Matematik I

Fonksiyonlar

Fonksiyon: A kümesindeki her bir elemanın, B kümesindeki sadece tek bir eleman ile ilişkilendirilmesidir.

- $f : \underbrace{A}_{\text{önalan}} \to \underbrace{B}_{\text{görüntü}}$
- Örnek: $f : \Re^2 \to \Re^1$ olsun: $f(x, y) = xy$.
- **Karşılama:** A kümesindeki bir elemanın B kümesindeki birden fazla elemanla ilişkilendirilmesine "karşılama" denir.

Tekdüze (Monoton) fonksiyonlar:

- Kesin Artan fonksiyon: $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \ \forall \ x$.
- Kesin Azalan fonksiyon: $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \ \forall \ x$.
- Artan fonksiyon: $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \ \forall \ x$.
- Azalan fonksiyon: $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \ \forall \ x$.

Fonksiyonlar

Homojen Fonksiyonlar:

- **Tanım:** $f(jx_1, ..., jx_n) = j^r f(x_1, ..., x_n)$ $\forall j > 0$ ise f fonksiyonuna r. dereceden homojen denir.
- Örnek: $f(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$ $(A, \alpha, \beta > 0)$
- $$f(jL, jK) = A(jL)^{\alpha}(jK)^{\beta} = Aj^{\alpha}L^{\alpha}j^{\beta}K^{\beta} = j^{\alpha+\beta}AL^{\alpha}K^{\beta}$$
- $AL^{\alpha}K^{\beta}$ fonksiyonu $(\alpha + \beta)$. dereceden homojendir.

Fonksiyonlar

Bazı yaygın kullanılan terimler:

- $Q = f(x_1, ..., x_n)$ üretim fonksiyonu olsun. Eğer $f(jx_1, ..., jx_n) = j^r f(x_1, ..., x_n)$ ise,
- $r = 1$ ise ölçeğe göre sabit getiri
- $r > 1$ ölçeğe göre artan getiri
- $r < 1$ ölçeğe göre azalan getiri söz konusudur.

Fonksiyonlar

Homojen fonksiyonun bazı özellikleri:

- **Teorem:** Eger f fonksiyonu r. dereceden homojen ise, 1.dereceden kısmi türevleri $r-1$. dereceden homojen olur.
- **Teorem (Euler Teoremi:)** f fonksiyonu r. dereceden homojen oldugunda,

$$x_1 \frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1} + ... + x_n \frac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_n} = rf(x_1, ..., x_n)$$

  olur.
- Örneğin $f(k, l) = k^{0.5} l^{0.5}$ şeklinde 1. dereceden homojen bir fonksiyon verilmiş olsun.
- Bu durumda Euler teoremini uygularsak:
- $k(0.5)k^{-0.5}l^{0.5} + l(0.5)l^{-0.5}k^{0.5}$ değeri $k^{0.5}l^{0.5}$ değerine eşittir.

Konveks/Konveks Olmayan Küme

- **Tanım:** U kümesinde yer alan herhangi x ve y gibi iki noktanın ($\forall\ x, y \in U$) birleştirdiği $l(x, y)$ segmenti U kümesinin içinde kalıyorsa U kümesi konveks özelliğini taşır.
- Aksi takdirde konveks olmayan küme denir.
- Konveks küme için alternatif tanım: $\forall\ x, y \in U$ olmak üzere eğer $l(x, y) = \{tx + (1 - t)y : 0 \leq t \leq 1\} \in U$ ise U kümesine konveks küme denir.

(Kesin) Konkav ve (Kesin) Konveks Fonksiyonlar

Tanım: $f : U \to \Re$ gibi tanımlı bir fonksiyon olsun (U konveks bir küme olmak üzere).

- $$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$
  $\forall\ x, y \in U$ ve $t \in (0,1)$ ise f konkavdır.
- $$f(tx + (1-t)y) > tf(x) + (1-t)f(y)$$
  $\forall\ x, y \in U$ ve $t \in (0,1)$ ise f kesin konkavdır.
- $$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$
  $\forall\ x, y \in U$ ve $t \in (0,1)$ ise f konvekstir.
- $$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$
  $\forall\ x, y \in U$ ve $t \in (0,1)$ ise f kesin konvekstir.

(Kesin) Konkav ve (Kesin) Konveks Fonksiyonlar

Konkav ve konveks fonksiyonların bazı özellikleri:

- Konkav fonksiyonların toplamı da konkavdır.
- Konkav fonksiyonlardan en az biri kesin konkav ise, toplamları da kesin konkav olur.
- Konveks fonksiyonların toplamı da konvekstir.
- Konveks fonksiyonlardan en az biri kesin konveks ise, toplamları da kesin konveks olur.
- f konkav (konveks) ise, $-f$ konvekstir (konkavdır).

(Kesin) Konkav ve (Kesin) Konveks Fonksiyonlar

Konkavlık ve Konvekslik için kalkülüs kriterleri:

- $z = f(x_1, ..., x_n)$ 2. dereceden türevlenebilir n değişkenli olan bir fonksiyon olsun. z fonksiyonu için **Hessian matrisi** şu şekilde oluşur:
- $H = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}_{nxn}$
- f_{ij} : f fonksiyonunun i. ve j. elemanına göre kısmi türevini gösterir.

(Kesin) Konkav ve (Kesin) Konveks Fonksiyonlar

Konkavlık ve Konvekslik için kalkülüs kriterleri:

- f kesin konkavdır $\Longleftrightarrow$ Hessian matrisi negatif belirlidir.
- f kesin konvekstir $\Longleftrightarrow$ Hessian matrisi pozitif belirlidir.
- f konkavdır $\Longleftrightarrow$ Hessian matrisi negatif-yarı belirlidir.
- f konvekstir $\Longleftrightarrow$ Hessian matrisi pozitif-yarı belirlidir.

(Kesin) Konkav ve (Kesin) Konveks Fonksiyonlar

Konkavlık ve Konvekslik için kalkülüs kriterleri:

- f kesin konkavdır $\Longleftrightarrow$ Hessian için Leading principal minor matrisleri "-"den başlayarak işaret değiştirerek gider.
- f kesin konvekstir $\Longleftrightarrow$ Hessian için tüm leading principal minor matrislerinin determinantı > 0.
- f konkavdır $\Longleftrightarrow$ Hessian için "$2^n - 1$" principal minor matrislerinin determinantı tek boyutlarda (1x1,3x3,...) ≤ 0, çift boyutlarda (2x2,4x4,...)≥ 0.
- f konvekstir $\Longleftrightarrow$ Hessian için tüm principal minor matrisleri ≥ 0'dır.
- *Hessian için geçerli olan ifadeler f için de geçerlidir. Aynı sonucu verecektir.

Quasiconcave/Quasiconvex Fonksiyonlar

Tanım: $f : U \longrightarrow \Re$ fonksiyonu U gibi konveks bir küme üzerinden tanımlı olduğunda,

- quasiconcave $\Longleftrightarrow$
  $f(tx + (1-t)y) \geq min\{f(x), f(y)\} \, \forall \, x, y \in U, \; t \in (0,1)$
- kesin quasiconcave $\Longleftrightarrow$
  $f(tx + (1-t)y) > min\{f(x), f(y)\}$
  $\forall \, x, y \in U, (x \neq y), \; t \in (0,1)$

Quasiconcave/Quasiconvex Fonksiyonlar

- quasiconvex $\Longleftrightarrow$
  $f(tx + (1-t)y) \leq max\{f(x), f(y)\} \, \forall \, x, y \in U, \; t \in (0,1)$
- kesin quasiconvex $\Longleftrightarrow$
  $f(tx + (1-t)y) < max\{f(x), f(y)\}$
  $\forall \, x, y \in U, (x \neq y), \; t \in (0,1)$
- Herhangi bir konkav (konveks) fonksiyon, quasikonkav (quasikonveks)'tir. Tersi ise geçerli değildir.
- **Teorem:** F fonksiyonu 1.dereceden homojen ve quasiconcave ise, F aynı zamanda konkavdır.

Kalkülüs ile Quasiconcave ve Quasiconvex Durumlarının Kontrolü:

- $z = f(x_1, ..., x_n)$ iki kez türevlenebilen n değişkenli bir fonksiyon olsun.
- $$|B_n| = det \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 & ... & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & ... & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & ... & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & ... & f_{nn} \end{pmatrix}_{n+1xn+1}$$

Quasiconcave/Quasiconvex Fonksiyonlar

$x_1, ..., x_n \geq 0$ için;

- "Quasiconcave" durumu için yeterli koşul:
- $$|B_1| < 0; |B_2| > 0, ..., \begin{cases} |B_n| < 0, & \text{n tek ise;} \\ |B_n| > 0, & \text{n çift ise.} \end{cases}$$
- "Quasiconvex" durumu için yeterli koşul:
- $$|B_1| < 0; |B_2| < 0, ..., |B_n| < 0.$$
- Burada
  $$|B_1| = det \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_{11} \end{pmatrix}, |B_2| = det \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \dots .$$

Quasiconcave/Quasiconvex Fonksiyonlar

Önerme: Tüm Cobb-Douglas tipi fonksiyonlar $F(x,y) = Ax^a y^b$ $(A, a, b > 0)$ quasikonkavdır.

- **Örnek:** $f(x,y) = xy \ (x, y > 0)$
- $$|B_1| = det \begin{pmatrix} 0 & f_x \\ f_x & f_{xx} \end{pmatrix} = -f_x f_x = -y^2 < 0$$
- $$|B_2| = det \begin{pmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 0 & y & x \\ y & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2xy > 0$$
- $$|B_1| < 0; |B_2| > 0 \Longrightarrow f(x,y) = xy \text{ quasikonkavdır.}$$