# Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

AÜ SBF İktisat Bölümü

1 Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon II

**Sonsuz Zaman Problemleri:** $(T = \infty)$

- 2 alternatif çözüm yolu vardır.
- Present Value Hamiltonian, $H$.
- Current Value Hamiltonian, $H_c$.

# Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon



**Present Value Hamiltonian**

- $$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-\rho t}}_{\text{indirgeme orani}} v[\underbrace{x(t)}_{\text{state}}, \underbrace{c(t)}_{\text{choice}}, t]dt$$
- s.t
$$\dot{x}(t) = f[x(t), c(t), t]$$
- $$x(0) = x_0$$
- $\rho \geq 0$ indirgeme faktörüdür.
- $\rho = 0$ durumu tüm zamanları fayda anlamında aynı oranda önemsendiğini ifade ederken, $\rho > 0$ ifadesi bugünün yarından daha fazla önemsendiği anlamına gelmektedir.
- Present Value Hamiltonian fonksiyonu şu sekilde yazılır:

$$H(x, c, \lambda, t) \equiv e^{-\rho t} v(x, c, t) + \lambda f(x, c, t)$$

**Present Value Hamiltonian**

- Present Value Hamiltonian fonksiyonu:

$$H(x, c, \lambda, t) \equiv e^{-\rho t} v(x, c, t) + \lambda f(x, c, t)$$

- Gerekli koşullar:
- $\frac{\partial H}{\partial c}$ : $e^{-\rho t} v_c(x, c, t) + \lambda f_c(x, c, t) = 0$
- $\frac{\partial H}{\partial x}$ : $e^{-\rho t} v_x(x, c, t) + \lambda f_x(x, c, t) = -\dot{\lambda}$
- $\dot{x}(t) = f(x(t), c(t), t)$
- $\lim_{t \to \infty} \lambda(t) x(t) = 0$ (Transversality Condition-TVC).

# Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon



**Current Value Hamiltonian ($H_c$)**

- Present Value Hamiltonian fonksiyonunun şu şekilde ifade edildiğini biliyoruz:

$$H(x, c, \lambda, t) \equiv e^{-\rho t} v(x, c, t) + \lambda f(x, c, t)$$

- Bu ifadenin her iki yanını $e^{\rho t}$ ile çarparsak şu ifadeyi elde ederiz:
- $$H(x, c, \lambda, t) e^{\rho t} \equiv e^{-\rho t} e^{\rho t} v(x, c, t) + \lambda e^{\rho t} f(x, c, t)$$

- Bu ifade ile birlikte $H_c = He^{\rho t}$ ve $m = e^{\rho t}\lambda$ eşitlikleri kullanılarak **Current Value Hamiltonian** fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$H_c(x, c, \lambda, t) \equiv v(x, c, t) + mf(x, c, t)$$

# Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon



**Current Value Hamiltonian** $(H_c)$

- $$H_c(x, c, \lambda, t) \equiv v(x, c, t) + mf(x, c, t)$$
- Gerekli koşullar:
- $\frac{\partial H_c}{\partial c}$ : $v_c(x, c, t) + mf_c(x, c, t) = 0$
- $\frac{\partial H_c}{\partial x}$ : $v_x(x, c, t) + mf_x(x, c, t) = -\dot{m} + \rho m$
- $\dot{x}(t) = f(x(t), c(t), t)$
- $\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} m(t)x(t) = 0$ (Transversality Condition-TVC).
- Not: $\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} - \rho$

# Sürekli Zamanda Dinamik Optimizasyon



**İktisadi Örnek**

- Bu örnekte hanehalkı sadece tüketimden (c) fayda sağlamakta olsun: $U(c)$.
- Ayrıca, üretim sadece sermayeye (k) bağlı olsun: $f(k)$.
- Varsayımlar: $U'(c) > 0$, $U''(c) < 0$, $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$.
- $\rho \geq 0$ indergeme oranı.
- $0 < \delta < 1$ ise sermayenin yıpranma payıdır.
- Fayda maksimizsayon problemi de şöyle tanımlı olur:

$$\max_{c(t)} \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c(t)) dt$$

- s.t.

$$\dot{k} = f(k) - c(t) - \delta k$$

- $$k(0) = k_0 > 0 \ \ veri$$

**İktisadi Örnek Devamı**

- Hamiltonian fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$H \equiv e^{-\rho t} U(c(t)) + \lambda(f(k) - c(t) - \delta k)$$

- Current Value Hamiltonian fonksiyonu ise şu şekilde yazılır:

$$H_c(k, c, \lambda, t) \equiv U(c(t)) + m(t)(f(k) - c(t) - \delta k)$$

Gerekli koşullar:

- $\frac{\partial H_c}{\partial c} = U'(c(t)) - m(t) = 0 \Rightarrow U'(c(t)) = m(t)$.
- $\frac{\partial H_c}{\partial k} = m(t)(f'(k) - \delta) = -\dot{m(t)} + \rho m(t) \Rightarrow \dot{m} = -m(f'(k) - (\delta + \rho))$.
- $\dot{k}(t) = f(k) - c(t) - \delta k$.
- $\lim_{t \to \infty} e^{-\rho t} m(t) k(t) = 0$ (Transversality Condition-TVC).

**İktisadi Örnek Devamı**

- İlk koşulda $U'(c(t)) - m(t) = 0 \Rightarrow U'(c(t)) = m(t)$ eşitliğinin her iki yanının da $t$'ye göre türevini alırsak:
- $$U''(c(t))\dot{c}(t) = \dot{m}(t)$$
- Bulduğumuz bu ifadeyi, $U'(c(t)) = m(t)$ eşitliğini ve ikinci koşulu $(\dot{m} = -m(f'(k) - (\delta + \rho)))$ kullanarak aşağıdaki denklemi yazabiliriz:
- $$\dot{c}(t) = -\frac{U'(c(t))}{U''(c(t))}(f'(k) - (\delta + \rho)) \quad (*1)$$
- 3. koşuldan da
$$\dot{k}(t) = f(k) - c(t) - \delta k \quad (*2)$$
- $(*1)$ ve $(*2)$ denklemleri bu modeli karakterize eden diferansiyel denklemlerdir. Bir başka deyişle bu 2 denklem eş anlı olarak sağlandığında dengeyi yansıtacaktır.
- Faz diyagramı yardımı ile denge hakkında bazı çıkarımlar yapabiliriz.
- Faz diyagramı için Şekil 9'a bakınız.