

Matematik I

Doç. Dr.
Türkmen
Göksel

Karesel
Formlar

Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

AÜ SBF İktisat Bölümü

Matematik I

Matematik I

Doç. Dr.
Türkmen
Göksel

Karesel
Formlar

1 Karesel Formlar

Karesel Formun (Quadratic Forms) Tanımı

Matematik I

Doç. Dr.
Türkmen
Göksel

Karesel
Formlar

Tanım:

- $Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ şeklinde ifade edilen formlardır.
- Burada $a_{ij} \in \mathfrak{R}$ ve $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ olmaktadır.
- 2 değişkenli karesel form:

$$Q = a_{11}x_1^2 + \underbrace{2a_{12}x_1x_2}_{a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1} + a_{22}x_2^2.$$

Leading Principal Minor

Matematik I

Doç. Dr.
Türkmen
Göksel

Karesel
Formlar

N boyutlu bir karesel formun Leading Principal Minor Matrislerinin Bulunması:

$$\blacksquare A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ olsun.}$$

Leading Principal Minor

Matematik I

Doç. Dr.
Türkmen
Göksel

Karesel
Formlar

A matrisini "Leading Principal Minor" Matrislerinin Bulunması

$$\blacksquare D_1 = [a_{11}]_{1 \times 1}, D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}, \dots,$$

$$\blacksquare D_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}_{i \times i},$$

- ... $\forall i = 1, \dots, n$. D_i matrisleri A matrisinin "leading principal minor" matrislerini oluşturur (n tane).

Leading Principal Minor

Matematik I

Doç. Dr.
Türkmen
Gökel

Karesel
Formlar

Önerme: Q gibi bir karesel form

- Pozitif belirli $\iff |D_i| > 0 \forall i = 1, \dots, n.$
- Negatif belirli $\iff (-1)^i |D_i| > 0 \forall i = 1, \dots, n.$

3x3 Boyutlu Bir Karesel Matris Örneği:

- $Q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 2xy.$
- Q karesel formu için ilgili matris şu şekilde yazılır:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- $|D_1| = 3 > 0, |D_2| = 8 > 0, |D_3| = 40 > 0 \implies Q$ pozitif belirlidir.

Principal Minor Matrisleri

Matematik I

Doç. Dr.
Türkmen
Göksel

Karesel
Formlar

Principal Minor Matrislerinin Bulunması:

$$\blacksquare A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ olsun.}$$

Principal minor matrisleri

A gibi bir 3×3 boyutundaki bir matriste principal minor matrisleri şu şekilde oluşur:

■ 1 boyutlu olanlar: $[a_{11}]_{1 \times 1}$, $[a_{22}]_{1 \times 1}$, $[a_{33}]_{1 \times 1}$

■ 2 boyutlu olanlar: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$,

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$, $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$,

■ Son olarak 3 boyutlu olan $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

matrisleri A matrisinin "principal minor" matrislerini oluşturur.

■ "n" değişken için " $2^n - 1$ " tane "principal minor" vardır.

Principal minor matrisleri

Matematik I

Doç. Dr.
Türkmen
Göksel

Karesel
Formlar

Önerme:

- Eğer "principal minor" matrislerin tümünün determinantı ≥ 0 ise, A yarı-pozitif belirlidir.
- Eğer "principal minor" matrislerin tek boyutlu olanlarının determinantı ≤ 0 ve çift boyutlu olanların determinantı ≥ 0 ise, A yarı-negatif belirlidir.
- Yukarıda belirtilen hiçbir duruma (pozitif, yarı-pozitif, negatif, yarı-negatif belirli) uymuyor ise karesel form "belirsizdir".

Principal minor matrisleri

Örnek:

- $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ olsun.

- Bu durumda 1 boyutlu olanlar: $[f_{11}]_{1 \times 1} = -1 < 0$,
 $[f_{22}]_{1 \times 1} = -1 < 0$, $[f_{33}]_{1 \times 1} = -2 < 0$

- 2 boyutlu olanlar: $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = 0$,

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = 2 > 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = 2 > 0.$$

- 3 boyutlu olan $|F| = 0$ olmaktadır.

- "Principal minor" matrisleri tek boyutlarda ≤ 0 , çift boyutlarda ≥ 0 olduğundan matris yarı-negatif belirlidir.