

Matematik I

Doç. Dr.  
Türkmen  
Göksel

Eş anlı  
Fark&Diferansiyel  
Denklemler ve  
Sistemleri ve  
Faz  
Diyagramları

# Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

AÜ SBF İktisat Bölümü

# Matematik I

Matematik I

Doç. Dr.  
Türkmen  
Göksel

Eş anlı  
Fark&Diferansiyel  
Denklemler ve  
Faz  
Diyagramları

## 1 Eş anlı Fark&Diferansiyel Denklemler ve Faz Diyagramları

# Eş anlı Fark Denklem Sistemleri

Matematik I

Doç. Dr.  
Türkmen  
Göksel

Eş anlı  
Fark&Diferansiyel  
Denklemler ve  
Sistemleri ve  
Faz  
Diyagramları

## Eş Anlı Fark Denklem Sistemlerinin Çözümü:

### ■ Örnek 1:

$$x_{t+1} + x_t + 2y_t = 24$$

$$y_{t+1} + 2x_t - 2y_t = 9$$

$$x_0 = 10; y_0 = 9$$

### ■ Matris formunda yazarsak:

■

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_l \underbrace{\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix}}_u + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_K \underbrace{\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}}_v = \underbrace{\begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix}}_d$$

■

$$lu + Kv = d$$

# Eş anlı Fark Denklem Sistemleri

Matematik I

Doç. Dr.  
Türkmen  
Göksel

Eş anlı  
Fark&Diferansiyel  
Denklemler ve  
Faz  
Diyagramları

## Eş Anlı Fark Denklem Sistemlerinin Çözümü:

- **1.adım:** (Homojen kısım için) Tamamlayıcı çözüm için

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mb^t \\ nb^t \end{pmatrix} \neq 0$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mb^{t+1} \\ nb^{t+1} \end{pmatrix}$$

- Bu değerleri yerine yazarsak:

■

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} b^{t+1} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} b^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

■

$$b^t (bl + K) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\underbrace{|bl + K|}_{\text{karakteristik denklem}} = 0$  olan çözümü arıyoruz.

karakteristik denklem

# Eş anlı Fark Denklem Sistemleri

Matematik I

Doç. Dr.  
Türkmen  
Göksel

Eş anlı  
Fark&Diferansiyel  
Denklemler ve  
Faz  
Diyagramları

## Eş Anlı Fark Denklem Sistemlerinin Çözümü:

■

$$(bI + K) = \begin{pmatrix} b+1 & 2 \\ 2 & b-2 \end{pmatrix} \implies \begin{vmatrix} b+1 & 2 \\ 2 & b-2 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

■

$$b^2 - b - 6 = 0 \rightarrow b_1 = 3 \quad b_2 = -2 \quad \text{farklı kökler}$$

■ **Tamamlayıcı çözüm şu formda oluşacaktır.**

■  $x_c = m_1 b_1^t + m_2 b_2^t$

■  $y_c = n_1 b_1^t + n_2 b_2^t$

# Eş anlı Fark Denklem Sistemleri

Matematik I

Doç. Dr.  
Türkmen  
Göksel

Eş anlı  
Fark&Diferansiyel  
Denklemler ve  
Faz  
Diyagramları

## 1. adıma ilave:

- İlave adım olarak 1. kökü kullanarak  $m_1$  ile  $n_1$  arasındaki ilişkiyi ve benzer şekilde 2. kökü kullanarak da  $m_2$  ile  $n_2$  arasındaki ilişkiyi bulalım. Böylece bilinmeyen sayısı 4'ten 2'ye düşer.

- **1'. adım:**  $(bI + K) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  bilgisini kullanarak  $m_1$  ile  $n_1$  ve  $m_2$  ile  $n_2$  arasındaki ilişkiyi bulalım.

- $b_1 = 3$  için:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies -2m_1 = n_1 \implies$$

$m_1 = A_1$  olsun. Bu durumda  $n_1 = -2A_1$  olur.

- $b_2 = -2$  için:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \frac{m_2}{2} = n_2 \implies$$

$m_2 = A_2$  olsun. Bu durumda  $n_2 = \frac{A_2}{2}$  olur.

- Bulduğumuz sonuçları kullanarak tamamlayıcı çözümleri şu şekilde yazabiliriz:

- 

$$x_c = A_1(3)^t + A_2(-2)^t$$

$$y_c = -2A_1(3)^t + \frac{A_2}{2}(-2)^t$$

# Eş anlı Fark Denklem Sistemleri

Matematik I

Doç. Dr.  
Türkmen  
Göksel

Eş anlı  
Fark&Diferansiyel  
Denklemler ve  
Faz  
Diyagramları

2. adım:

- **2.adım:** Özel çözüm için  $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$  olsun.  $\bar{x}, \bar{y}$  sabit. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

- Bu değerleri sistemde yerine koyarsak:
- 

$$2\bar{x} + 2\bar{y} = 24$$

$$-\bar{y} + 2\bar{x} = 9$$

- Yukarıdaki denklemler çözülerek  $\bar{x} = 7$  ve  $\bar{y} = 5$  olur.
- **Önemli Not:**  $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$  çalışmaz ise  $\begin{pmatrix} \bar{x}_t \\ \bar{y}_t \end{pmatrix}$ , ... denenir.

# Eş anlı Fark Denklem Sistemleri

Matematik I

Doç. Dr.  
Türkmen  
Göksel

Eş anlı  
Fark&Diferansiyel  
Denklemler ve  
Sistemleri ve  
Faz  
Diyagramları

3. ve 4. adım:

- **3. adım:** Genel Çözüm=Tamamlayıcı Çözüm + Özel Çözüm

$$x_G = A_1(3)^t + A_2(-2)^t + 7$$

$$y_G = -2A_1(3)^t + \frac{A_2}{2}(-2)^t + 5$$

- **4. adım:**  $x_0 = 10$  ve  $y_0 = 9$  değerlerini kullanarak  $A_1$  ve  $A_2$ 'yi bulalım.

$$x_0 = A_1 + A_2 + 7 = 10$$

$$y_0 = -2A_1 + \frac{A_2}{2} + 5 = 9$$

- $\implies A_1 = -1, A_2 = 4 \implies$

$$x_t = -(3)^t + 4(-2)^t + 7$$

$$y_t = 2(3)^t + 2(-2)^t + 5$$

- $|b_1|, |b_2| > 1 \implies$  zaman patikası ıraksak.



# Eş anlı Diferansiyel Denklem Sistemleri

Matematik I

Doç. Dr.  
Türkmen  
Göksel

Eş anlı  
Fark&Diferansiyel  
Denklem  
Sistemleri ve  
Faz  
Diyagramları

Eş anlı Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü İçin Örnek:

■

$$\dot{x} + 2\dot{y} + 2x + 5y = 77$$

$$\dot{y} + x + 4y = 61$$

$$x(0) = 6; y(0) = 12$$

■ Matris formunda yazarsak:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_J \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}}_u + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_v = \underbrace{\begin{pmatrix} 77 \\ 61 \end{pmatrix}}_g$$

■

$$Ju + Mv = g$$

# Eş anlı Diferansiyel Denklem Sistemleri

Matematik I

Doç. Dr.  
Türkmen  
Göksel

Eş anlı  
Fark&Diferansiyel  
Denklem  
Sistemleri ve  
Faz  
Diyagramları

**Çözüm=Tamamlayıcı Çözüm + Özel Çözüm:**

- **1. adım:** (Homojen kısım için) Tamamlayıcı çözüm için  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} me^{rt} \\ ne^{rt} \end{pmatrix} \neq 0$  olsun. Bu durumda  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rme^{rt} \\ rne^{rt} \end{pmatrix}$  olur.
- Bu değerleri yerine yazarsak:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} re^{rt} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} e^{rt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

■

$$e^{rt}(rJ + M) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{|rJ + M|}_{\text{karakteristik denklem}} = 0$  olan çözümü arıyoruz.

$$(rJ + M) = \begin{pmatrix} r+2 & 2r+5 \\ 1 & r+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} r+2 & 2r+5 \\ 1 & r+4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

■

$$r^2 + 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = -1 \quad r_2 = -3 \quad \text{farklı kökler}$$

# Eş anlı Diferansiyel Denklemler Sistemi

Matematik I

Doç. Dr.  
Türkmen  
Göksel

Eş anlı  
Farklı Diferansiyel  
Denklemler ve  
Faz  
Diyagramları

## Önemli Not: Tamamlayıcı Çözüm:

■

$$x_c = m_1 e^{r_1 t} + m_2 e^{r_2 t}$$

$$y_c = n_1 e^{r_1 t} + n_2 e^{r_2 t}$$

- İlave adım olarak 1. kökü kullanarak  $m_1$  ile  $n_1$  arasındaki ilişkiyi ve benzer şekilde 2. kökü kullanarak  $m_2$  ile  $n_2$  arasındaki ilişkiyi bulalım. Böylece bilinmeyen sayısı 4'ten 2'ye düşsün.

- **1'. adım:**  $(rJ + M) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  bilgisini kullanarak  $m_1$  ile  $n_1$  ve  $m_2$  ile  $n_2$  arasındaki ilişkiyi bulalım. Kökler farklı olduğundan iki ilişki olacak.

- $r_1 = -1$  için:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies m_1 = -3n_1 \implies$$

$m_1 = A_1$  olsun. Bu durumda  $n_1 = -\frac{A_1}{3}$  olur.

- $r_2 = -3$  için:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies m_2 = -n_2 \implies$$

$m_2 = A_2$  olsun. Bu durumda  $n_2 = -A_2$  olur.

# Eş anlı Diferansiyel Denklemler Sistemi

Matematik I

Doç. Dr.  
Türkmen  
Göksel

Eş anlı  
Farklı Diferansiyel  
Denklemler Sistemi ve  
Faz  
Diyagramları

Yukarıdaki sonucu ve notu kullanarak bu örnek için tamamlayıcı çözümleri şu şekilde yazabiliriz:

■

$$x_c = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t}$$

$$y_c = -\frac{A_1}{3} e^{-t} - A_2 e^{-3t}$$

■ **2. adım:** Özel çözüm için  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$  olsun.  $\bar{x}, \bar{y}$  sabit. Bu durumda  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  olur.

■ Bu değerleri sistemde yerine koyarsak:

$$2\bar{x} + 5\bar{y} = 77$$

$$4\bar{y} + \bar{x} = 61$$

■ Bu durumda  $\bar{x} = 1$  ve  $\bar{y} = 15$  olur.

# Eş anlı Diferansiyel Denklem Sistemleri

Matematik I

Doç. Dr.  
Türkmen  
Göksel

Eş anlı  
Fark&Diferansiyel  
Denklem  
Sistemleri ve  
Faz  
Diyagramları

3. adım: Genel Çözüm= Tamamlayıcı Çözüm + Özel Çözüm:

■

$$x_G = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t} + 1$$

$$y_G = -\frac{A_1}{3} e^{-t} - A_2 e^{-3t} + 15$$

■ 4. adım:  $x(0) = 6$  ve  $y(0) = 12$  değerleri kullanarak  $A_1$  ve  $A_2$ 'yi bulalım.

■

$$x(0) = A_1 + A_2 + 1 = 6$$

$$y(0) = -\frac{A_1}{3} - A_2 + 15 = 12$$

$$\implies A_1 = 3, \quad A_2 = 2 \implies$$

■

$$x_G = 3e^{-t} + 2e^{-3t} + 1$$

$$y_G = -e^{-t} - 2e^{-3t} + 15$$

■ Not:  $r_1, r_2 < 0 \implies$  zaman patikası yakınsak.