Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

AÜ SBF İktisat Bölümü

Optimal Kontrol

- **Sınırlı** Zaman Problemleri: $t \in [0, T]$. Burada T sınırlı bir sayıdır.
- a) Son değer üzerinde bir kısıt yok (free endpoint problem)
- b) Son değer üzerinde bir kısıt var (constraint on the terminal value)
- **Sınırsız** Zaman Problemleri: $t \in [0, \infty)$.

Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon

Optimal Kontrol

- a) x(T) değeri yani son değer üzerinde hiçbir kısıtlama olmayan problemler (free endpoint problem):
- $$\max_{c(t)|t\in[0,T]} \int_0^T \underbrace{v[\underbrace{x(t)}_{\text{durum (state)}}, \underbrace{c(t)}_{\text{secim (choice)}}, t]\, dt}_{amacfonksiyonu}$$
- s.t
  $$\dot{x(t)} = f[x(t), c(t), t] \qquad t \in [0, T]$$
- $$x(T) \ serbest$$
- $$x(0) = x_0$$
- Hamiltonian fonksiyonu şu sekilde yazılır:

$$H(x, c, \lambda, t) \equiv v(x, c, t) + \underbrace{\lambda}_{\text{co-state}} f(x, c, t)$$

Optimal Kontrol

- Hamiltonian fonksiyonu şu sekilde yazılır:

$$H(x, c, \lambda, t) \equiv v(x, c, t) + \underbrace{\lambda}_{\text{co-state}} f(x, c, t)$$

- Gerekli koşullar:
- $\frac{\partial H}{\partial c}$: $v_c(x, c, t) + \lambda f_c(x, c, t) = 0$
- $\frac{\partial H}{\partial x}$: $v_x(x, c, t) + \lambda f_x(x, c, t) = -\dot{\lambda}$
- $\dot{x}(t) = f(x(t), c(t), t)$
- $\lambda(T) = 0$ (Transversality Condition-TVC): λ, x'in marjinal katkısını belirtir.
- Bu problemde x(T) üzerinde hiçbir kısıt yoktur.
- Fakat $\lambda(T) = 0$'dir yani $x(T)$'nin T anında faydaya olan katkısı 0'dır.

Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon

Optimal Kontrol

- b)Son değer x(T) üzerinde kısıtlama olan problemler (constraint on the terminal value).
- En yaygın kullanılan kısıtlardan biri $x(T) \geq 0$ kısıtıdır.
- $$\max_{c(t)|t\in[0,T]} \int_0^T v[\underbrace{x(t)}_{\text{state}}, \underbrace{c(t)}_{\text{choice}}, t]dt$$

  s.t
- $$\dot{x}(t) = f[x(t), c(t), t] \quad t \in [0, T]$$
- $$x(T) \geq 0$$
- $$x(0) = x_0$$
- Hamiltonian fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$H(x, c, \lambda, t) \equiv v(x, c, t) + \lambda f(x, c, t)$$

Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon

Optimal Kontrol

- Hamiltonian fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$H(x, c, \lambda, t) \equiv v(x, c, t) + \lambda f(x, c, t)$$

- Gerekli koşullar:
- $\frac{\partial H}{\partial c}$: $v_c(x, c, t) + \lambda f_c(x, c, t) = 0$
- $\frac{\partial H}{\partial x}$: $v_x(x, c, t) + \lambda f_x(x, c, t) = -\dot{\lambda}$
- $\dot{x}(t) = f(x(t), c(t), t)$
- $x(T)\lambda(T) = 0$ (Transversality Condition-TVC):
- λ, x'in marjinal katkısını belirtir.
- Bu problemde $x(T) = 0$ ya da $x(T) > 0$ olabilir.
- $x(T) > 0$ ise $\lambda(T) = 0$ olur.
- **Not:** $x(T) \geq x_{\min}$ şeklinde daha genel bir kısıt altında TVC şu şekilde olur: $(x(T) - x_{\min})\lambda(T) = 0$

Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon

Optimal Kontrol: Örnek 1

- $$\max_u v = \int_0^T -(1+u^2)^{\frac{1}{2}}\, dt$$
- s.t. $$\dot{x} = u$$
- $$x(0) = A$$
- $$x(T) \quad \text{serbest}$$
- $$H = -(1+u^2)^{\frac{1}{2}} + \lambda u$$

Optimal Kontrol: Örnek 1

- $$H = -(1+u^2)^{\frac{1}{2}} + \lambda u$$
- Gerekli koşullar:
- $\frac{\partial H}{\partial u} : -\frac{1}{2} 2u(1+u^2)^{-\frac{1}{2}} + \lambda = 0 \Longrightarrow u = \lambda(1-\lambda^2)^{\frac{-1}{2}}$.
- $\frac{\partial H}{\partial x} : 0 = -\dot{\lambda}$
- $\dot{x} = u$
- $\lambda(T) = 0$
- 2. kosul $\Rightarrow \lambda(t) = \lambda(0) \quad \forall t \quad (\dot{\lambda} = b$ gibi bir diferansiyel denklemin cozumu $\lambda(0)+bt$ seklinde olur)
- $$\lambda(t) = \lambda(0) \quad \forall t \quad \text{ve} \quad \lambda(T) = 0 \Rightarrow \lambda(t) = 0 \quad \forall \quad t$$
- $$\text{1.kosul} \quad \text{ve} \quad \lambda(t) = 0 \Rightarrow u(t) = 0 \quad \forall t$$
- $$\text{3.kosul} \quad \text{ve} \quad u(t) = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0$$
  $$\dot{x} = 0 \quad \text{ve} \quad x(0) = A \Rightarrow x(t) = A \quad \forall \quad t$$

Optimal Kontrol: Örnek 2

- $$\max_{c} v = \int_0^1 (x(t) + c(t))dt$$
- s.t.
  $$\dot{x} = 1 - c(t)^2$$
- $$x(0) = 1$$
- $$x(1) \quad \text{serbest}$$
- $$H = (x(t) + c(t)) + \lambda(1 - c(t)^2)$$

Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon

Optimal Kontrol: Örnek 2

- $$H = (x(t) + c(t)) + \lambda(1 - c(t)^2)$$
- Gerekli koşullar:
- $\frac{\partial H}{\partial c} : 1 - 2\lambda c(t) = 0$
- $\frac{\partial H}{\partial x} : 1 = -\dot{\lambda}$
- $\dot{x} = 1 - c(t)^2$
- $\lambda(1) = 0$
- $$2.\text{kosul} \Rightarrow \lambda(t) = \lambda(0) - t \qquad (5)$$
- $$4.\text{kosul} \quad \text{ve} \quad (5) \Rightarrow \lambda(1) = \lambda(0) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda(0) = 1 \qquad (6)$$
- $$(5) \quad \text{ve} \quad (6) \Rightarrow \lambda(t) = 1 - t \qquad (7)$$
- $$(7) \quad \text{ve} \quad 1.\text{kosul} \Rightarrow 1 - 2(1-t)c(t) = 0 \Rightarrow c(t) = \frac{1}{2(1-t)} \qquad (8)$$
- $$3.\text{kosul} \quad \text{ve} \quad (8) \Rightarrow \dot{x}(t) = 1 - \frac{1}{4(1-t)^2} \Rightarrow x(t) = t - \frac{1}{4(1-t)} + \frac{5}{4}$$

Optimal Kontrol: Örnek 3

- $$\max_{u} - \int_0^1 \frac{1}{4}(x^2 + u^2)dt$$
- s.t
$$\dot{x} = x + u$$
- $$x(0) = 2$$
- $$x(1) = 0$$
- Hamiltonian fonksiyonu şu şekilde yazılır:
$$H = \frac{-(x^2 + u^2)}{4} + \lambda(x + u)$$

Optimal Kontrol: Örnek 3 devamı

- Hamiltonian fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$H = \frac{-(x^2 + u^2)}{4} + \lambda(x + u)$$

- Birinci derece koşullar:
- $\frac{\partial H}{\partial u} : -\frac{u}{2} + \lambda = 0 \Rightarrow u = 2\lambda$
- $\frac{\partial H}{\partial x} : -\frac{x}{2} + \lambda = -\dot{\lambda} \Rightarrow \dot{\lambda} = \frac{x}{2} - \lambda$
- $\dot{x} = x + u \Rightarrow \dot{x} = x + 2\lambda$
- $x(1)\lambda(1) = 0$

Optimal Kontrol: Örnek 3 devamı

- 2. ve 3. koşuldaki diferansiyel denklemler eş anlı çözülerek x ve λ için zaman patikaları bulunabilir. Çözülecek diferansiyel denklem sistemi şudur:

$$\dot{x} - x - 2\lambda = 0$$

- $$\dot{\lambda} + \lambda - \frac{x}{2} = 0$$

- Bu sistem eş anlı çözülerek aşağıdaki zaman patikalarını (x ve λ için) elde ederiz:
- $$x(t) = A_1 e^{\sqrt{2}t} + A_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

$$\lambda(t) = \frac{A_1}{2}(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}t} - \frac{A_2}{2}(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t}$$

Optimal Kontrol: Örnek 3 devamı

- Yukarıdaki denklemleri ve $x(0) = 2$, $x(1) = 0$ kısıtlarını kullanarak 2 bilinmeyenli 2 denklem elde ederiz:
- $$x(0) = A_1 + A_2 = 2$$
$$x(1) = A_1 e^{\sqrt{2}} + A_2 e^{-\sqrt{2}} = 0$$
- Buradan $A_1 = -0.1256$ ve $A_2 = 2.1256$ sonuçlarını elde ederiz.
- Bu durumda $u = 2\lambda$ olduğundan, seçim değişkeninin zaman patikasını şu şekilde yazılabilir:
- $$u(t) = -0.1256(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}t} - 2.1256(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t}$$

.

Özel Durum

- Hamiltonian fonksiyonu c'ye (seçim değişkeni) göre doğrusal ise (i.e. $\frac{\partial H}{\partial c}$ ifadesi eğer c'den bağımsız ise), $\frac{\partial H}{\partial c}$ koşulu yani birinci koşul geçerliligini yitirir.
- **Örnek 4:**
- $$\max_{c} v = \int_0^2 (2x(t) - 3c(t))dt$$
- s.t. $$\dot{x} = x(t) + c(t)$$
- $$x(0) = 4$$
- $$x(2) \quad \text{serbest}$$
- $$c(t) \in [0, 2]$$

$$H = 2x(t) - 3c(t) + \lambda(x(t) + c(t)) = (2 + \lambda)x(t) + (\lambda - 3)c(t)$$

Örnek 4 Devamı

- $$H = 2x(t) - 3c(t) + \lambda(x(t) + c(t)) = (2+\lambda)x(t) + (\lambda - 3)c(t)$$
- Gerekli koşullar:
- $\frac{\partial H}{\partial c} = \lambda - 3$. Önemli not: Yukarıdaki belirtilen sebepten dolayı kullanılamaz ve aşağıdaki bilgi dikkate alınmalıdır.
- Eğer $\lambda > 3 \Rightarrow$ ise H, $c(t)$ ile artan bir fonksiyondur dolayısıyla c için en yüksek değer seçilmelidir $\Rightarrow c^* = 2$
- Eğer $\lambda < 3 \Rightarrow$ ise H, $c(t)$ ile azalan bir fonksiyondur c için en küçük değer seçilmelidir $\Rightarrow c^* = 0$
- $\frac{\partial H}{\partial x} : 2 + \lambda = -\dot{\lambda}$
- $\dot{x} = x(t) + c(t)$
- $\lambda(2) = 0$

Örnek 4 Devamı

- 2.kosul $\Rightarrow \dot{\lambda}(t)+\lambda(t) = -2 \Rightarrow \lambda = (\lambda(0)+2)e^{-t}-2$ (5*nolu*) *not* : $\dot{\lambda}(t)+\lambda(t) = b$ gibi bir diferansiye

  $$\text{cozumu su sekildedir : } \left(\lambda(0) - \frac{b}{a}\right) e^{-at} + \frac{b}{a}$$

  $$\text{4.kosul} \quad \text{ve} \quad (\text{5nolu denklem}) \Rightarrow \lambda(2) = (\lambda(0)+2)e^{-2} - 2 \Rightarrow 2 = (\lambda(0)+2)e^{-2} \qquad (6)$$

- $$(6) \Rightarrow \lambda(0) \approx 12.77; \lambda(2) = 0 \qquad (7)$$

- $$(7) \Rightarrow \lambda \quad \text{zamanla azalan bir fonksiyon}$$

- $$\tau \quad \text{oyle bir an olsun ki} \quad \lambda(\tau) = 3 \quad \text{olsun}$$

- $$\lambda(\tau) = 3 \ \text{ olmasi icin } \ 3 = (12.77+2)e^{-\tau} - 2 \Rightarrow \tau = 1.084 \qquad (8)$$

- $$(8) \Rightarrow \quad \text{eger} \quad t \in [0, 1.084) \quad \text{ise} \quad c^*(t) = 2$$

- $$(8) \Rightarrow \quad \text{eger} \quad t \in (1.084, 2] \quad \text{ise} \quad c^*(t) = 0$$

Örnek 5

- $$\max_{u(t)} \int_0^1 5x(t)dt$$
- s.t
$$\dot{x} = x + u$$
- $$x(0) = 2$$
- $$x(1) \text{ serbest}$$
- $$u(t) \in [0, 3]$$
- Hamiltonian fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$H = 5x + \lambda(x + u) = x(5 + \lambda) + \lambda u$$

Örnek 5 devamı

- Hamiltonian fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$H = 5x + \lambda(x + u) = x(5 + \lambda) + \lambda u$$

- Birinci derece koşullar:
- $\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda$
- $\lambda > 0$ ise H, u ile artar ve H fonksiyonu $u^* = 3$'te maksimum olur.
- $\lambda < 0$ ise H, u ile azalır ve H fonksiyonu $u^* = 0$'te maksimum olur.
- $\frac{\partial H}{\partial x}$: $5 + \lambda = -\dot{\lambda}$
- $\dot{x} = x + u$
- $\lambda(1) = 0$
- 2. koşuldan:
- $$\dot{\lambda} + \lambda = -5$$

Örnek 5 devamı

- $$\dot{\lambda} + \lambda = -5$$
- Bu diferansiyel denklemin çözümünden:
- $$\lambda(t) = (\lambda(0) + 5)e^{-t} - 5$$
- $\lambda(1) = 0$ oldugundan,
- $$\lambda(1) = (\lambda(0) + 5)e^{-1} - 5 = 0 \Rightarrow \lambda(0) = 5e - 5 \Rightarrow \lambda(0) = 8.5$$
- Bu durumda $\lambda(0) = 8.5$ ve $\lambda(1) = 0$ olduğundan λ azalan bir fonksiyon.
- $\lambda > 0 \; \forall \; t \in [0, 1)$.
- Bu durumda seçim değiskeni için optimal değer $u^* = 3 \; \forall \; t \in [0, 1)$ olur.

Örnek 6: İktisadi bir uygulama: Firma Problemi

- Bir firma kârını (π) $[0, T]$ zaman aralığında maksimize etmeye çalışıyor.
- Bu problemde firma için "state variable" sermaye stoku (k), "control variable" yatırım (i)'dir.
- Firma başlangıçtaa k_0 sermaye stokuna sahiptir.
- Sermaye birikimi, mevcut sermaye stokunun ve yatırımın bir fonksiyonudur: $(\dot{k} = f(k, i, t))$
- Firma, zamanın her anında yatırım düzeyini seçerek sermaye stokunu etkileyecek ve böylece kârını maksimize etmeye çalışacaktır.
- Dolayısıyla zamanın her anında kâr, o andaki sermaye stokuna ve yatırıma bağlı olacaktır: $\pi(k, i, t)$.

Örnek 6: İktisadi bir uygulama: Firma Problemi

- Bu durumda optimal kontrol problemi;

$$\max_{i(t)\,|\,t\in[0,T]} \int_0^T \pi[\underbrace{k(t)}_{\text{state}}, \underbrace{i(t)}_{\text{choice}}, t]dt$$

- s.t

$$\dot{k(t)} = f[k(t), i(t), t] \qquad t \in [0, T]$$

- $$k_T \quad \text{serbest}$$

- $$k(0) = k_0$$

  şeklinde olur.

- Hamiltonian fonksiyonu da şu sekilde yazılır:

- $$H(k, i, \lambda, t) \equiv \underbrace{\pi(k, i, t)}_{\text{i seciminin su andaki ``kar''a etkisi}} + \underbrace{\lambda f(k, i, t)}_{i\ seciminin\ gelecekteki\ ``kar''a\ etkisi-}$$

- λ "shadow price" olarak adlandırılır.λ sermayenin kâra yaptığı marjinal katkı olarak yorumlanabilir.

Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon

Örnek 6: İktisadi bir uygulama: Firma Problemi

- Hamiltonian fonksiyonu da şu sekilde yazılır:
- $$H(k,i,\lambda,t) \equiv \underbrace{\pi(k,i,t)}_{\text{i seciminin su andaki ``kar''a etkisi}} + \underbrace{\lambda f(k,i,t)}_{i\ seciminin\ gelecekteki\ ``kar''\ a\ etkisi —}$$
- λ "shadow price" olarak adlandırılır.λ sermayenin kâra yaptığı marjinal katkı olarak yorumlanabilir.
- Gerekli koşullar:
- $\frac{\partial H}{\partial i} : \pi_i(k,i,t) + \lambda f_i(k,i,t) = 0$
- $\frac{\partial H}{\partial k} : \pi_k(k,i,t) + \lambda f_k(k,i,t) = -\dot{\lambda}$
- $\dot{k}(t) = f(k(t), i(t), t)$
- $\lambda(T) = 0$ (Transversality Condition-TVC)

Örnek 6: İktisadi bir uygulama: Firma Problemi

- Hamiltonian fonksiyonu da şu sekilde yazılır:
- $$H(k,i,\lambda,t) \equiv \underbrace{\pi(k,i,t)}_{\text{i seciminin su andaki "kar"a etkisi}} + \underbrace{\lambda f(k,i,t)}_{i\ seciminin\ gelecekteki\ \text{"}kar\text{"}\ a\ etkisi —}$$
- λ "shadow price" olarak adlandırılır. λ sermayenin kâra yaptığı marjinal katkı olarak yorumlanabilir.
- Gerekli koşullar:
- $\frac{\partial H}{\partial i}$: $\pi_i(k,i,t) + \lambda f_i(k,i,t) = 0$
- $\frac{\partial H}{\partial k}$: $\pi_k(k,i,t) + \lambda f_k(k,i,t) = -\dot{\lambda}$
- $\dot{k}(t) = f(k(t), i(t), t)$
- $\lambda(T) = 0$ (Transversality Condition-TVC)