Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

AÜ SBF İktisat Bölümü

Fark Denklemleri

Fark denklemleri kesikli zaman için kullanılır.

- Bir değişken için iki dönem arasındaki değer farkını kısaca Δy_t ile gösterebiliriz:

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t.$$

- 1. dereceden fark denklemi: $y_{t+1} = c_1 y_t + c_2$ $(c_1, c_2 \in \Re)$
- 2. dereceden fark denklemi: $y_{t+2} = c_1 y_{t+1} + c_2 y_t + c_3$ $(c_1, c_2, c_3 \in \Re)$
- n. dereceden fark denklemi:
  $y_{t+n} = c_1 y_{t+n-1} + c_2 y_{t+n-2} + \ldots + c_{n+1}$
  $(c_1, c_2, \ldots, c_{n+1} \in \Re)$

1. dereceden fark denkleminin çözümü:

- $$y_{t+1} + ay_t = c \quad (a, c \in \Re \text{ sabit})$$
- Fark denklemini 2 kısma ayırarak çözeceğiz.
- $$\underbrace{y_G}_{\text{Genel çözüm}} = \underbrace{y_C}_{\text{tamamlayıcı çözüm}} + \underbrace{y_P}_{\text{özel çözüm}}$$
- y_c, (tamamlayıcı çözüm) homojen kısmın çözümüdür ($y_{t+1} + ay_t = 0$). Bu çözüm, dengeden sapmaları gösterir.
- y_P, homojen olmayan kısmın çözümüdür. Denge değerini gösterir.
- $y_G = y_c + y_P$.
- y_G, yani genel çözümü "belirli" hale getirmek için y_0 gibi bir başlangıç degeri kullanılır.

$y_{t+1} + ay_t = c$ **denkleminin çözümünü 4 adımda yapacağız:**

- **1.adım:** y_c'nin bulunuşu:

$$y_{t+1} + ay_t = 0$$

- Şimdi $y_t = Ab^t (\neq 0)$ gibi genel bir çözüm deneyelim.
- Bu durumda $y_{t+1} = Ab^{t+1}$ olur.
- Bu bilgileri çözmek istediğimiz ana denkleme yerleştirirsek;

$$Ab^{t+1} + aAb^t = 0 \Longrightarrow Ab^t(b+a) = 0 \Longrightarrow b = -a \text{ olur.}$$

- Bu durumda $y_c = A(-a)^t$ olur.

y_P'nin bulunuşu:

- **2.adım:** Özel çözüm içinde $y_t = k$ şeklinde bir çözüm deneyelim.
- Bu durumda $y_{t+1} = k$ olur.
- Bu değerleri $y_{t+1} + ay_t = c$ denklemine yerleştirirsek;

$$k + ak = c \Longrightarrow k(1+a) = c \Longrightarrow k = \frac{c}{1+a} \quad \text{eger} \quad a \neq -1$$

- Bu durumda $y_P = \frac{c}{1+a}$ olur ($a \neq -1$ ise).
- Eğer $a = -1$ ise $\frac{c}{1+a}$ tanımsız olacağından, y_P icin $y_t = kt$ gibi bir çözüm denenir.
- Bu durumda ise $y_{t+1} = k(t+1)$ olur.
- Bu değerleri $y_{t+1} + ay_t = c$ denklemine yerleştirirsek:

$$k(t+1) + akt = c \Longrightarrow k(t+1+at) = c \Longrightarrow k = \frac{c}{t+1+at} \Longrightarrow k = c \Longrightarrow y_p = ct.$$

Fark Denklemleri

y_G'nin bulunuşu:

- **3.adım:** $y_G = y_t = y_c + y_P \Longrightarrow$

$$y_G = y_t = A(-a)^t + \frac{c}{1+a} \quad \text{eger} \quad a \neq -1$$

$$y_G = y_t = A + ct \quad \text{eger} \quad a = -1$$

Fark Denklemleri

4.adım: Belirli çözümün bulunuşu:

- $t = 0$ zamanındaki y_0 başlangıç değeri kullanılarak A sabitinin degeri bulunur.
- Eğer $a \neq -1$ ise

$$y_0 = A(-a)^0 + \frac{c}{1+a} \implies A = y_0 - \frac{c}{1+a}$$

- Eğer $a = -1$ ise

$$y_0 = A + (c)0 \implies A = y_0$$

- y değişkeninin zaman patikasını bulmuş olduk:
- Eğer $a \neq -1$ ise

$$y_t = \underbrace{\left(y_0 - \frac{c}{1+a}\right)(-a)^t}_{\text{zaman patikasindan sapmalar}} + \underbrace{\frac{c}{1+a}}_{\text{Denge degeri}}$$

- Eğer $a = -1$ ise

$$y_t = y_0 + ct$$

- Böylece y değişkeni için zaman patikasını (herhangi bir t zamanındaki y değişkenin alacağı değeri) hesaplamış olduk.

Örnek: $y_{t+1} + 2y_t = 3 \ (y_0 = 4)$

- **1. adım:** y_c denklemini bulalım.
- y_c için $y_t = Ab^t$ çözümünü deneyelim.
- $$Ab^{t+1} + 2Ab^t = 0 \quad \text{(Homojen kisim)} \implies$$
  $$Ab^t(b+2) = 0 \implies b = -2 \implies y_c = A(-2)^t$$
- **2. adım:** y_P'yi bulalım.
- y_P için $y_t = k$ çözümünü deneyelim.
- Bu durumda $y_{t+1} = k$ olur.

$$k + 2k = 3 \implies k = 1 \implies y_p = 1$$

- **3. adım:** $y_G = A(-2)^t + 1$
- **4. adım:** $y_0 = A(-2)^0 + 1 = 4 \implies y_0 = A + 1 = 4 \implies A = 3 \implies$

$$y_t = 3(-2)^t + 1$$

Dengenin Dinamik İstikrarı: Kararlı ve Kararsız Denge

- Dengenin istikrarı yani kararlı denge $\Longleftrightarrow$ $t \longrightarrow \infty$ iken $y_c = Ab^t \longrightarrow 0$ olmasıdır.
- Bir başka deyişle dengeden sapmaların yani tamamlayıcı çözümün zamanla 0'a gitmesidir.
- Burada A terimi zaman patikasının temel görünümünü bozmadan sadece bir ölçek etkisi yaratır.
- İstikrar için b terimi önemlidir.
- **Önerme:**

$$|b| > 1 \Longrightarrow \quad \text{ıraksak yani kararsız denge}$$

$$|b| < 1 \Longrightarrow \quad \text{yakınsak yani kararlı denge}$$

Ekonomik Uygulama: Örümcek Ağı Modeli (The Cobweb model)

- **Örnek:**

$$Q_{st} = S(P_{t-1}) = -\gamma + \delta P_{t-1} \quad \gamma, \delta > 0$$

$$Q_{dt} = D(P_t) = \alpha - \beta P_t \quad \alpha, \beta > 0$$

- Denge için çözersek ($Q_{st} = Q_{dt}$ eşitliğinden) aşağıda verilen 1. sıradan fark denklemini elde ederiz:
- $$P_t + \frac{\delta}{\beta} P_{t-1} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$
- 1. sıradan bu fark denkleminin çözümünü şu şekilde (P_0 başlangıç koşulu ile birlikte) elde ederiz:
- $$P_t = \left(P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \right) \left(-\frac{\delta}{\beta} \right)^t + \underbrace{\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}}_{y_p = \text{Denge düzeyi}}$$
- 2 önemli nokta:
- Fiyat için denge değeri: $\overline{P} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$. Bu değer sabit olduğundan denge durağandır.
- $|b| = |-\frac{\delta}{\beta}|$ ifadesinin değerine göre denge ya yakınsak ya da ıraksak olur. $\delta > \beta \implies$ ıraksak, $\delta < \beta$ yakınsak.

Fark Denklemleri

2. Derece Fark Denkleminin Çözümü:

- $$y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c \qquad (a_1, a_2, c \in \Re \text{ sabit})$$

  1.adım: y_c'nin bulunuşu: $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = 0$ denkleminin çözümü için $y_t = Ab^t (\neq 0)$ ifadesini kullanalım. Bu durumda $y_{t+1} = Ab^{t+1}$ ve $y_{t+2} = Ab^{t+2}$ olur.
- Bu değerleri ana denklemde yerine yazar ve Ab^t parantezine alırsak:

$$Ab^t(b^2 + a_1 b + a_2) = 0 \Longrightarrow (b^2 + a_1 b + a_2) = 0 \Longrightarrow b_1, b_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

- Burada 3 durum söz konusudur:
- i)$a_1^2 > 4a_2$ (farklı reel kökler: $b_1 \neq b_2$)

$$y_c = A_1 b_1^t + A_2 b_2^t$$

- ii)$a_1^2 = 4a_2$ (tekrarlayan reel kökler: $b_1 = b_2$)
- $$y_c = A_3 b^t + A_4 t b^t$$
- iii)$a_1^2 < 4a_2$ (karmaşık kökler) Bu durumla ilgilenmeyeceğiz.

2. Adım:

- y_p için $y_t = k$ genel çözümünü deneyelim. Bu durumda $y_{t+2} = y_{t+1} = k$ olur.
- Bu bilgileri $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = c$ denkleminde yerine yazarsak:
- $$k + a_1 k + a_2 k = c \quad \Rightarrow k = \frac{c}{1 + a_1 + a_2} \quad \text{eğer} \quad a_1 + a_2 \neq -1$$
- $$y_p = \frac{c}{1 + a_1 + a_2} \quad a_1 + a_2 \neq -1$$
- $a_1 + a_2 = -1$ ise $y_t = kt$ denenir. Bu durumda $y_p = \frac{ct}{a_1+2}$ (eğer $a_1 + a_2 = -1$ ve $a_1 \neq -2$ ise)
- $a_1 + a_2 = -1$ ve $a_1 = -2$ ise $y_t = kt^2$ denenir. Bu durumda $y_p = \frac{ct^2}{2}$ olur.
- **3.adım:** $y_G = y_c + y_p$
- **4.adım:** y_0 ve y_1 gibi 2 tane baslangıç koşulu kullanılarak belirli çözüm bulunur.

Fark Denklemleri

Örnek:

- $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 12 \;\; (y_0 = 4, y_1 = 5)$
- **1.adım:** y_c ='nin bulunuşu: $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 0$'nin çözümü için $y_t = Ab^t (\neq 0)$ ifadesini kullanalım. Bu durumda $y_{t+1} = Ab^{t+1}$ ve $y_{t+2} = Ab^{t+2}$ olur. Bu değerler ana denklemde yerine yazılırsa:
- $$Ab^t(b^2 + b - 2) = 0 \Longrightarrow (b^2 + b - 2) = 0 \Longrightarrow b_1, b_2 = \{-2, 1\} \Longrightarrow$$
  $$y_c = A_1(-2)^t + A_2(1)^t$$
- **2.adım:** y_p için $y_t = tk$ genel çözümünü deneyelim (çünkü $a_1 + a_2 = -1$ ve $a_1 \neq -2$)
- $$k(t+2) + k(t+1) - 2kt = 12 \Rightarrow k = 4$$
  $$y_p = 4t$$
- **3.adım:** $y_G = A_1(-2)^t + A_2(1)^t + 4t$
- **4.adım:** $y_0 = A_1 + A_2 = 4$ ve $y_1 = A_1(-2) + A_2 + 4 = 5$ gibi 2 denklem çözülerek $A_1 = 1$ ve $A_2 = 3$ bulunur.
- Yani, y'nin zaman patikası şu şekildedir:

$$y_t = (-2)^t + 3 + 4t$$

Dengenin İstikrarı:

- Dengenin istikrarı $\Longleftrightarrow t \longrightarrow \infty$ iken $y_c \longrightarrow 0$ olması
- **Önerme:** Köklerin her ikisinin de mutlak değerinin 1'den küçük olması $(|b_1|, |b_2| < 1)$ durumunda denge yakınsaktır. Aksi durumda denge ıraksaktır.
- Tekrarlayan kök durumunda tek kökün mutlak değerinin 1'den küçük olması gerekir $(|b| < 1)$.

Değişken Terime Sahip Fark Denklemlerinin Çözümü:

- 2 durum inceleyeceğiz.
- i) $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = cm^t$
- ii) $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = ct^n$
- Not: Her iki durumda da sadece y_p çözümü etkilenecektir. y_c çözümü ise tamamen aynı kalacaktır.

Fark Denklemleri

Özel Durumlar:

- **1.durum:** $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = cm^t$
- y_p için $y_t = Bm^t$ $(\neq 0)$ özel çözümü denenir.
- Bu durumda $y_{t+2} = Bm^{t+2}$ ve $y_{t+1} = Bm^{t+1}$ olur.
- $$Bm^{t+2} + a_1 Bm^{t+1} + a_2 Bm^t = cm^t \implies B = \frac{c}{m^2 + a_1 m + a_2}$$
- $$y_p = \frac{cm^t}{m^2 + a_1 m + a_2} \quad \text{eğer} \quad m^2 + a_1 m + a_2 \neq 0$$
- Eğer $m^2 + a_1 m + a_2 = 0$ ise $y_t = Btm^t$, bu da çalışmaz ise $y_t = Bt^2 m^t$ denenir.
- **2.durum:** $y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_2 y_t = ct^n$
- y_p için $y_t = B_0 + B_1 t + B_2 t^2$ denenir. Çalışmaz ise $y_t = t(B_0 + B_1 t + B_2 t^2)$ denenir.

Örnek:

- $y_{t+2} + 5y_{t+1} + 2y_t = t^2$
- y_p için $y_t = B_0 + B_1 t + B_2 t^2$ çözümünü deneyelim.
- Bu durumda y_t ile birlikte y_{t+1} ve y_{t+2} değerleri de soruda verilen ana denkleme yerleştirir ve ilgili terimleri bir araya toplarsak:
- $$\underbrace{(8B_0 + 7B_1 + 9B_2)}_{=0} + \underbrace{(8B_1 + 14B_2)}_{=0}t + \underbrace{(8B_2)}_{=1}t^2 = t^2$$
- Yukarıdaki 3 eşitlik çözülerek şu sonuçlar elde edilir:
- $B_0 = \frac{13}{256}$, $B_1 = \frac{-7}{32}$ ve $B_2 = \frac{1}{8}$.
- Bu durumda,
$$y_p = \frac{13}{256} - \frac{7}{32}t + \frac{1}{8}t^2$$