

Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği Bölümü

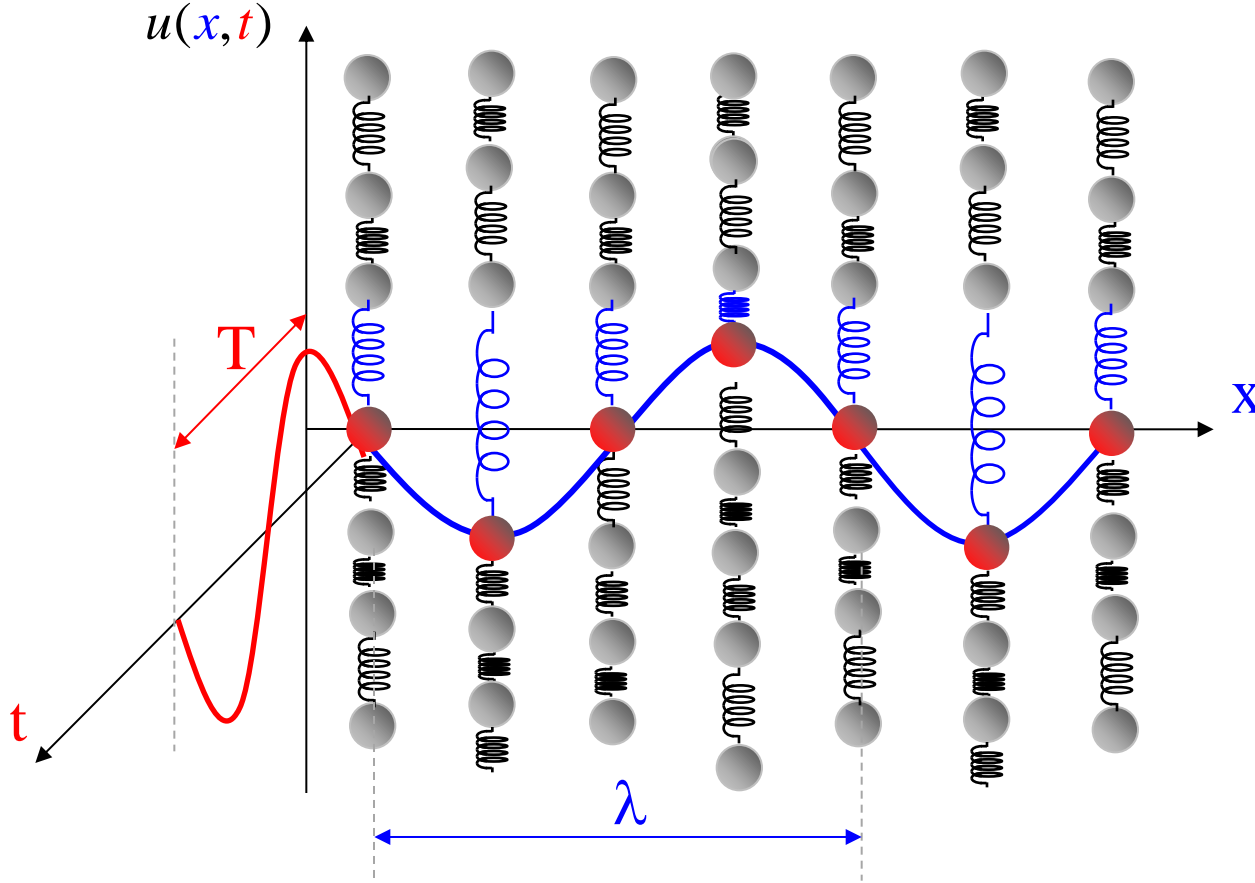
FZM210 Dalgalar ve Optik

Prof. Dr. Hüseyin Sarı

Ankara Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Fizik Mühendisliği Bölümü

Dağınım Bağıntısı

İlerleyen Dalga



$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi)$$

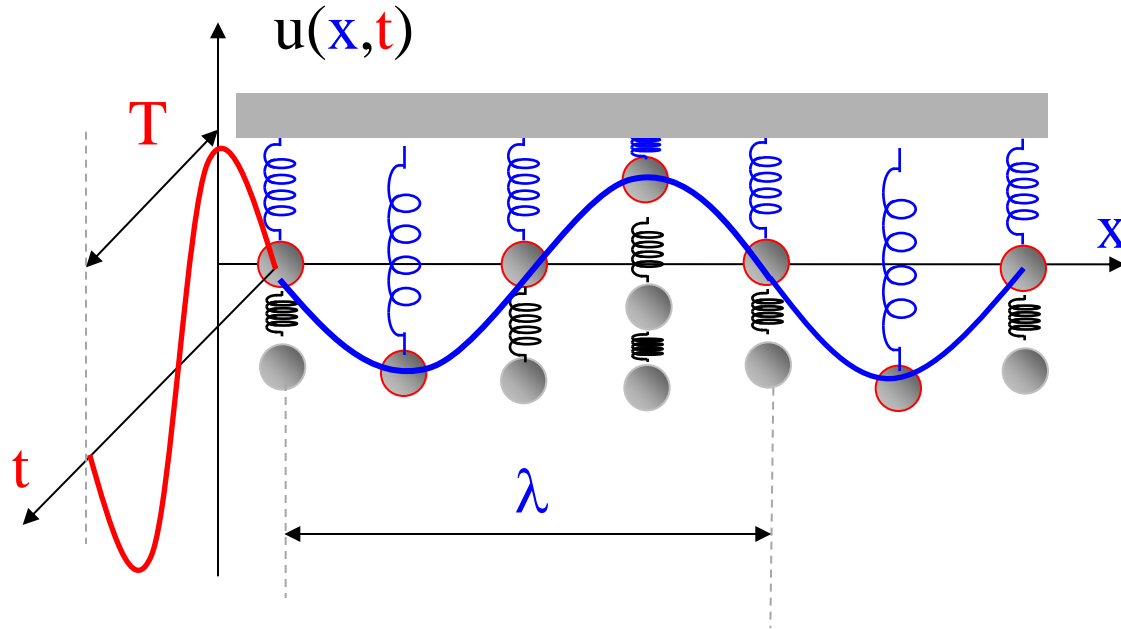
Uzay (λ) ve zaman (T) periyotları arasındaki ilişki

$$\lambda = vT$$

Dalganın ilerleme hızı (Faz Hızı):

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi\lambda}{2\pi T} = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\left(\frac{2\pi}{T}\right) = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)}\left(\frac{2\pi}{T}\right) = \frac{\omega}{k}$$

İlerleyen Dalgalar-Faz ve Grup Hızları



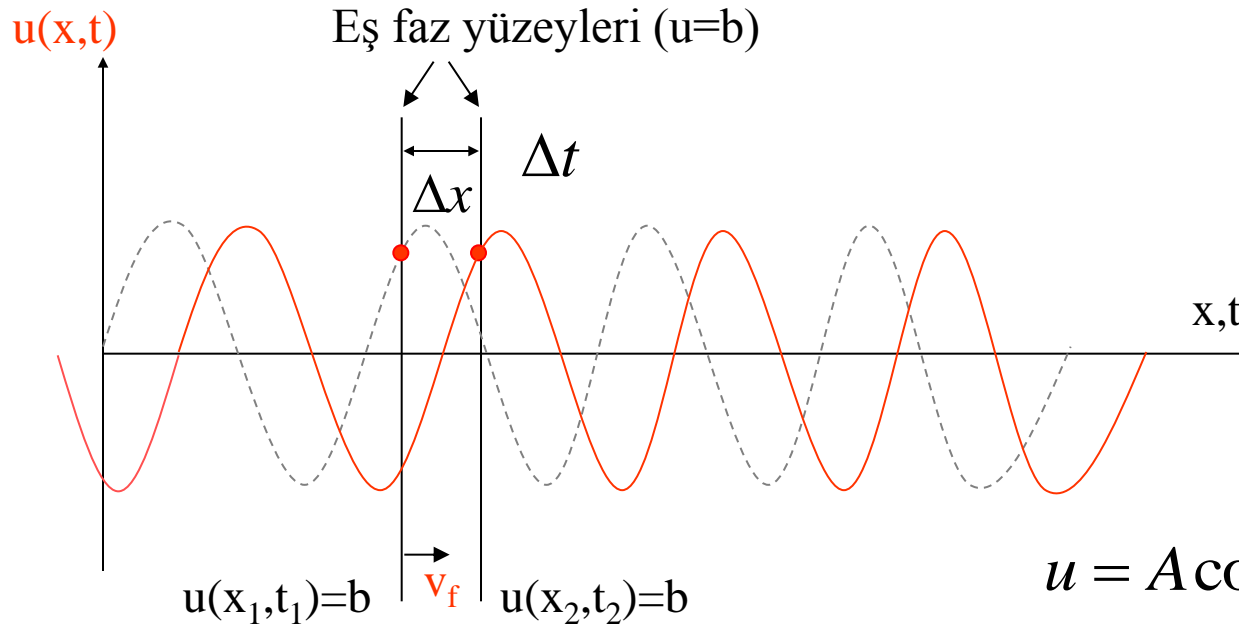
$$u(x,t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t + \phi\right)$$

Dalganın hızı:

$$v(t) = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \text{sabit}$$

İlerleyen Dalgalar-Faz Hızı

Faz hızı, tek frekanslı bir dalga'nın (eş faz yüzeylerinin) hızını gösterir.



$$(kx_1 - \omega t_1) = \phi \rightarrow u(x_1, t_1) = sbt = b$$

$$(kx_2 - \omega t_2) = \phi \rightarrow u(x_2, t_2) = sbt = b$$

$$k(x_2 - x_1) - \omega(t_2 - t_1) = b - b = 0$$

$$k\Delta x - \omega\Delta t = 0 \Rightarrow v \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}$$

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

Faz Hızı

Dağınım

Dağınım, bir ortamda dalga hareketini tanımlayan dalga vektörü (uzaysal frekans) ve frekans (zamansal frekans) arasındaki ilişkiyi verir. Dalganın hızı ortamda dalgaboyundan bağımsız ise böyle ortamlara Dağıtkan olmayan Ortam, dalgaboyuna bağlı ise Dağıtkan ortam denir.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \text{sabit} \quad \omega = vk$$

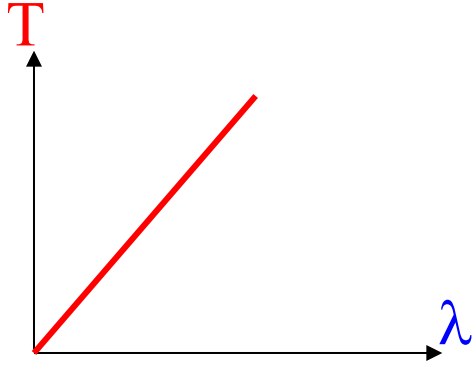
Bazı ortamlarda hız sabit değildir ve en genel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.:

Dağınım Bağıntısı: $\omega(k) = v(\omega)k$

$$\omega(k) \propto k$$

Dağınım Bağıntısı

Dağınım bağıntısında eksenler neyi gösterir?



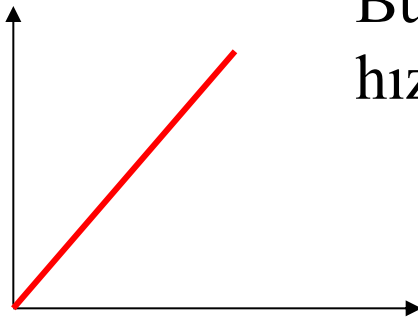
Uzay (λ) ve zaman (T)
periyotları arasındaki ilişki

$$\frac{\lambda}{T} = v \quad T = \left(\frac{1}{v}\right)\lambda$$

Eğim $1/v$ yi verir.

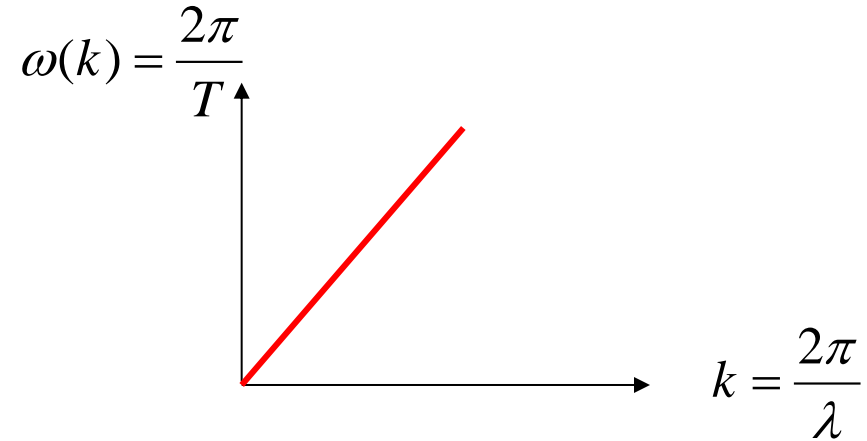
Ancak pratik sebeplerden uzaysal ve zamansal periyotlardan ziyade uzaysal ve zamansa frekansları, ve çoğu zaman da açısal frekanslar cinsinden çizeriz.

$$\omega(k) = \frac{2\pi}{T}$$

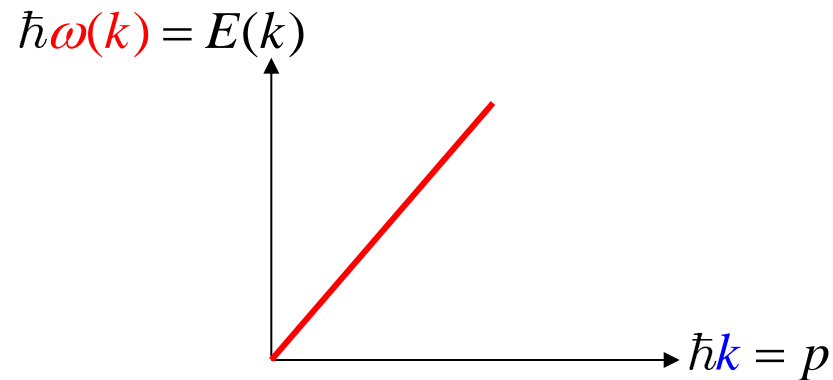


Bu grafiğin eğimi dalganın
hızını (v) verir.

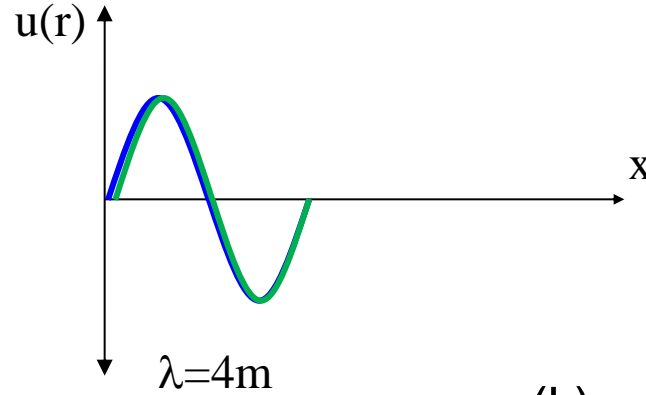
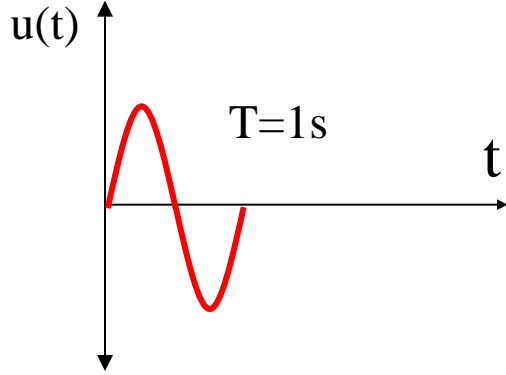
Dağınım Bağıntısı



.Dağınım bağıntısı bazı durumlarda da E-p eksenleri ile de gösterilir (w ve k eksenleri \hbar sabiti ile çarpılarak)



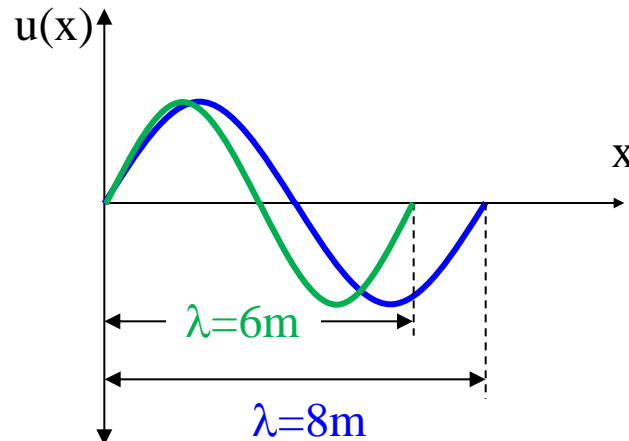
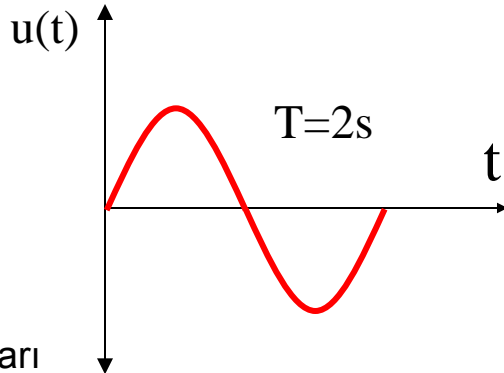
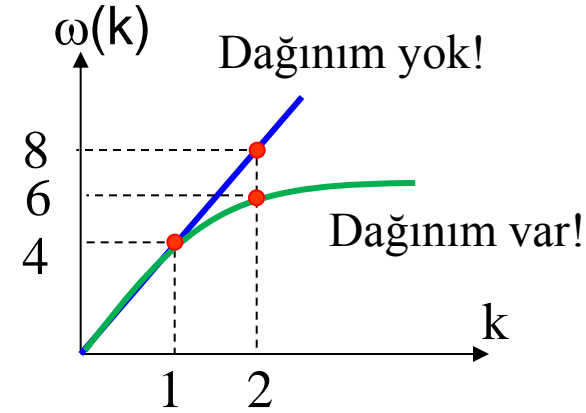
Dağınım Bağıntısı



$$\frac{\lambda}{T} = v$$

Yukarıdaki ilişki dalga'nın uzaydaki bir noktasındaki bir titreşimin kendini 1s'de tekrar etmesi sürecinde dalga uzayda 4m kadar yol kattığını, başka bir deyişle bu hareket sürecinde 4m uzunluğundaki noktalarda bu hareketin devam ettiğini, dolayısıyla bu dalga'nın hızının 4 m/s birim olduğunu söyleyebiliriz.

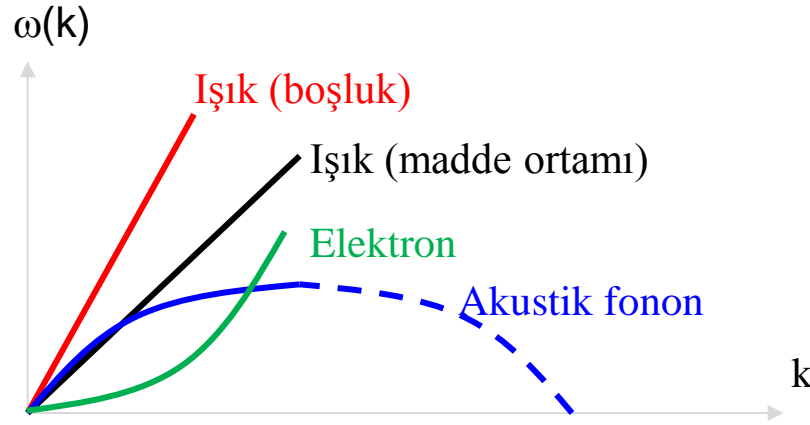
Eğer salınım 2s sürseydi, dağıtkan olmayan ortamda uzaysal frekansın 8m olduğunu söyleyebilirdik. Ancak eğer dağıtkan ortam söz konusu ise uzayda aldığı yolu 8m'den farklı olduğunu söyleyebiliriz (bu örnekte 6 m)



$$\left(\frac{1}{T}\right) = v \left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Dağınım Bağıntısı

$$\omega(k) = v(\omega)k$$



Ödev:

Bütün frekanslarda dalga aynı hızla mı ilerler, yoksa düşük frekanslarda yüksek frekanslara göre daha mı kolay ilerler?

Foton ve Fonon Dağınım Bağıntısı

$$\omega(k) = ck$$

Işık (boşluk)

$$\omega(k) = (c/n)k$$

Işık (madde ortamı)

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4\beta}{M}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

Akustik fonon

Kütleli Parçacıkların Dağınım Bağıntısı

$$\omega(k) = ck$$

Elektron

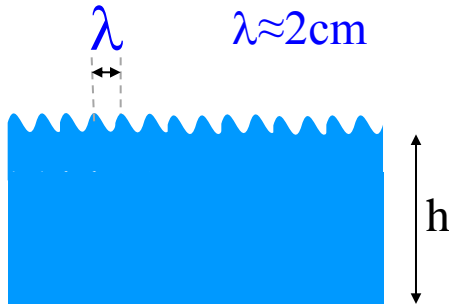
$$\omega(k) = \sqrt{gk}$$

Deniz Dalgası (deep water)
Su derinliği 1/2 den büyük olduğu durumlarda

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_p$$

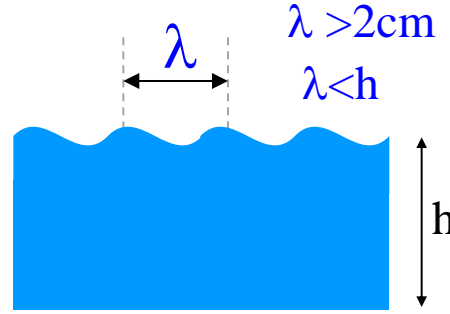
Deniz Dalgaları-Dağınım

Denizde oluşan dalgaların dağınım bağıntısı dalgaboyu (λ) ve suyun derinliğine (h) bağlı olarak farklı şekildedir.



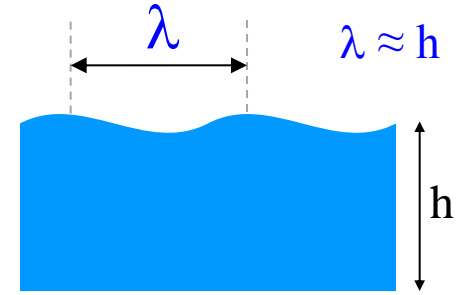
Yüzey gerilimi(σ) baskın

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} k^3$$



Yerçekimi (g) baskın

$$\omega(k) = \sqrt{gk}$$



Tsunami

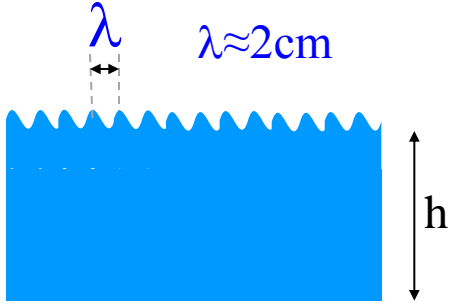
$$\omega(k) = (gh)^{1/2} k$$

- 1- Küçük dalgacıklar ($\lambda \ll h$)
- 2- Derin sularda uzun dalgaboylu dalgaları ($\lambda < h$)
- 3- Tsunami (uzun dalgaboylu dalgalar ($\lambda > h$))

Derin Sularda Dalgacıklar ($\lambda \approx 2\text{cm}$)

Eğer deniz yüzeyinde oluşan dalgaların dalgaboyu 2cm'den küçük ($\lambda \approx 2\text{cm}$) ise yüzey gerilimi yerçekimi kuvvetinden daha baskın olur; böyle durumda dağınım bağıntısı:

Dağınım Bağıntısı: $\omega(k) = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}$ σ =yüzey gerilimi
 ρ =kütle yoğunluğu



Yüzey gerilimi(σ) baskın

Faz Hızı: $v_f = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} k}$

Grup Hızı: $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \Rightarrow v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} k} = \frac{3}{2} v_f$

$$v_g = \frac{3}{2} v_f$$

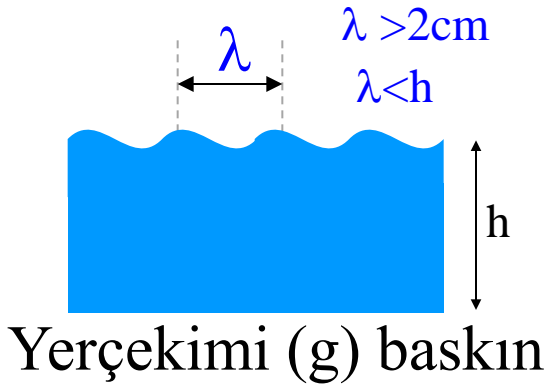
Ortam dağıtık bir ortamdır: $\lambda \downarrow \Rightarrow k \uparrow \Rightarrow v_f \uparrow$

Ortam dağıtık olduğu için **dalgaboyu küçük** olan dalgalar **daha hızlı**, büyük dalgaboylu bileşenler ise daha yavaş hareket edecektir.

Derin Sularda Uzun Dalgaboylu Dalgalar ($\lambda < h$)

Eğer deniz yüzeyinde oluşan dalgaların dalgaboyu 2cm'den daha büyük ve dalganın dalgaboyu suyun derinliğinden (h) küçük ise dağınım bağıntısı:

Dağınım Bağıntısı: $\omega(k) = \sqrt{gk}$ g =yerçekimi ivmesi



Faz Hızı: $v_f = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$

Grup Hızı: $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \Rightarrow v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_f$

$$v_g = \frac{1}{2} v_f$$

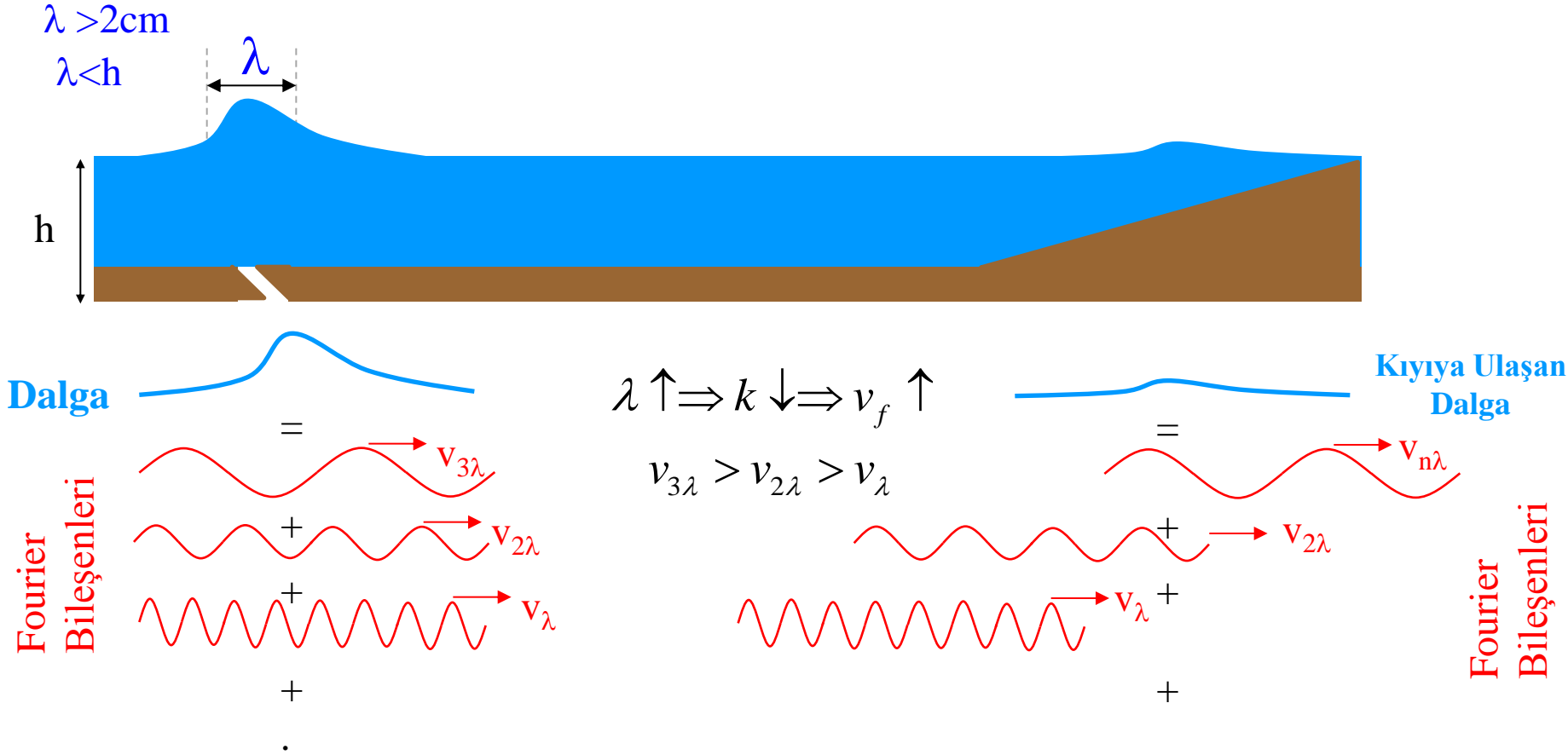
Ortam dağıtkan bir ortamdır: $\lambda \uparrow \Rightarrow k \downarrow \Rightarrow v_f \uparrow$

Ortam dağıtkan olduğu için dalgaboyu büyük olan dalgalar daha hızlı, küçükdalgaboylu bileşenler ise daha yavaş hareket edecektir.

Derin Sularda Uzun Dalgaboylu Dalgalar ($\lambda < h$)

$$\omega(k) = \sqrt{gk}$$

Yukarıdaki dağılım bağıntısına uyan bir dalga kıyıya ulaştığında bütün gücünü yitirmiş olur.

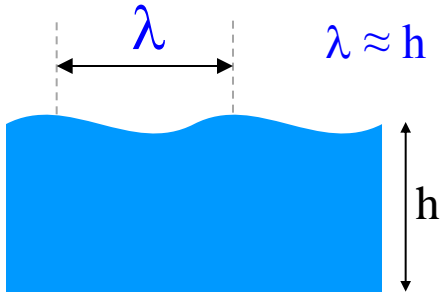


Ortam dağıtkan olduğu için dalgaboyu büyük olan dalgalar daha hızlı, küçükdalgaboylu bileşenler ise daha yavaş hareket edecektir.

Uzun Dalgaboylu Okyanus Dalgaları ($\lambda \approx h$)

Eğer deniz yüzeyinde oluşan dalgaların dalgaboyu uzun ve suyun derinliği (h) ile karşılaştırılabilir mertebedeysse dağınım bağıntısı:

Dağınım Bağıntısı: $\omega(k) = (gh)^{1/2} k$ g =yerçekimi ivmesi
 h =derinlik



Faz Hızı: $v_f = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}$

Grup Hızı: $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \Rightarrow v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \sqrt{gh} = v_f$

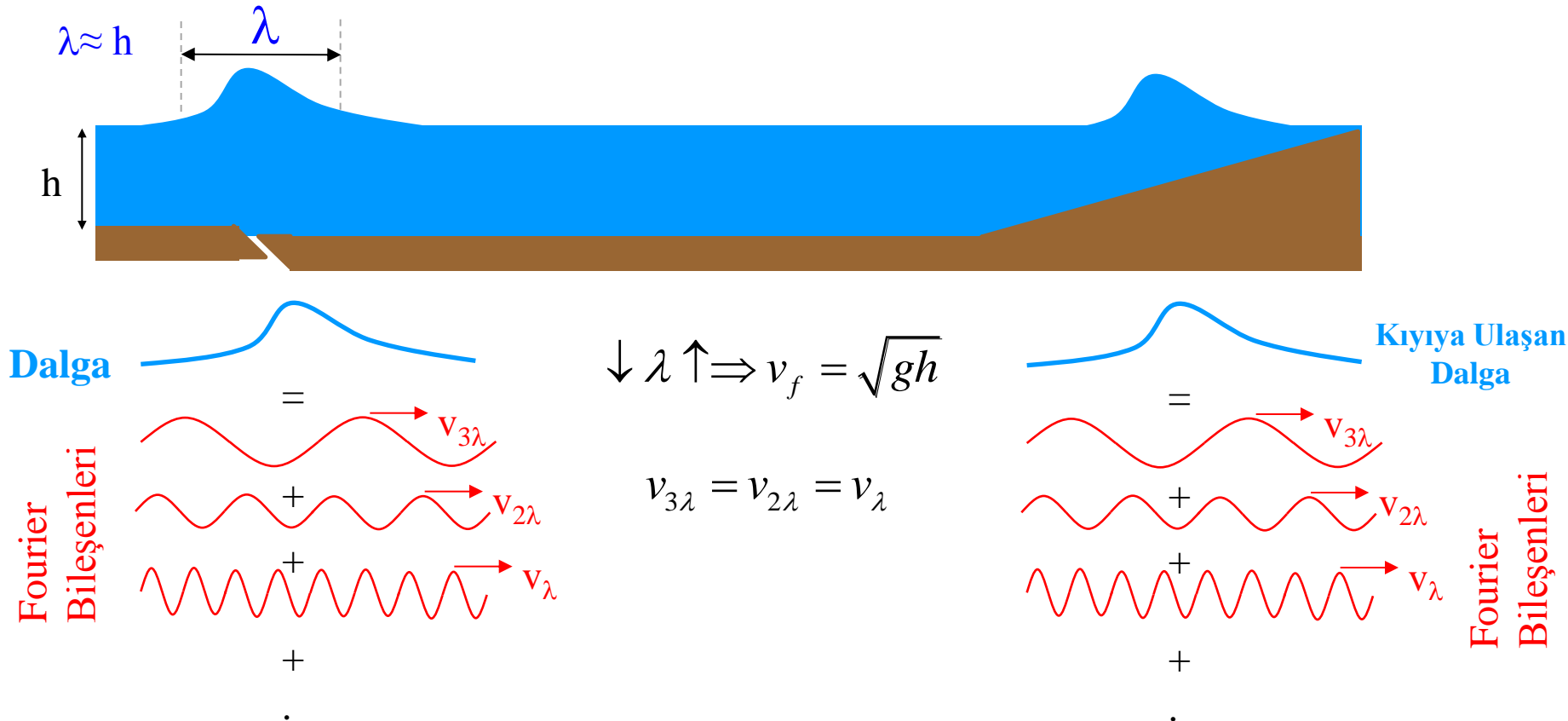
$$v_g = v_f$$

Ortam dağıtık değildir: $\downarrow \lambda \uparrow \Rightarrow v_f = \sqrt{gh}$

Ortam dağıtık olmadığından dalga şeklini koruyarak uzun mesafeler boyunca yol katedebilir. Tahrip gücü çok büyük olan tsunami dalgaları bu dalgalara örnek olarak verilebilir.

Tsunami Dalgaları ($\lambda \approx h$)

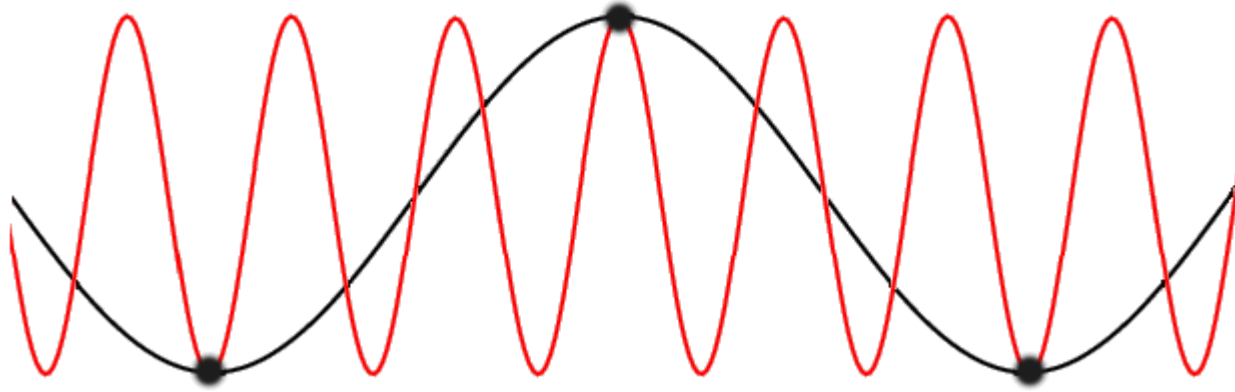
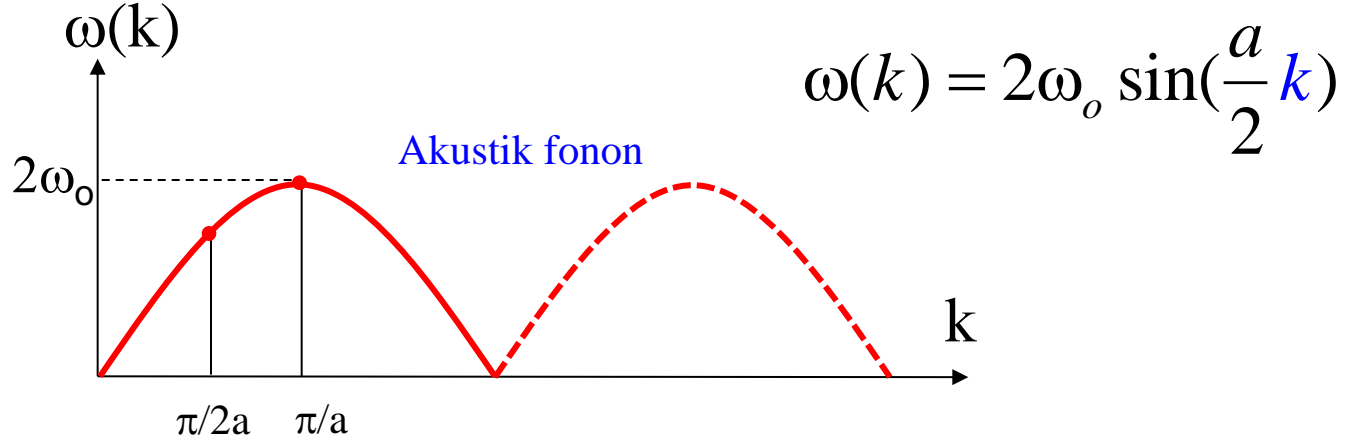
Tsunami dalgalarının dalgaboyu 8-10km uzunluğunda olabilir, bu mesafe okyanusların derinliği ile karşılaştırılabilir mertebede olduğu için dağınım bağıntısında dalganın hızı dalgaboyundan bağımsızdır.



Ortam dağıtkan olduğu için dalgaboyu büyük olan dalgalar daha hızlı, küçükdalgaboylu bileşenler ise daha yavaş hareket edecektir.

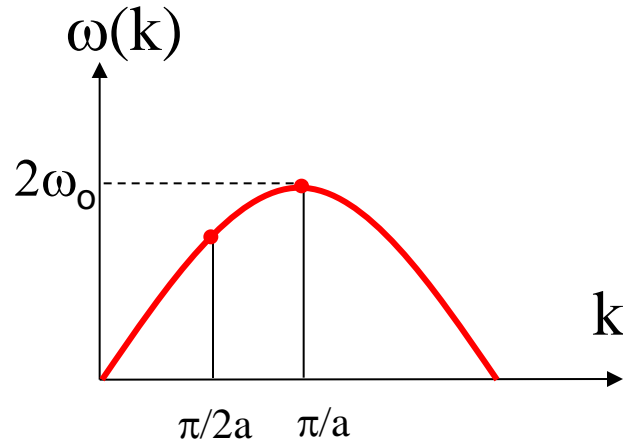
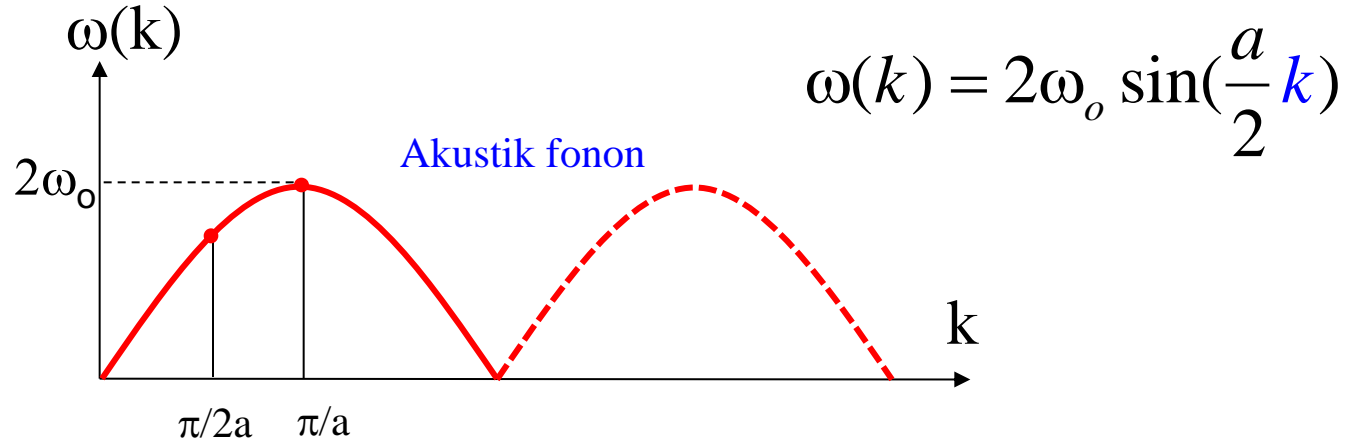
Fonon Dağılım Bağıntısı

Kristal örgüde oluşan kollektif dalgaları fonon olarak adlandırılır.



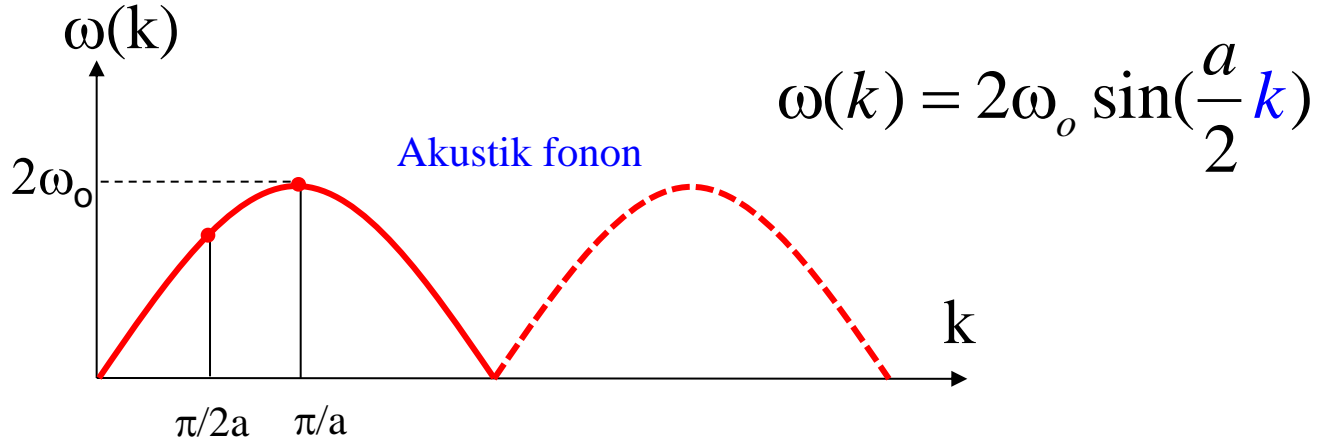
Dağılım-Örnek

Örnek-1: Akustik fonon (kristal örgü salınımı) dağılım bağıntısının aşağıdaki şekilde verildiği durum için a) $k=\pi/2a$ ve b) $k=\pi/a$ değerlerinde v_f/v_g oranlarını bulunuz.



Dağılım-Örnek

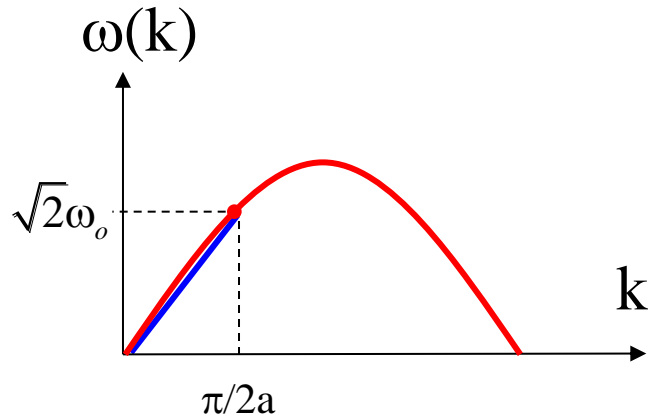
Örnek-1: Akustik fonon (kristal örgü salınımı) dağılım bağıntısının aşağıdaki şekilde verildiği durum için a) $k=\pi/2a$ ve b) $k=\pi/a$ değerlerinde v_f/v_g oranlarını bulunuz.



Çözüm:

a) $k=\pi/2a$ $k=\pi/2a$ değerinde açısal frekans değeri:

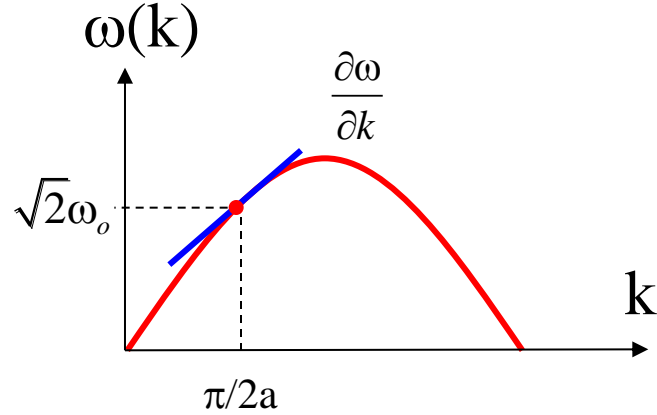
$$\omega\left(\frac{\pi}{2a}\right) = 2\omega_0 \sin\left(\frac{a}{2} \frac{\pi}{2a}\right) = 2\omega_0 \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\omega_0$$



Faz hızı:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{2}\omega_0}{\frac{\pi}{2a}} = \sqrt{2}\omega_0 \frac{2a}{\pi}$$

Çözüm: a) $k=\pi/2a$



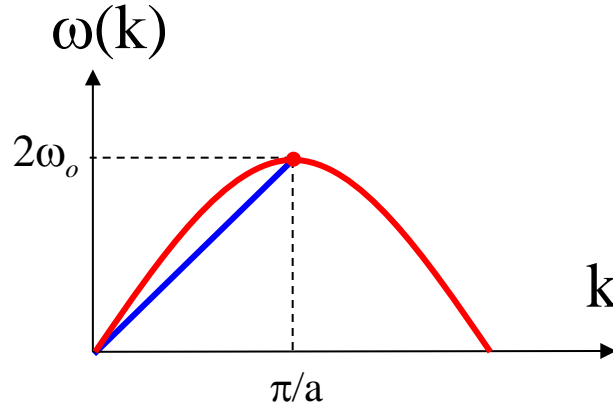
$$\text{Grup hızı: } v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\partial\left(2\omega_0 \sin\left(\frac{a}{2}k\right)\right)}{\partial k} = 2\omega_0 \frac{a}{2} \cos\left(\frac{a}{2}k\right) = \omega_0 a \cos\left(\frac{a}{2}k\right)$$

$$\cos\left(\frac{a}{2} \frac{\pi}{2a}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v_g = \left. \frac{\partial\omega}{\partial k} \right|_{k=\frac{\pi}{2a}} = \omega_0 a \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{v_f}{v_g} = \frac{\sqrt{2}\omega_0 \frac{2a}{\pi}}{\omega_0 a \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4}{\pi}$$

Çözüm: b) $k=\pi/a$



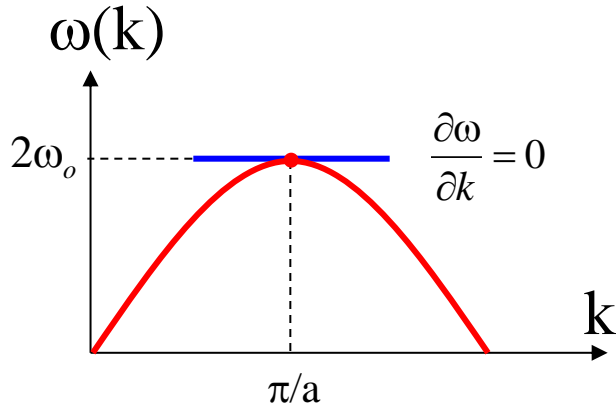
$$\omega(k) = 2\omega_o \sin\left(\frac{a}{2}k\right)$$

$k=\pi/a$ değerinde açısıl frekans değeri:

$$\omega\left(\frac{\pi}{a}\right) = 2\omega_o \sin\left(\frac{a}{2} \frac{\pi}{a}\right) = 2\omega_o$$

$$\sin\left(\frac{a}{2} \frac{\pi}{a}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Faz hızı: $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{2\omega_o}{\pi/a} = \frac{2a}{\pi} \omega_o$



Grup hızı: $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial \left(2\omega_o \sin\left(\frac{a}{2}k\right) \right)}{\partial k} = 2\omega_o \frac{a}{2} \cos\left(\frac{a}{2}k\right) = \omega_o a \cos\left(\frac{a}{2}k\right)$

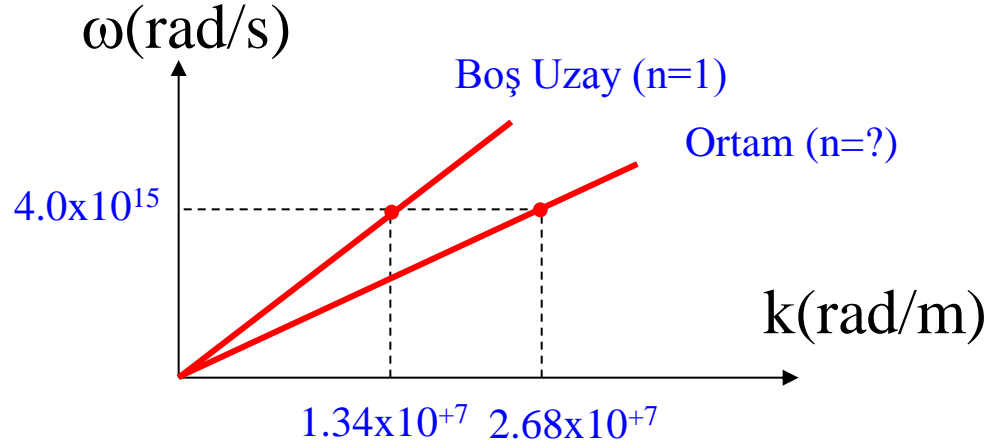
$$v_g = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=\frac{\pi}{a}} = \omega_o a \cos\left(\frac{a}{2} \frac{\pi}{a}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{a}{2} \frac{\pi}{a}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\frac{v_f}{v_g} = \frac{\frac{a}{\pi} \omega_o}{0} = \infty$$

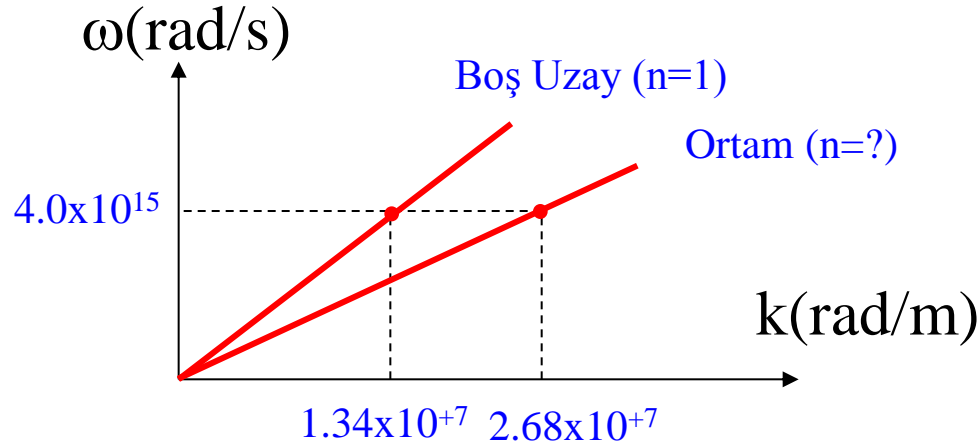
Dağınım-Örnek

Örnek-2: Boş uzaya göre dağınım bağıntısı aşağıda verilen mavi ışığın ilerlediği ortamın kırılma indisi nedir?



Dağılım-Örnek

Örnek-2: Boş uzaya göre dağılım bağıntısı aşağıda verilen mavi ışığın ilerlediği ortamın kırılma indisi nedir?



Çözüm: Boş uzay: $\omega_o = ck_o \Rightarrow c = \frac{\omega_o}{k_o}$

Madde ortamı: $\omega_o = \frac{c}{n}k \Rightarrow \frac{c}{n} = \frac{\omega_o}{k} \Rightarrow n = \frac{ck}{\omega_o}$

$$n = \left(3.0 \times 10^8 \text{ m/s} \right) \left(\frac{2.68 \times 10^7 \text{ rad/m}}{4.0 \times 10^{15} \text{ rad/s}} \right) = 2.01$$

	λ	$k=2\pi/\lambda$	ν	$\omega=2\pi\nu$	$n=ck/\omega$
Boş Uzay	470nm $4.7 \times 10^{-7} \text{m}$	$1.34 \times 10^7 \text{rad/m}$	6.38(THz) $6.38 \times 10^{14} \text{Hz}$	$4.0 \times 10^{15} \text{rad/s}$	1
Madde Ortamı	235nm $2.35 \times 10^{-7} \text{m}$	$2.68 \times 10^7 \text{rad/m}$	6.38(THz) $6.38 \times 10^{14} \text{Hz}$	$4.0 \times 10^{15} \text{rad/s}$	2.01

$$E(x,t) = E_o \cos(kx - \omega t + \phi)$$

