Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

AÜ SBF İktisat Bölümü

1 Faz Diyagramları ve Taylor Açılımı

Eş anlı Diferansiyel Denklem Sistemleri

Eş anlı diferansiyel denklem sistemlerinin niteliksel analizi: İki degişkenli faz diyagramları:

- Faz diyagramları nicel çözüm yerine niteliksel analiz yapmaya yarar.
- **Faz Diyagramı Çizimi:**
  1. $\dot{x} = 0$ ve $\dot{y} = 0$ eğrilerinin çizilmesi (Bu eğriler sırasıyla x ve y için denge değerlerini yansıtır).
  2. İşaretlerin bulunması.

Eş anlı Diferansiyel Denklem Sistemleri

Örnek 1

- $$\dot{x} = f(x,y)$$
  $$\dot{y} = g(x,y)$$
- Varsayımlar: $f_x < 0$, $f_y > 0$, $g_x > 0$ ve $g_y < 0$
- **1. adım:** $\dot{x} = 0$ ve $\dot{y} = 0$ eğrilerini çizelim.
- $\dot{x} = 0$ eğrisinin eğimini bulmak icin:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x,y) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}|_{\dot{x}=0} = \underbrace{-\frac{f_x}{f_y}}_{\text{Örtük Fonk. Teoremi ile}} = + \quad \text{işaretli} \Rightarrow \dot{x} = 0'\text{in eğimi pozitif}$$

- $\dot{y} = 0$ eğrisinin eğimini bulmak için:

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow g(x,y) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}|_{\dot{y}=0} = \underbrace{-\frac{g_x}{g_y}}_{\text{Örtük Fonk. Teoremi ile}} = + \quad \text{işaretli} \Rightarrow \dot{y} = 0'\text{in eğimi pozitif}$$

- Varsayım: $|-\frac{f_x}{f_y}| > |-\frac{g_x}{g_y}| \Rightarrow \dot{x} = 0$ eğrisi daha dik

Eş anlı Diferansiyel Denklem Sistemleri

2. adım: İşaretlerin Belirlenmesi

- Oluşan bu 4 bölgede işaret analizi yapılır.
- Analiz x ekseni ya da y eksenine göre yapılabilir. Sonuçlar değişmeyecektir.
- x **eksenine göre analiz:**
- $$\frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x < 0 \Longrightarrow$$
- x ekseninde ilerledikçe (soldan sağa hareket) $\frac{dx}{dt}$ azalmaktadır. Biz $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = 0$ eğrisinin konumunu bilmekteyiz. Dolayısıyla, bu eğrinin solunda kalan bölgelerde $\frac{dx}{dt} = \dot{x} > 0$, sağında kalan bölgelerde ise $\frac{dx}{dt} = \dot{x} < 0$ olmalıdır ki x ekseninde ilerledikçe $\frac{dx}{dt}$ azalsın.
- $$\frac{\partial \frac{dy}{dt}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = g_x > 0 \Longrightarrow$$
- x ekseninde ilerledikçe $\frac{dy}{dt}$ artmaktadır. Biz $\frac{dy}{dt} = \dot{y} = 0$ eğrisini bildiğimizden bu eğrinin solunda kalan bölgelerde $\frac{dy}{dt} = \dot{y} < 0$, sağında kalan bölgelerde ise $\frac{dy}{dt} = \dot{y} > 0$ olmalıdır ki x ekseninde ilerledikçe $\frac{dy}{dt}$ artsın.
- Bu etkilerin bileşkeleri bize dengeye zaman içerisinde gidip gidemeyecegimiz hakkında bilgi sağlar.
- Bu örnekteki duruma **kararlı denge** denir çünkü hangi noktadan başlarsak başlayalım dengeye ulaşıyoruz.

Eş anlı Diferansiyel Denklem Sistemleri

y **eksenine göre analiz:**

- $$\frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y > 0 \Longrightarrow$$
- y ekseninde ilerledikçe (aşağıdan yukarıya hareket) $\frac{dx}{dt}$ artmaktadır. Biz $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = 0$ eğrisinin konumunu bilmekteyiz. Dolayısıyla, bu eğrinin aşağısında kalan bölgelerde $\frac{dx}{dt} = \dot{x} < 0$, yukarısında kalan bölgelerde ise $\frac{dx}{dt} = \dot{x} > 0$ olmalıdır ki y ekseninde ilerledikçe $\frac{dx}{dt}$ artsın.
- $$\frac{\partial \frac{dy}{dt}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = g_y < 0 \Longrightarrow$$
- y ekseninde ilerledikçe $\frac{dy}{dt}$ azalmaktadır. Biz $\frac{dy}{dt} = \dot{y} = 0$ eğrisini bildiğimizden bu eğrinin aşağısında kalan bölgelerde $\frac{dy}{dt} = \dot{y} > 0$, yukarısında kalan bölgelerde ise $\frac{dy}{dt} = \dot{y} < 0$ olmalıdır ki y ekseninde ilerledikçe $\frac{dy}{dt}$ azalsın.
- Hesaplamaların x ya da y eksenine göre yapılması sonuçları değiştirmedi.

Eş anlı Diferansiyel Denklem Sistemleri

Örnek 2:

- $$\dot{x} = f(x, y)$$
  $$\dot{y} = g(x, y)$$
- Varsayımlar: $f_x = 0, f_y > 0, g_x > 0$ ve $g_y = 0$
- **1. adım:** $\dot{x} = 0$ ve $\dot{y} = 0$ eğrilerini çizelim.
- $\dot{x} = 0$ eğrisinin eğimini bulmak için:
- $$\dot{x} = 0 \Rightarrow f(x, y) = 0$$
- $$\frac{dy}{dx}|_{\dot{x}=0} = \underbrace{-\frac{f_x}{f_y}}_{\text{Örtük Fonk. Teoremi ile}} = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0'\text{in eğimi } 0$$
- $\dot{y} = 0$ eğrisinin eğimini bulmak için

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow g(x, y) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}|_{\dot{y}=0} = \underbrace{-\frac{g_x}{g_y}}_{\text{Örtük Fonk. Teoremi ile}} = \infty \Rightarrow \dot{y} = 0'\text{in eğimi} \quad \infty$$

Örnek 2 devamı:

- **2.adım:** Oluşan bu 4 bölgede işaret analizi yapalım.
- Bu özel durumda $\dot{x} = 0$ yatay bir eğri olduğundan bu eğrinin işaret analizi y eksenine göre yapılmalıdır.
- Benzer şekilde $\dot{y} = 0$ dikey bir eğri olduğundan bu eğrinin işaret analizi x eksenine gore yapılmalıdır.
- $$\frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y > 0 \Longrightarrow$$
- y ekseninde ilerledikçe $\frac{dx}{dt}$ artmaktadır. Biz $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = 0$ eğrisini bildiğimizden bu eğrinin aşağısında kalan bölgelerde $\frac{dx}{dt} = \dot{x} < 0$, yukarısında kalan bölgelerde ise $\frac{dx}{dt} = \dot{x} > 0$ olmalıdır ki y ekseninde ilerledikçe $\frac{dx}{dt}$ artsın.
- $$\frac{\partial \frac{dy}{dt}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = g_x > 0 \Longrightarrow$$
- x ekseninde ilerledikçe $\frac{dy}{dt}$ artmaktadır. Biz $\frac{dy}{dt} = \dot{y} = 0$ eğrisini bildiğimizden bu eğrinin solunda kalan bölgelerde $\frac{dy}{dt} = \dot{y} < 0$, sağında kalan bölgelerde ise $\frac{dy}{dt} = \dot{y} > 0$ olmalıdır ki x ekseninde ilerledikçe $\frac{dy}{dt}$ artsın.
- Bu etkilerin bileşkeleri bize dengeye zaman içerisinde gidip gidemeyeceğimiz hakkında bilgi sağlar.
- Örnekteki bu duruma "eyer dengesi" denir ve sadece "stable arm" (kararlı kısım) üzerindeki noktalarda bulunursak dengeye ulaşırız.

Eş anlı Diferansiyel Denklem Sistemleri

Eyer Dengesi Durumunda Dengeye Ulaşma Koşulu ("Stable Arm" üzerinde olma koşulu):

- Şöyle bir diferansiyel denklem sistemi olsun:

$$\dot{x} = \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}y - 25$$

$$\dot{y} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1$$

- Bu diferansiyel denklemin çözümü şu şekilde olur:

$$x_G = 7De^{3t} - Ee^{-t} + 3$$

$$y_G = De^{3t} + Ee^{-t} + 5$$

- Kökler $r_1 = 3$, $r_2 = -1$ oldugundan (reel karşıt kökler) bu durum eyer dengesini ifade eder.
- Bu durumda dengeye sadece "stable arm" üzerinde bulunursak ulaşırız.
- Bir başka ifadeyle $t \to \infty$ birinci kök bizi dengeden uzaklaştıracaktır (çünkü $\lim_{t\to\infty} e^{3t} = \infty$).
- 2. kök ise şunu ifade eder: $lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$.
- O halde D ifadesinin *ancak ve ancak* 0 olması durumunda dengeye ulaşmamız mümkün olur çünkü böylece bizi dengeden uzaklaştıran 1. kökün etkisi yok edilmiş olur.
- Bir başka deyişle $D = 0$ sağlandığında "stable arm" üzerinde olmuş oluruz.

Eş anlı Diferansiyel Denklem Sistemleri

Eyer Dengesi Durumunda Dengeye Ulaşma Koşulu ("Stable Arm" üzerinde olma koşulu):

- O halde $D = 0$ eşitliğini sağlayacak başlangıç koşullarını bulmamız gerekir.
- Başlangıç anında ($t = 0$):

$$x(0) = 7D - E + 3$$

$$y(0) = D + E + 5$$

- Bu denklemlerden (iki denklemi toplyarak E'yi yok ettik ve D için başlangıç koşulu elde ettik):
- $$x(0) + y(0) = 8D + 8 \Longrightarrow D = \frac{x(0) + y(0)}{8} - 1 \Longrightarrow$$
- $x(0) + y(0) = 8$ olmalıdır ki $D = 0$ olsun, yani zaman patikası dengeye ulaşabilsin. Bir başka deyişle başlangıçta "stable arm" üzerinde başlamış olalım.

Eş anlı Diferansiyel Denklem Sistemleri

Taylor Açılımı, Doğrusallaştırma ve Niteliksel Analiz:

- $f(x, y)$ gibi bir fonksiyon olsun.
- Bu fonksiyonun (x_0, y_0) noktasında doğrusallaştırılması:

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

- Bu bilgiler ışığında $\dot{x} = f(x, y) = 0$ ve $\dot{y} = g(x, y) = 0$ ifadelerini denge $(\bar{x}, \bar{y})$ etrafında doğrusallaştıralım:

$$\dot{x} = \underbrace{f(\bar{x}, \bar{y})}_{=0} + f_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + f_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$$

$$\dot{y} = \underbrace{g(\bar{x}, \bar{y})}_{=0} + g_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + g_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$$

- Eşitliğin sağındaki ilk ifadeler denge etrafında açılım yaptığımız için 0 değerini almaktadır.Bu ifadeleri duzenlersek:

$$\dot{x} - f_x(\bar{x}, \bar{y})x - f_y(\bar{x}, \bar{y})y = -f_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x} - f_y(\bar{x}, \bar{y})\bar{y}$$

$$\dot{y} - g_x(\bar{x}, \bar{y})x - g_y(\bar{x}, \bar{y})y = -g_x(\bar{x}, \bar{y})\bar{x} - g_y(\bar{x}, \bar{y})\bar{y}$$

- Yukarıdaki denklemlerde sağ taraftaki ifadelerin hepsi sabittir.
- Niteliksel analizde karakteristik kökler ile ilgilenmekteyiz.
- Karakteristik denklemi elde etmek için Taylor açılımı ile doğrusallaştırdığımız denklemlerin homojen kısımlarını incelemek yeterlidir.

Eş anlı Diferansiyel Denklem Sistemleri

Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

Faz Diyagramları ve Taylor Açılımı

Taylor Açılımı, Doğrusallaştırma ve Niteliksel Analiz:

- Yukarıdaki sistemimatris şeklinde ifade edersek:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{K} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}}_{J} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \Longrightarrow |J| = f_x g_y - f_y g_x, \quad tr(J) = f_x + g_y$$

  $\underbrace{|rK - J| = 0}_{\text{karakteristik denklem}}$ olmalıdır. (r karakteristik kökler).

- Bu durumda:

$$\begin{vmatrix} r - f_x & -f_y \\ -g_x & r - g_y \end{vmatrix} \Longrightarrow$$

- $$r^2 - tr(J)r + |J| = 0$$

- $$r_1, r_2 = \frac{tr(J) \pm \sqrt{(tr(J))^2 - 4|J|}}{2}$$

- Not: $r_1 + r_2 = tr(J)$, $r_1 r_2 = |J|$

Denge Tipleri:

- 1. durum $(tr(J))^2 > 4|J|$: (farklı reel kökler)
  - $r_1, r_2 < 0 \Rightarrow |J| > 0$ ve $tr(J) < 0 \Longrightarrow$ kararlı denge
  - $r_1, r_2 > 0 \Rightarrow |J| > 0$ ve $tr(J) > 0 \Longrightarrow$ kararsız denge
  - $r_1 > 0, r_2 < 0 \Rightarrow |J| < 0$ ve $tr(J) <=> 0 \Longrightarrow$ eyer dengesi
- 2. durum $(tr(J))^2 = 4|J|$: (tekrarlayan reel kökler)
  - $r < 0 \Rightarrow |J| > 0$ ve $tr(J) < 0 \Longrightarrow$ kararlı denge
  - $r > 0 \Rightarrow |J| > 0$ ve $tr(J) > 0 \Longrightarrow$ kararsız denge

Örnek:

- $$\dot{x} = f(x,y) = xy - 2$$
  $$\dot{y} = g(x,y) = 2x - y$$
  ve $x, y > 0$.
- Bu durumda dengede aşağıdaki koşullar sağlanır:
  $$\dot{x} = 0 \Rightarrow xy = 2$$
  $$\dot{y} = 0 \Rightarrow 2x = y$$
- Denge değerleri $\bar{x} = 1, \bar{y} = 2$ olur.
- Dengenin tipini analiz edecek olursak:
  $$J = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} = 2 & \bar{x} = 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -4 \Longrightarrow$$
- $|J| = -4 < 0$ ve $tr(J) = 1 > 0 \Longrightarrow$ Eyer Dengesi olur.