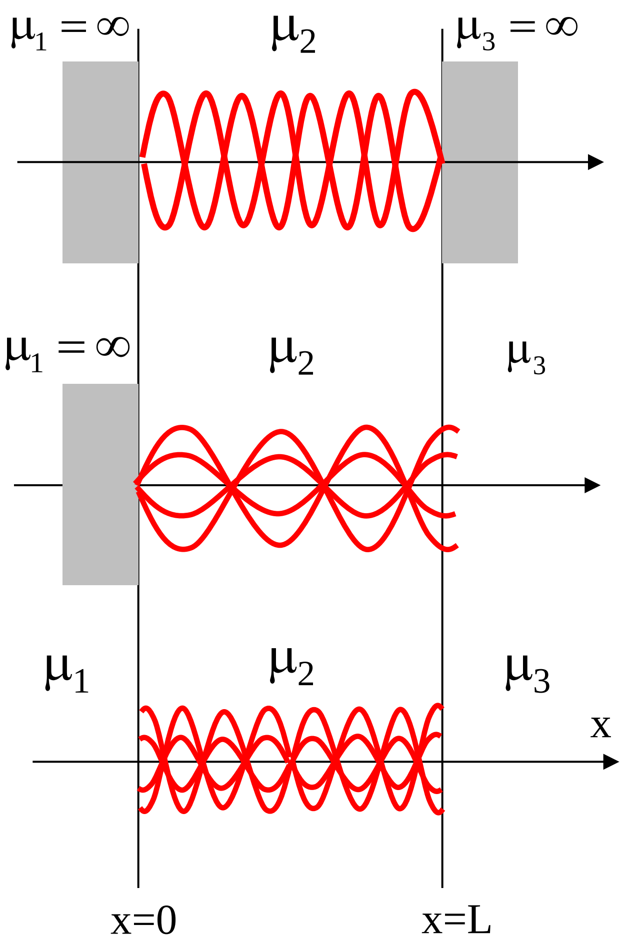
- Dügüm Noktaları (Nodes): Hareketsiz kalan noktalar
- Karın Noktaları (Antinodes): En hızlı hareket eden noktalar

Olası Durumlar

a) Her İki Uç Kapalı $(\mu_1 = \mu_3 = \infty)$

b) Bir Uç Kapalı $(\mu_1 = \infty;\ \mu_2 = \mu_3)$

c) Her İki Uç Açık $(\mu_1 = \mu_2 = \mu_3)$

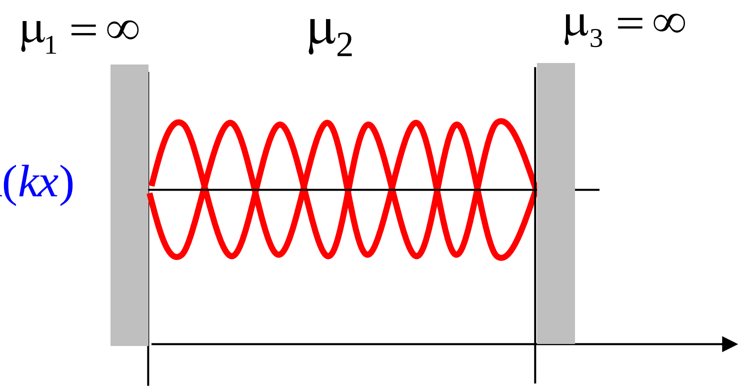


Sınır Koşulları

Duran dalga, bütün t zamanlar için aşağıdaki sınır koşullarını sağlamalıdır:

Sınır Koşulu-1: u(x,t)=0 (**Kapalı uçlarda**) (Çünkü kapalı uçlarda ip sabittir)

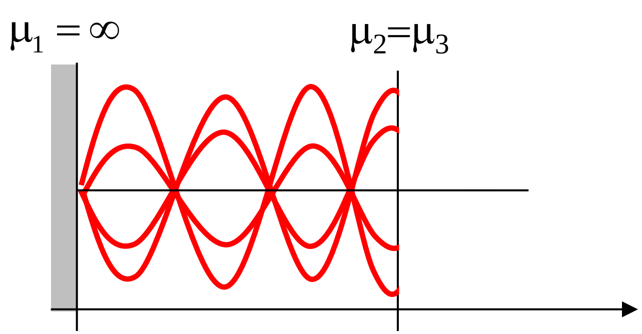
$$u(x,t) = \left|-2A\sin(\omega t + \phi)\right| . \sin(kx)$$



$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0$$

Sınır Koşulu-2: ∂u(x,t)/∂x=0 (**Açık uçlarda**) (Enine kuvvet sıfır olmalı)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \left|-2kA\sin(\omega t + \phi)\right| . \cos(kx)$$



$$u(0,t) = 0 \qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$$

Olası Durumlar-I: Her İki Uç Kapalı

a) Her İki Uç Kapalı $(\mu_1 = \mu_3 = \infty)$

$$u(x,t) = \left|-2A\sin(\omega t + \phi)\right|.\sin(kx)$$

Sınır Koşulu-1: $u(0,t) = u(L,t) = 0$

$$u(L,t) = \left|-2A\sin(\omega t + \phi)\right|.\sin(kL) = 0$$

Bu eşitliğin bütün t zamanları için sağlanabilmesi için:

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi$$

(t=0 durumu da bunu sağlayabilir ama sadece özel bir an için)

Burada n=1, 2, 3, 4… gibi tamsayı değerlerini almaktadır.

Dalga vektörü k: $k_n = \dfrac{n\pi}{L}$

Sınır koşullarından dolayı k dalga vektörü artık her değeri değil kesikli (n tamsayı olduğundan) değerleri alabilmektedir:

Olası Durumlar-1: Her İki Uç Kapalı

Dalga vektörü: $$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

n=1, 2, 3, 4…(tam sayı)

Dalgaboyu: $$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Dalganın hızı: $$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega_n = v k_n$$

Hız sadece $(T/\mu)^{1/2}$'ye bağlıdır, n'ye bağlı değil (Dağınımın olmadığı durumda)

İpin her iki ucunun da bağlı olması ω ve k değerlerinin sürekli değil (her değeri değil) kesikli değerleri (kuanta) almasına yol açar.

Frekans: $$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{v k_n}{2\pi} = \frac{v(n\pi/L)}{2\pi} = n\frac{v}{2L}$$

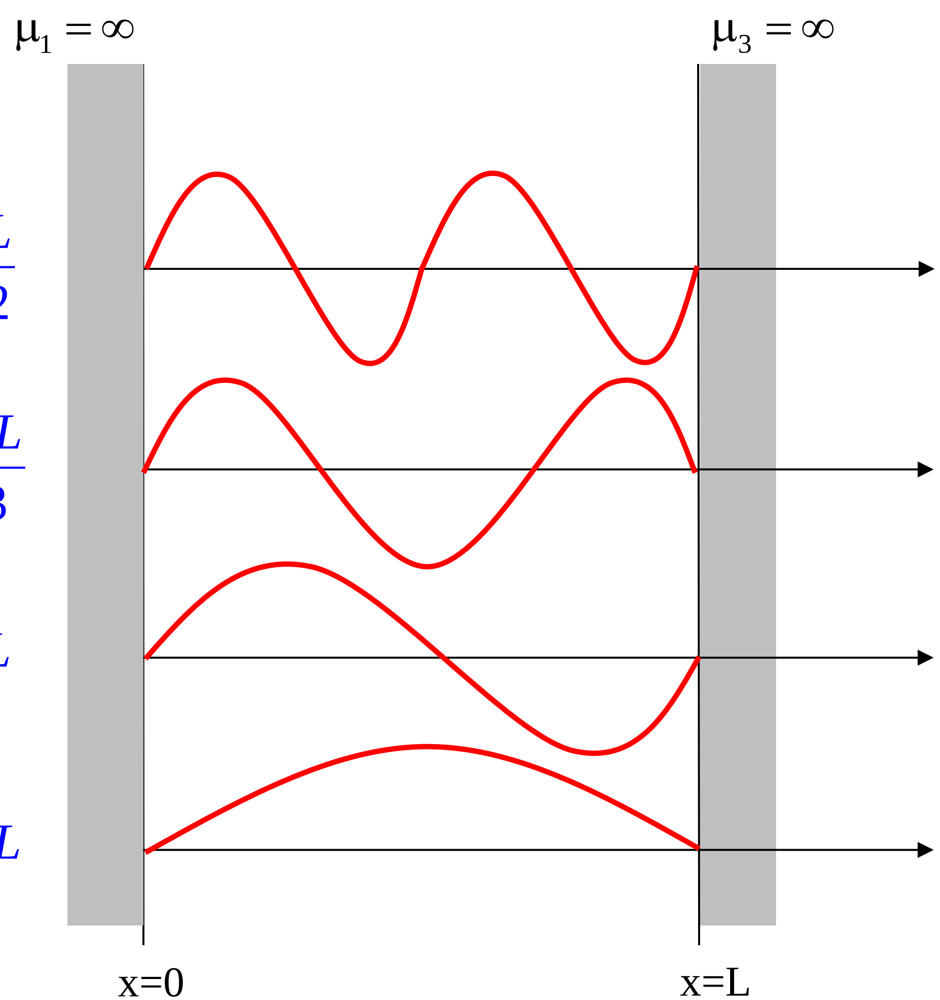
Temel frekans (n=1): $$\nu_1 = \frac{v}{2L}$$

Olası frekanslar temel frekansın tam katları şeklinde olacaktır.

Olası Durumlar-1

Dalga vektörü k: $k_n = \dfrac{n\pi}{L}$ n=0, 1, 2, 3, 4…(tam sayı)

Dalgaboyu: $k_n = \dfrac{2\pi}{\lambda_n} = \dfrac{n\pi}{L} \Rightarrow \lambda_n = \dfrac{2L}{n}$



n=4 $\lambda_4 = \dfrac{L}{2}$

n=3 $\lambda_3 = \dfrac{2L}{3}$

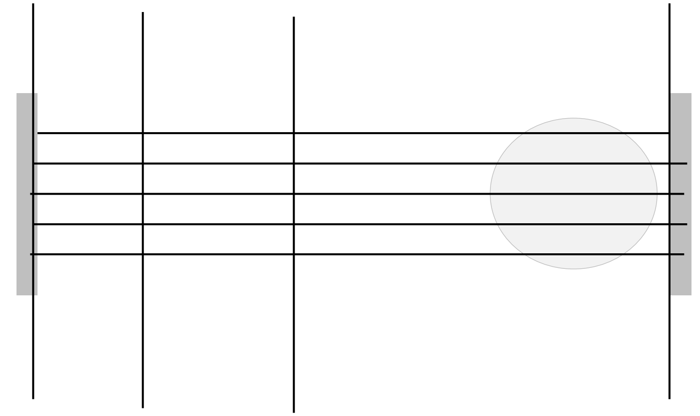
n=2 $\lambda_2 = L$

n=1 $\lambda_1 = 2L$

Duran Dalgalar-Müzik Aletleri

İki ucu bağlı sistemler özellikle telli ve üflemeli müzik aletlerinin prensibini oluşturur.

Telli çalgılar
(gitar, saz)



Frekans: $\nu_n = n\dfrac{v}{2L}$

Frekanslar: $\nu_n = \dfrac{v}{2L_1}$

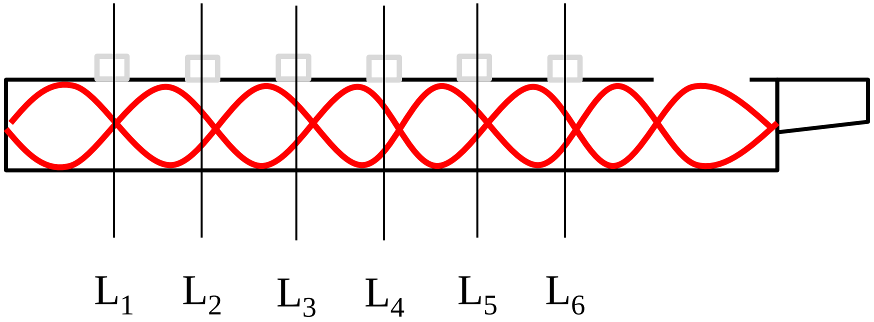
$$\nu_n = \dfrac{v}{2L_2}$$

Müzik Aletleri

Üflemeli Çalgılar:
(kaval, fülüt vb)

Frekanslar: $\nu_n = \dfrac{v}{2L_1}$

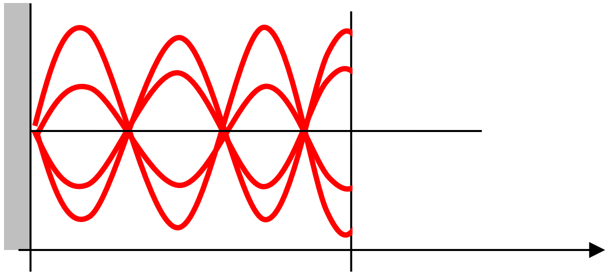
$$\nu_n = \frac{v}{2L_2}$$



Olası Durumlar-II

b) Bir Uç Kapalı $(\mu_1 = \mu_3 = \infty)$

$\mu_1 = \infty$ $\mu_2 = \mu_3$



$$u(x,t) = \left|-2A\sin(\omega t + \phi)\right|.\sin(kx)$$

Sınır Koşulu-1: $u(0,t) = 0$

Sınır Koşulu-2: $\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$

$u(0,t) = 0$ $\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$

$$u(L,t) = \left|-2A\sin(\omega t + \phi)\right|.\sin(kL) = 0$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial\left(2A\sin(\omega t).\sin(kx)\right)}{\partial x} = 2kA\sin(\omega t).\cos(kx) = 0$$

$$\cos(kL) = 0 \Rightarrow kL = (n+1/2)\pi \Rightarrow k = \frac{(n+1/2)\pi}{L}$$

Dalga vektörü k: $k_n = \dfrac{(n+1/2)\pi}{L}$ n=0, 1, 2, 3, 4…(tam sayı)

Sınır koşullarından dolayı k dalga vektörü artık her değeri değil özel kesikli değerleri alabilmektedir:

Olası Durumlar-1: Her İki Uç Kapalı

Dalga vektörü: $k_n = \frac{(n+1/2)\pi}{L}$ n=0, 1, 2, 3, 4…(tam sayı)

Dalgaboyu: $\lambda_n = \frac{2L}{(n+\frac{1}{2})}$

Dalganın hızı: $v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega_n = v k_n$

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Hız sadece $(T/\mu)^{1/2}$'ye bağlıdır, n'ye bağlı değil (Dağınımın olmadığı durumda)

İpin her iki ucunun da bağlı olması ω ve k değerlerinin sürekli değil (her değeri değil) kesikli değerleri (kuanta) almasına yol açar.

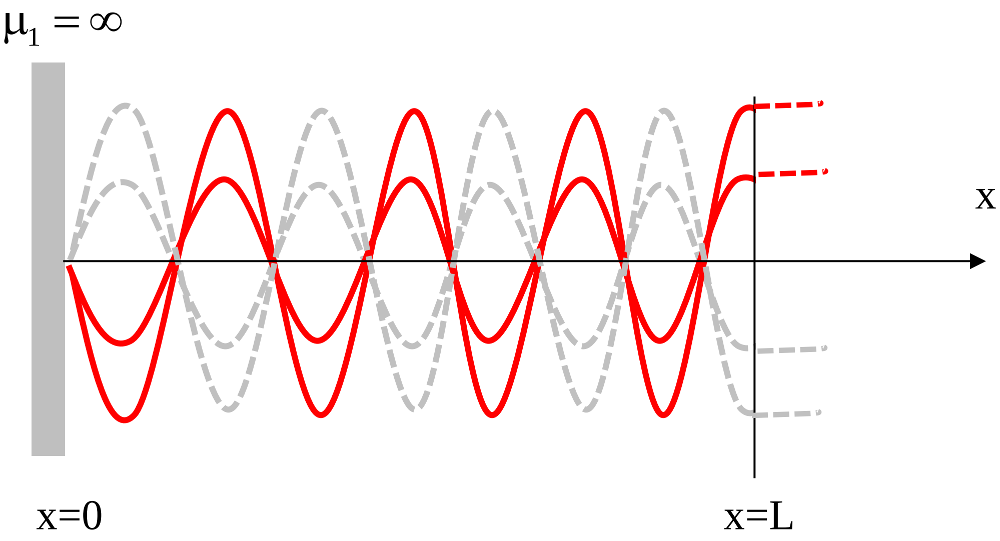
Frekans: $\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = (n+\frac{1}{2})\frac{v}{2L}$

Temel frekans (n=0): $\nu_o = \frac{v}{4L}$

Olası frekanslar temel frekansın katları şeklinde olacaktır.

Olası Durumlar-II Açık Uç

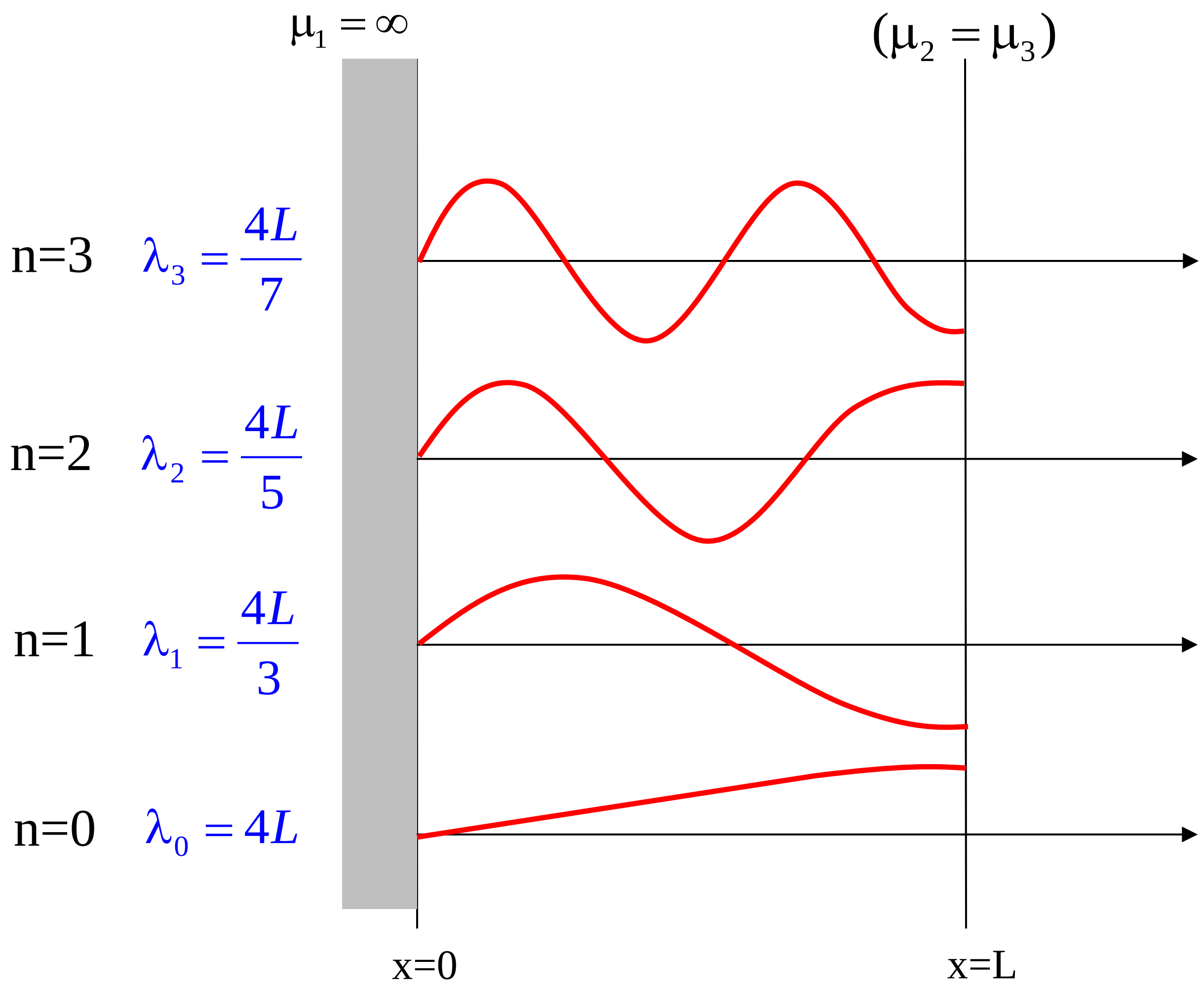
$$u_I(x,t) = -2A\sin(\omega t + \phi).\sin(kx)$$



Olası Durumlar-II

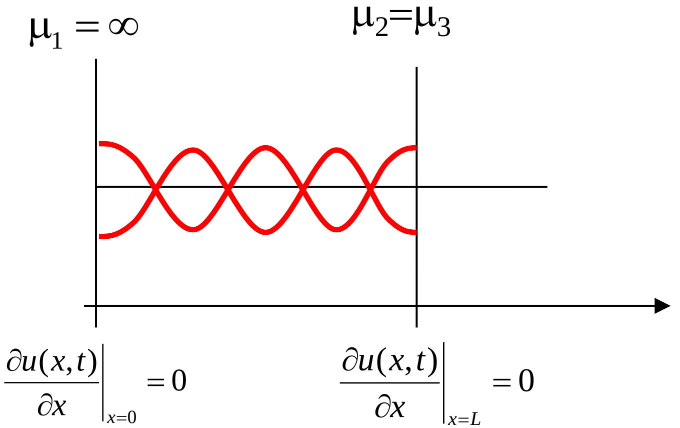
Dalga vektörü k: $k_n = \frac{(n+1/2)\pi}{L}$ n=0, 1, 2, 3, 4…(tam sayı)

Dalgaboyu: $\lambda_n = \frac{2L}{(n+\frac{1}{2})}$



Olası Durumlar-III

c) Her İki Uç Açık $(\mu_1 = \mu_2 = \mu_3)$



$$u(x,t) = 2A\cos(\omega t + \phi).\cos(kx)$$

Sınır Koşulu-2: $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial\left(2A\cos(\omega t).\cos(kx)\right)}{\partial x} = -2kA\cos(\omega t).\sin(kx) = 0$$

$$\sin(k0) = 0$$

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$$

Dalga vektörü k: $k_n = \frac{n\pi}{L}$ n=0, 1, 2, 3, 4…(tam sayı)

Sınır koşullarından dolayı k dalga vektörü artık her değeri değil özel kesikli değerleri alabilmektedir:

Olası Durumlar-III

Dalga vektörü: $k_n = \frac{n\pi}{L}$

n=0, 1, 2, 3, 4…(tam sayı)

Dalgaboyu: $\lambda_n = \frac{2L}{n}$

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Hız sadece $(T/\mu)^{1/2}$'ye bağlıdır, n'ye bağlı değil (Dağınımın olmadığı durumda)

Dalganın hızı: $v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega_n = v k_n$

İpin her iki ucunun da bağlı olması ω ve k değerlerinin sürekli değil (her değeri değil) kesikli değerleri (kuanta) almasına yol açar.

Frekans: $\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n\frac{v}{2L}$

Temel frekans (n=1): $\nu_1 = \frac{v}{2L}$

Olası frekanslar temel frekansın tam katları şeklinde olacaktır.

Olası Durumlar-II

Dalga vektörü k: $k_n = \frac{n\pi}{L}$ n=0, 1, 2, 3, 4…(tam sayı)

Dalgaboyu: $\lambda_n = \frac{2L}{n}$

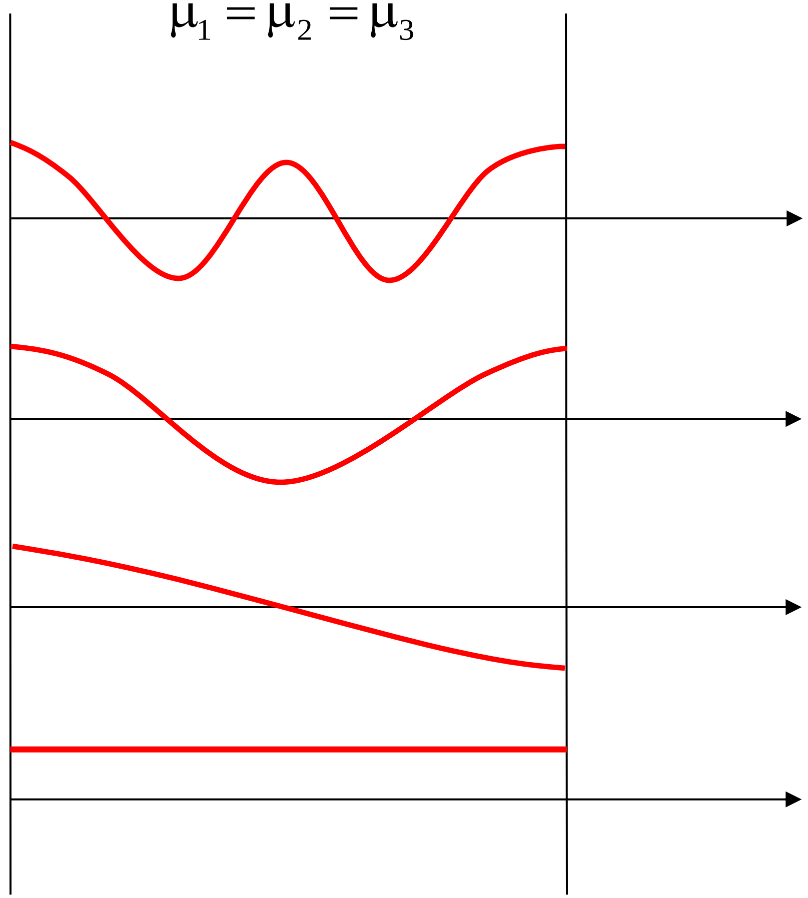
$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

n=3 $\lambda_3 = \frac{2L}{3}$

n=2 $\lambda_2 = L$

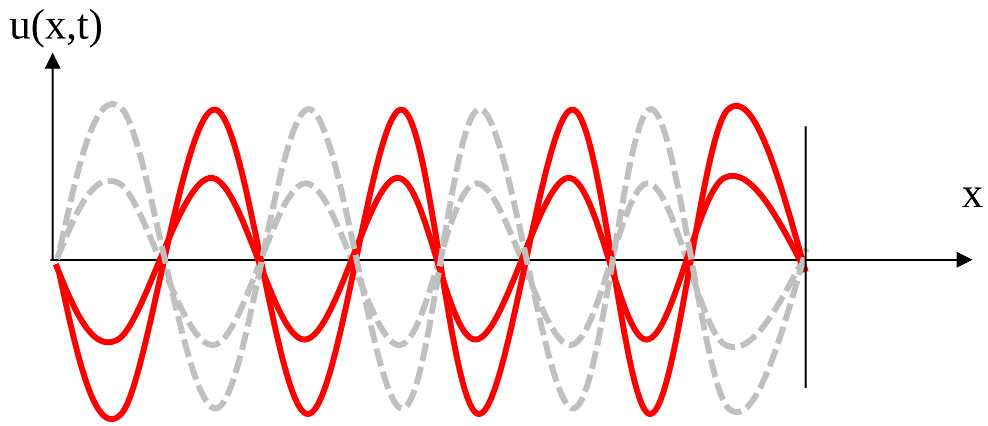
n=1 $\lambda_1 = 2L$

n=0 $\lambda_1 = \infty$



x=0 x=L

Duran Dalgalar-Güç



Güç:

$$P(x,t) = F_y.v = \left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

$$P(x,t) = \left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = -T\left(kA\sin(\omega t)\cos(kx)\right).\left(\omega A\cos(\omega t)\sin(kx)\right)$$

$$< \sin^2 x > = < \cos^2 x > = \frac{1}{2}$$

$$< \sin x > = < \cos x > = 0$$

$$P(x,t) = -TA^2\omega k\left(\sin(kx)\cos(kx)\right).\left(\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right)$$

$$< \sin\omega t.\cos\omega t > = \frac{1}{2}\sin 2\omega t$$

Güç sıfırdan farklı olmasına rağmen ortalama güç (enerji akışı) sıfırdır.

Duran dalgalar enerji iletmez!