Matematik I

Doç. Dr. Türkmen Göksel

AÜ SBF İktisat Bölümü

2 Dönemli Durum

Varsayımlar

- Temsili bir birey (tüketici) 2 dönem yaşamakta olsun: Gençlik (t=1) ve yaşlılık (t=2).
- Üretim yok. Bu durum Takas ekonomisi ((pure)exchange economy) ya da donanım ekonomisi (endowment economy) olarak adlandırılmaktadır.
- Bu bireyin 1. dönem geliri (donanım (endowment)) $w_1 > 0$, 2. dönem geliri ise $w_2 > 0$ olsun.
- Birey 1. dönemde ne kadar tüketim yapacağının (c_1) ve bir sonraki döneme ne kadar tasarruf (s_1) aktaracağının kararlarını vermektedir.
- Tasarruf $s_1 > 0$ olursa birikim, $s_1 < 0$ olursa borçlanma anlamına gelir.
- Her iki durum için de uygulanacak piyasa faiz oranı $0 < r_1 < 1$'dir.
- Dolayısıyla 1. dönem birikim yapıp donanımları (endowments) faiz getirisi ile 2. döneme aktarmak mümkündür ($s_1 > 0$).
- Benzer şekilde 2. dönemdeki gelir teminatı ile (örneğin bankadan) 1. dönem için borç alınabilir ($s_1 < 0$). Borç anapara ve faizi ile birlikte 2. dönem ödenmek zorundadır.
- 2. dönemede ise sadece tüketim kararı veriliyor çünkü rasyonel bir birey (miras bırakmanın olmadığı bir durumda) tüm gelirini ölmeden önce harcamak ister. Dolayısıyla $s_2 = 0$ olur.
- İndirgeme faktörü: $0 < \beta \leq 1$ değerini almaktadır.
- Ekonomide her iki dönemde de tüketim malının fiyatı 1'e normalize edilmiştir.

2 Dönemli Durum

Tüketici Probleminin Matematiksel Olarak İfade Edilişi:

- $$\max_{c_1, c_2, s_1} ln(c_1) + \beta ln(c_2) \tag{1}$$
- s.t.
$$c_1 + s_1 \leq w_1 \tag{2}$$
- $$c_2 \leq w_2 + (1 + r_1)s_1 \tag{3}$$
- $$c_1, c_2 \geq 0 \tag{4}$$
- Problemi daha basit halde yazıp çözmemiz uygun olur.
- U_{c_1} ve $U_{c_2} > 0$ oldugundan ilk 2 kısıtı eşitlik halinde yazabiliriz.
- Eşitlik halindeki bu kısıtları tek bir kısıta indirgeyebiliriz.
- Bu durumda seçim değişkeni sayısı 3'ten 2'ye düşer.
- Inada koşulu gereği son kısıt da ihmal edilebilir: $\lim_{c \to 0} U'(c) = \infty \implies c_1, c_2 > 0$.
- Yukarıda elde edilen bu çıkarımları kullanır ve ayrıca 2. kısıttaki s_1 ifadesini 1. kısıtta yerine yazarsak problemi şu şekilde ifade edebiliriz:

2 Dönemli Durum

Tüketici Probleminin Basitleştirilmiş Hali:

- Yukarıda elde edilen bu çıkarımları kullanır ve ayrıca 2. kısıttaki s_1 ifadesini 1. kısıtta yerine yazarsak problemi şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\max_{c_1, c_2} ln(c_1) + \beta ln(c_2) \tag{5}$$

- s.t.

$$c_1 + \frac{c_2}{(1+r_1)} = w_1 + \frac{w_2}{(1+r_1)} \tag{6}$$

- Tüketici problemi için Lagrange fonksiyonunu yazarsak:

$$Ł = ln(c_1) + \beta ln(c_2) + \lambda \left(w_1 + \frac{w_2}{(1+r_1)} - c_1 - \frac{c_2}{(1+r_1)} \right)$$

2 Dönemli Durum

Tüketici Probleminin Çözümü:

- $$Ł = ln(c_1) + \beta ln(c_2) + \lambda \left(w_1 + \frac{w_2}{(1+r_1)} - c_1 - \frac{c_2}{(1+r_1)} \right)$$
- F.O.C. c_1'e göre:
$$\frac{1}{c_1} = \lambda$$
- F.O.C. c_2'ye göre:
$$\frac{\beta}{c_2} = \lambda \frac{1}{(1+r_1)}$$
- Bu iki koşulu birleştirirsek (Euler denklemi):
$$c_1 = \frac{1}{\beta(1+r_1)} c_2 \quad (*_1)$$
- $(*_1)$ denklemi ile bütçe kısıtını birleştirirsek:
$$\frac{1}{\beta(1+r_1)} c_2 + \frac{c_2}{(1+r_1)} = w_1 + \frac{w_2}{(1+r_1)} \quad (*_2)$$
- Yukarıdaki denklemi c_2 için çözersek:
$$c_2^* = \frac{\beta}{1+\beta} (w_1(1+r_1) + w_2) \quad (*_3)$$

2 Dönemli Durum

Tüketici Probleminin Çözümü:

- $(*_1)$ ile $(*_3)$ denklemlerini birleştirirsek c_1^* ifadesini buluruz:

$$c_1^* = \frac{1}{\beta(1+r_1)} \frac{\beta}{1+\beta} (w_1(1+r_1)+w_2)$$

- Düzenlersek

$$c_1^* = \frac{1}{1+\beta} \left(w_1 + w_2 \frac{1}{(1+r_1)} \right) \quad (*_4)$$

- Optimal tasarruf s_1^* ise $c_1 + s_1 = w_1$ eşitliğinden elde edilir:

$$s_1^* = w_1 - \frac{1}{1+\beta} \left(w_1 + w_2 \frac{1}{(1+r_1)} \right) (*_5)$$

- Dolayısıyla $(*_3)$, $(*_4)$ ve $(*_5)$ denklemleri problemin çözümünü oluşturur.