Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

AÜ SBF İktisat Bölümü

Kısıtlı Optimizasyon

Kısıtlı optimizasyonu 2 farklı durum için inceleyeceğiz:

- Eşitlik Kısıtları Altında Optimizasyon: Lagrange Yöntemi
- Eşitsizlik Kısıtları Altında Optimizasyon: Karush-Kuhn-Tucker Yöntemi

Kısıtlı Optimizasyon: Eşitlik Kısıtları Altında Optimizasyon

Lagrange Yöntemi:

- $$\underbrace{\max_{x_1,\ldots,x_n}}_{\text{seçim degiskenleri}} \underbrace{f(x_1,\ldots,x_n)}_{\text{amaç fonksiyonu}} \quad i=1,\ldots,\underbrace{n}_{\text{değişken sayısı}}$$
  $$\text{subject to} \quad \underbrace{g^j(x_1,\ldots,x_n)=b_j,}_{\text{kısıt fonksiyonları}} \quad j=1,\ldots,\underbrace{m}_{\text{kısıt sayısı}}$$
- $$\underbrace{L(x_1,\ldots,x_n;\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}_{\text{Lagrange Fonksiyonu}} = f(x_1,\ldots,x_n)+\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\lambda_j}_{\text{Lagrange Çarpanları}}[b_j-g^j(x_1,\ldots,x_n)]$$
- **1.mertebe koşulları:**
- $$\frac{\partial L(x_1,\ldots,x_n;\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}{\partial x_i}=\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial g^j(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_i}=0$$
  $\forall i=1,\ldots,n$
- $$\frac{\partial L(x_1,\ldots,x_n;\lambda_1,\ldots,\lambda_m)}{\partial \lambda_j}=b_j-g^j(x_1,\ldots,x_n)=0$$
  $\forall j=1,\ldots,m$
- $n+m$ denklem sistemi çözülerek $x_1^*,\ldots,x_n^*,\lambda_1^*,\ldots,\lambda_m^*$ değerleri bulunur.

Lagrange Çarpanı:

- Lagrange çarpanının yorumu: Sabitteki yani b değerindeki 1 birimlik artışın Lagrange fonksiyonunda ne kadarlık bir değişim yarattığını ifade eder.
- Kısıtlar eşitlik halinde olduğu için Lagrange çarpanları sıfırdan büyük olacaktır.

Kısıtlı Optimizasyon: Eşitlik Kısıtları Altında Optimizasyon

Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

Kısıtlı Optimizasyon

Kısıtlı Optimizasyon için İkinci Mertebe Koşulları:

- **Çitlenmiş Hessian (m kısıt, n değişken):**
- $H_{citlenmis}$ matrisi $(m+n)x(m+n)$ boyutunda olup aşağıdaki gibi tanımlıdır:
- $$[H_{citlenmis}] = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{\partial g^1}{\partial x_1} & \frac{\partial g^1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial g^m}{\partial x_1} & \frac{\partial g^m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g^m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g^m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g^1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g^m}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g^1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial g^m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$
- 0 matrisinin boyutu (mxm)'dır (m: kısıt sayısı).
- Şimdi de $[H_2]$'yi tanımlayalım. Tüm "sıfırları" içerecek ve son ana diyagonal elemanı $\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_2}$ olan matristir.
- $[H_3]$'te yine tüm "sıfırları" içerecek ve son ana diyagonal elemanı $\frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_3}$ olan matristir.
- Yani $[H_2]$'ye bir satır ve sütun ilave edilmiştir.
- $[H_4], \dots, [H_n]$ benzer şekilde ifade edilebilir.
- $H_n = H_{citlenmis}$ olur.

Kısıtlı Optimizasyon: Eşitlik Kısıtları Altında Optimizasyon

Kısıtlı Optimizasyon için İkinci Mertebe Koşulları:

- Özetle:
- Kısıt sayısı "m" tek sayı ise maksimum için $|H_{m+1}| > 0, |H_{m+2}| < 0, |H_{m+3}| > 0, \ldots$ olmalıdır.
- Kısıt sayısı "m" çift sayı ise maksimum için $|H_{m+1}| < 0, |H_{m+2}| > 0, |H_{m+3}| < 0, \ldots$ olmalıdır.
- Kısıt sayısı "m" tek sayı ise minimum için $|H_{m+1}| < 0, |H_{m+2}| < 0, |H_{m+3}| < 0, \ldots$ olmalıdır.
- Kısıt sayısı "m" çift sayı ise minimum için $|H_{m+1}| > 0, |H_{m+2}| > 0, |H_{m+3}| > 0, \ldots$ olmalıdır.

İkinci Mertebe Koşulu İçin Örnek:

- Bir tüketici x ve y mallarının tüketiminden fayda sağlamaktadır ve fayda fonksiyonu aşağıdaki $U(x, y) = xy + x + y + 1$ fonksiyonu ile gösterilmiştir:
- $x = x$ malı miktarı, $y = y$ malı miktarı.
- x malının fiyatı 1, y malının fiyatı 2, gelir de 30 olsun.
- $$\max_{x,y} U(x, y) = xy + x + y + 1$$
- s.t
$$x + 2y = 30$$
- Lagrange fonksiyonu:
$$L(x, y, \lambda) = xy + x + y + 1 + \lambda(30 - x - 2y)$$
- 1. mertebe koşulları:
- $L_x : y + 1 - \lambda = 0$
- $L_y : x + 1 - 2\lambda = 0$
- $L_\lambda : x + 2y - 30 = 0$
- Bu denklem sisteminin çözümü sonrası $x^* = 31/2$, $y^* = 29/4$, $\lambda^* = 33/4$ değerlerine ulaşılır.

İkinci Mertebe Koşulu İçin Örnek:

- 2. mertebe koşulları için çitlenmiş Hessian matrisini yazarsak:
- $$\begin{pmatrix} 0 & g_x^1 & g_y^1 \\ g_x^1 & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y^1 & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Test için $|H_{m+1}|, |H_{m+2}|, \ldots, |H_n|$'ne bakmamız gerekir. Bu örnekte $m = 1$ ve $n = 2$ oldugundan sadece $|H_2|$'ye bakacağız.
- $$[H_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- $|H_2| = 4 > 0$'dır.
- Kısıt sayısı "$m = 1$" tek sayı olduğundan maksimum için $|H_{m+1}| > 0, |H_{m+2}| < 0, |H_{m+3}| > 0, \ldots$ olmalıdır.
- Bu örnekte $|H_{m+1}| = |H_2| > 0$ olduğundan bu koşul sağlanmıştır.
- Bu örnek için $|H_3|, |H_4|, \ldots$ değerleri tanımlı değildir.

Statik Optimizasyon Örnekleri

- **Örnek 1: Tüketim ve Boş Zaman Kararları**
- Bir tüketicinin tüketim (c) ve boş zamandan (l) fayda sağladığını varsayalım.
- Tüketicinin toplam 1 birim zamanı olsun. Bu zamanı boş zaman (l) ve çalışmaya (1-l) ayırmaktadır.
- Çalışılan birim zaman başına kazanılan ücret w olarak ifade edilmektedir.
- Tüketim malının fiyatı 1 olsun.
- Tüketicinin fayda fonksiyonu $\alpha_c \log(c) + \alpha_l \log(l)$ şeklindedir. Burada $\alpha_c, \alpha_l > 0$.
- Bu durumda problemi şu şekilde yazabiliriz:
- $$\max_{c,l} \alpha_c \log(c) + \alpha_l \log(l)$$
- s.t.
$$c \leq w(1-l)$$
- Fayda fonksiyonu c'de kesin artan olduğu için kısıtı eşitlik halinde yazabiliriz:
- $$c = w(1-l)$$

Kısıtlı Optimizasyon: Eşitlik Kısıtları Altında Optimizasyon

Örnek 1 Devamı: Tüketim ve Boş Zaman Kararları

- Lagrange fonksiyonu:
$$L = \alpha_c \log(c) + \alpha_l \log(l) + \lambda(w(1-l) - c)$$
- F.0.C. w.r.t. c: $\alpha_c / c = \lambda$
- F.0.C. w.r.t. l: $\alpha_l / l = \lambda w$
- F.0.C. w.r.t. λ : $w(1-l) = c$
- İlk iki koşuldan
$$c = \frac{lw\alpha_c}{\alpha_l}$$
elde edilir.
- Bu sonucu bütçe kısıtında yani $c = w(1-l)$ denkleminde kullanır ve l için çözersek:
- $l = \frac{\alpha_l}{\alpha_c + \alpha_l}$.
- l değerini parametreler cinsinden ifade ettikten sonra bu değeri $c = \frac{lw\alpha_c}{\alpha_l}$ denkleminde yerine yazarak c degerini de parametreler cinsinden elde edebiliriz.

Kısıtlı Optimizasyon: Eşitlik Kısıtları Altında Optimizasyon

Örnek 2: CES Fayda Fonksiyonu için (2 mallı durum: x_1 ve x_2) Talep Fonksiyonunun Elde Edilmesi

- CES: Sabit İkame Esnekliği (Constant Elasticity of Substitution)
- $$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) = \left(x_1^{\frac{\theta-1}{\theta}} + x_2^{\frac{\theta-1}{\theta}} \right)^{\frac{\theta}{\theta-1}}$$
- s.t.
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = y$$
- $\theta > 1$: İki mal arasındaki ikame oranı. θ arttıkça ikame oranı artıyor. $\theta \longrightarrow \infty$ Tam ikame.
- $\rho = \frac{\theta-1}{\theta}$ dersek:
- $$L = \left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} + \lambda(y - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$
- FOCs:
- $$\frac{\partial L}{\partial x_1} : \frac{1}{\rho}\left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1} \rho x_1^{\rho-1} = \lambda p_1$$
- $$\frac{\partial L}{\partial x_2} : \frac{1}{\rho}\left(x_1^{\rho} + x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}-1} \rho x_2^{\rho-1} = \lambda p_2$$
- $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} : y = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

Örnek 2 Devamı

- İlk iki birinci sıra koşulunu denklemi birbirine oranlarsak:
- $$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1} = \frac{p_1}{p_2}$$
- Buradan,
$$x_1 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} x_2$$
- Bu sonucu 3. koşulda yani bütçe kısıtında $y = p_1 x_1 + p_2 x_2$ yerine yazarsak:
- $$y = p_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} x_2 + p_2 x_2$$
- x_2 için çözersek:
- $$x_2 = \frac{y}{p_2 + p_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}}$$
- Düzenlersek ve $\frac{\rho}{\rho-1} = 1-\theta$ ve $\frac{1}{\rho-1} = -\theta$ eşitliğini kullanırsak:
- $$x_2 = y \frac{p_2^{-\theta}}{p_1^{1-\theta} + p_2^{1-\theta}}$$
- Benzer şekilde: $x_1 = y \frac{p_1^{-\theta}}{p_1^{1-\theta} + p_2^{1-\theta}}$ olur.

Örnek 3: CES Fayda Fonksiyonu için (sonsuz mallı durum) Talep Fonksiyonunun Elde Edilmesi

- Bu durum "Dixit-Stiglitz talep fonksiyonu" olarak da adlandırılır.
- $$\max_{x(i)} \left(\int_0^1 x(i)^{\frac{\theta-1}{\theta}} di \right)^{\frac{\theta}{\theta-1}}$$
- s.t.
$$\int_0^1 p(i)x(i)di = y$$
- $[0,1]$ aralığında sonsuz mal var (continuum of goods).
- $i \in [0,1]$ her bir malı, $x(i)$ i malı miktarını, $p(i)$ i malının fiyatını ve y geliri göstermektedir.
- Çeşitlilik Zevki (Taste of Variety): Malların tüketim miktarı yanı sıra farklı mal tüketiminden de fayda sağlanıyor.
- $\theta > 1$: Mallar arasındaki ikame oranı. Tüm mallar için aynıdır. θ arttıkça ikame oranı artıyor. $\theta \longrightarrow \infty$ Tam ikame.
- $\rho = \frac{\theta-1}{\theta}$ dersek,
- $$Ł = \left(\int_0^1 x(i)^{\rho} di \right)^{\frac{1}{\rho}} + \lambda \left(y - \int_0^1 p(i)x(i)di \right)$$
- F.O.C. (Herhangi bir i malına göre türev alalım):
- $$\frac{\partial L}{\partial x(i)} : \frac{1}{\rho} \left(\int_0^1 x(i)^{\rho} di \right)^{\frac{1}{\rho}-1} \rho \left(x(i)\right)^{\rho-1} = \lambda p(i)$$
- $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} : y = \int_0^1 p(i)x(i)di$$

Örnek 3 Devamı

- Birinci sıra koşulunu herhangi iki mal için (a ve b) birbirine oranlayalım:
- $$\left(\frac{x(a)}{x(b)}\right)^{\rho-1} = \frac{p(a)}{p(b)}$$
- Buradan
$$x(a) = \left(\frac{p(a)}{p(b)}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} x(b)$$
- Şimdi yukarıdaki ifadenin her iki yanını $p(a)$ ifadesi ile çarpalım:
- $$x(a)p(a) = p(a)^{\frac{\rho}{\rho-1}} x(b)p(b)^{\frac{1}{1-\rho}}$$
- Şimdi de bu ifadenin her iki tarafının $[0, 1]$ aralığında a üzerinden integralini alalım:
- $$\int_0^1 x(a)p(a)da = \int_0^1 p(a)^{\frac{\rho}{\rho-1}} da \;\; x(b)p(b)^{\frac{1}{1-\rho}}$$
- $\int_0^1 x(a)p(a)da = y$ eşitliğini kullanırsak:
- $$y = \int_0^1 p(a)^{\frac{\rho}{\rho-1}} da \;\; x(b)p(b)^{\frac{1}{1-\rho}}$$
- Burada $\frac{\rho}{\rho-1} = 1-\theta$ ve $\frac{1}{1-\rho} = \theta$ eşitliklerini kullanırsak:

Örnek 3 Devamı

- $$y = \int_0^1 p(a)^{1-\theta} da \;\; x(b)p(b)^{\theta}$$
- $(\int_0^1 p(a)^{1-\theta} da)^{\left(\frac{1}{1-\theta}\right)}$ ifadesini ekonomideki toplulaştırılmış bir fiyat endeksi (P) gibi tanımlayabiliriz.
- Yani, P bir ekonomideki tüm malların fiyatlarından oluşan genel fiyat endeksi olarak düşünülebilir.
- Bu durumda
$$y = P^{1-\theta} x(b)p(b)^{\theta}$$
- Son olarak ifadeyi $x(b)$ için çözelim. Bu çözümün herhangi bir mal için olduğunu bildiğimizden bu sonucu genelleyerek $x(i)$ ifadesini şu şekilde yazabiliriz:
- $$x(i) = y \frac{p(i)^{-\theta}}{P^{1-\theta}}$$

Örnek 3 Devamı

- $$x(i) = y\frac{p(i)^{-\theta}}{P^{1-\theta}}$$

- Bu sonucu yorumlarsak $(\theta > 1)$ varsayımı altında **diğer değişkenler sabitken**:
- Gelirin yani y'nin artması, i malının talebini $x(i)$ artırır.
- Malın kendi fiyatının $p(i)$ artması, i malının talebini $x(i)$ azaltır.
- Ekonomideki genel fiyat düzeyinin (P) artması , i malının talebini $x(i)$ artırır, çünkü i malının göreli fiyatı düşer.

Örnek 4: Quasi-linear Fayda Fonksiyonu için Talep Fonksiyonunun Elde Edilmesi

- İki mal olduğunu düşünelim: c_1 ve c_2.
- Fayda fonksiyonu ise şu şekilde olsun:
- $$\max_{c_1, c_2} U(c_1, c_2) = f(c_1) + c_2$$
- s.t.
$$p_1 c_1 + p_2 c_2 = w$$
- Burada $f'(c_1) > 0$ ve $f''(c_1) < 0$ yani f fonksiyonu kesin konkavdır **(marjinal fayda azalan)**. c_2 ise doğrusal bir şekilde fayda fonksiyonuna dahil olduğu için **(marjinal fayda sabit)** U fonksiyonu quasi-linear adını alır.
- Bu problemin çözümü için Lagrange fonksiyonunu yazalım:
- $$L(c_1, c_2, \lambda) = f(c_1) + c_2 + \lambda(w - p_1 c_1 - p_2 c_2)$$
- c_1 ve c_2 için sırası ile FOC:
- c_1'e göre: $f'(c_1) - \lambda p_1 = 0$
- c_2'ye göre: $1 - \lambda p_2 = 0$ yani $\lambda = 1/p_2$ olur.
- Daha sonra bu ifadeyi $f'(c_1) - \lambda p_1 = 0$ denkleminde yerine yazarsak:
- $f'(c_1) - p_1/p_2 = 0$ sonucu elde edilir.
- Buradaki dikkat çekici sonuç c_1 ifadesinin w'dan yani gelirden bağımsız olmasıdır.
- c_1 malının optimal tüketimi sağlandıktan sonra gelir ne kadar artarsa artsın bu gelir artışı sadece 2. malın tüketimi için kullanılmaktadır. Yani $c_2 = \frac{w - p_1 c_1}{p_2}$ olarak hesaplanabilir.

Kısıtlı durumda Zarf Teoremi

Kısıtlı durumda Zarf Teoremi

- $f(x; a)$ gibi bir fonksiyonda $x = (x_1, ..., x_n)$ n değişkenli bir vektör ve a bir parametre olsun.
- $g_1(x; a), ..., g_m(x; a)$ fonksiyonları da m tane kısıtı göstersin.
- $x^*(a)$ değeri de optimal nokta olsun (min ya da max).
- Bu durumda
$$\frac{\partial f(x^*(a); a)}{\partial a} = \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)_{x=x^*(a), \lambda=\lambda^*(a)}$$
- Çünkü a parametresinin x, y ve λ değişkenleri üzerinde yaratacağı etki $f(x^*(a); a)$ fonksiyonu maksimumda değerlendirildiği için sıfırdır.
- Dolayısıyla a parametresi dolaylı yoldan L fonksiyonunu etkilemez, sadece direkt olarak L'yi etkiler.

Kısıtlı durumda Zarf Teoremi

Örnek

- $$\max_{x,y} f(x, y; a) = x + 3y$$
- s.t.
$$g(x, y; a) = x^2 + ay^2 = 10$$
- Soru: a arttıkça f'in optimal değeri nasıl değişir? Yani $\frac{\partial f(x^*(a), y^*(a); a)}{\partial a}$ =?
- $$L = x + 3y + \lambda[10 - x^2 - ay^2]$$
- $$\frac{\partial f(x^*(a), y^*(a); a)}{\partial a} = \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)_{x=x^*(a), y=y^*(a), \lambda=\lambda^*(a)} = -\lambda y^2 < 0$$
- λ ve y^2 alternatif tüm değerleri için pozitiftir.
- Sonuç olarak a'nın artması f'in optimal değerini azaltmaktadır (Kısıt eşitlik halinde olduğu için $\lambda > 0$).
- Önemli Not:Genel bir Lagrange fonksiyonunda b sabiti ile L değerinin nasıl değiştiğini zarf teoremini kullanarak bulabiliriz:
- $$\left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)_{x=x^*, \lambda=\lambda^*} = \lambda$$
- Bu bir fayda fonksiyonu örnegi olsa idi b yani gelirdeki 1 birim artışın optimal fayda düzeyini Lagrange çarpanı değeri kadar artıracağını göstermiş olduk.

Düalite (İkililik)

Düalite (İkililik)

- Birincil problem (fayda maksimizasyonu):
- $$\max_{x,y} U(x, y)$$
- s.t. $$p_x x + p_y y = M$$
- probleminde U^* optimal değer ve λ ilgili problemin Lagrange çarpanı olsun.
- Bu problemin ikincil problemini (harcama (E) minimizasyonu) şu şekilde yazabiliriz:
- $$\min_{x,y} E = p_x x + p_y y$$
- s.t. $$U(x, y) = U^*$$
- μ ilgili problemin Lagrange çarpanı olsun.
- Bu durumda optimal x ve y değeleri her iki problemde de eşit olur. Lagrange çarpanları ise birbirinin tersi olur:
- $$\lambda = \frac{1}{\mu}$$

Kısıtlı Optimizasyon

Eşitlik kısıtları altında optimizasyonu inceledik.
Şimdi de

- Eşitsizlik Kısıtları Altında Optimizasyon: Karush-Kuhn-Tucker (KKT) Yöntemini

inceleyeceğiz.

Kısıtlı Optimizasyon

Eşitsizlik Kısıtları Altında Optimizasyon: Karush-Kuhn-Tucker Yöntemi

- Birçok iktisadi modelde $g_j(x_1, \ldots, x_n) \leq b_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ şeklinde eşitsizlik kısıtları vardır (m tane).
- **Karush-Kuhn-Tucker Yöntemi (KKT) (maksimizasyon problemi ve $\leq$ durumunda):**
- $$\max_{x_1, \ldots, x_n} f(x_1, \ldots, x_n)$$
- s.t.
$$g_j(x_1, \ldots, x_n) \leq b_j$$

$j = 1, \ldots \underbrace{m}_{\text{kisit sayisi}}$; $i = 1, \ldots \underbrace{n}_{\text{degisken sayisi}}$

Kısıtlı Optimizasyon

KKT Yöntemi için Koşullar:

- Lagrange fonksiyonu şu şekilde olur:

$$L(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [b_j - g_j(x_1, \ldots, x_n)]$$

- Koşullar:
- $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n.$
- $g_j(x_1, \ldots, x_n) \leq b_j.$
- $$\underbrace{\lambda_j \geq 0.}$$

  $\lambda_j > 0 \Longrightarrow$ ilgili kisitin esitlik halinde oldugunu gosterir
- $\lambda_j [g_j(x_1, \ldots, x_n) - b_j] = 0 \ \forall j = 1, \ldots, m.$

Önemli Notlar:

1. $\lambda_j[g_j(x_1,\ldots,x_n)-b_j]=0$ kısıtında ya $\lambda_j=0$ ya $g_j(x_1,\ldots,x_n)=b_j$ eşitligi ya da uç bir durumda her ikisi de sağlanabilir.
2. Minimizasyon probleminde amaç fonksiyonu f, - ile çarpılarak maksimizsayon probleminde anlatılan tüm işlemler uygulanabilir. (min f= max - f olduğundan)
3. $\geq$ kısıtlarında ise kısıt -1 ile çarpılarak $\leq$ durumuna getirilir ve anlatılan tüm işlemler aynen uygulanabilir.
4. KKT yöntemi bazen 1'den fazla durum için geçerli sonuçlar verebilir. Bu durumda elde edilen sonuçlar amaç fonksiyonunda yerine konurak hangi değerlerin daha büyük veya daha küçük sonuç verdiği tespit edilerek nihai sonuca ulaşılır.

Kısıtlı Optimizasyon

Örnek 1:

- $\max_x -(x-2)^2$ (konkav bir fonksiyon)
- s.t. $x \geq 1$ (ya da $-x \leq -1$)
- $$L = -(x-2)^2 + \lambda(-1-(-x))$$
- KKT koşulları şöyle ifade edilir:

1. $L_x : -2(x-2) + \lambda = 0.$
2. $-x \leq -1.$
3. $\lambda \geq 0.$
4. $\lambda(-x-(-1)) = 0.$

- İki durum olabilir: $\lambda = 0$ ya da $\lambda > 0$.
- İlk durum olursa (yani $\lambda = 0$) 1. koşuldan $x = 2$ olur.
- $x = 2$ iken 4. koşula göre $\lambda = 0$ olmalıdır.
- Bu 2 bilgiye göre çözüm $(x^*, \lambda^*) = (2, 0)$ olur.
- İkinci durum yani $\lambda > 0$ durumu (4. koşuldan) $x = 1$ olduğunu ifade eder.
- $x = 1$ bilgisi ve 1. koşula göre $\lambda = -2$ olur ve 3. koşulla ile ilgili bir çelişki oluştuğundan bu durum sonuç olamaz.
- Dolayısıyla çözüm kümesi $(x^*, \lambda^*) = (2, 0)$ olur.

Kısıtlı Optimizasyon

Örnek 2:

- $\max_x -(x-2)^2$ (konkav bir fonksiyon)
- s.t. $x \geq 3$ (ya da $-x \leq -3$)
- $$L = -(x-2)^2 + \lambda(-3 - (-x))$$
- KKT koşulları şöyle ifade edilir:
  1. $L_x : -2(x-2) + \lambda = 0.$
  2. $-x \leq -3.$
  3. $\lambda \geq 0.$
  4. $\lambda(-x - (-3)) = 0.$
- İki durum olabilir: $\lambda = 0$ ya da $\lambda > 0$.
- İlk durum olursa (yani $\lambda = 0$) 1. koşuldan $x = 2$ olur.
- $x = 2$ sonucu $x \geq 3$ yani 2. koşul ile çelişir. Bu nedenle $(x^*, \lambda^*) = (2, 0)$ çözüm olamaz.
- İkinci durum yani $\lambda > 0$ durumu 4. koşuldan $x = 3$ olduğunu ifade eder.
- $x = 3$ bilgisi ve 1. koşuldan $\lambda = 2$ olur ve koşullarla ile ilgili bir çelişki oluşmaz.
- Dolayısıyla çözüm kümesi $(x^*, \lambda^*) = (3, 2)$ olur.

Kısıtlı Optimizasyon

Örnek 1 ve 2 Hakkında Not:

- Bu iki örneğin orta noktasında yani kısıt $x \geq 2$ olsa idi optimal çözüm $(x^*, \lambda^*) = (2, 0)$ olur idi.
- Sadece $x = 2$ noktasında gerçekleşecek bu uç örneğe göre kısıtlık eşitlik halinde sağlandığı halde $\lambda = 0$ olur.

Kısıtlı Optimizasyon

Örnek 3:

- $\max_{x_1, x_2} -x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2$
- s.t. $x_1 - 2x_2 \leq -1$
- $2x_1 + x_2 \leq 2$
- $$L = -x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2 + \lambda_1(-1 - x_1 + 2x_2) + \lambda_2(2 - 2x_1 - x_2)$$
- KKT koşulları şöyle ifade edilir:
  1. $L_{x1} : -2x_1 - x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0;$
     $L_{x2} : -x_1 - 2x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
  2. $x_1 - 2x_2 \leq -1;\ 2x_1 + x_2 \leq 2$
  3. $\lambda_1 \geq 0;\ \lambda_2 \geq 0$
  4. $\lambda_1(x_1 - 2x_2 + 1) = 0;\ \lambda_2(2x_1 + x_2 - 2) = 0$
- 4 durum olabilir:
- 1. durum: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
- 1. koşuldan $x_1^* = x_2^* = 0$ olur ve 2. koşuldaki 1. kısıt $(x_1 - 2x_2 \leq -1)$ ile çelişir.
- 2. durum: $\lambda_1 > 0$ ve $\lambda_2 > 0$.
- Bu durumda kısıtlar eşitlik halini alır (4. koşuldan) ve iki kısıtın birlikte çözümünden $x_1^* = 3/5$ ile $x_2^* = 4/5$ elde edilir. Bu sonuçlar FOC ile çelişir.
- **3. durum (ÇÖZÜM):** $\lambda_1 > 0$ ve $\lambda_2 = 0$.
- $\lambda_1 > 0$, 1. kısıtın eşitlik halinde yazılacağını söyler. 1. kısıt ve FOC sonuçları birlikte çözüldüğünde $x_1^* = -4/14$, $x_2^* = 5/14$ ve $\lambda_1^* = 3/14$ sonuçları elde edilir.
- 4. durum: $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 > 0$.
- $\lambda_2 > 0$, 2. kısıtın eşitlik halinde yazılacağını söyler. 2. kısıt ve FOC sonuçları birlikte çözüldüğünde $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$ ve $\lambda_2 = -1$ ve çelişki yaratır.